НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

И.В. СКРЫПНИК

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

СЕРИЯ
«ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ: МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, КИБЕРНЕТИКА»
Т. 1

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2008

УДК 517.9

Первый том серии «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика» составляют избранные работы И.В Скрыпника, в которых изложены его основные результаты в изучении следующих вопросов: A-гармонические формы на римановом пространстве, регулярность решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка, топологические методы исследования разрешимости нелинейных уравнений, квазилинейные уравнения высшего порядка с усиленной эллиптичностью, регулярность граничной точки для квазилинейных уравнений, поточечные оценки решений модельных нелинейных задач и усреднение нелинейных задач Дирихле в областях сложной структуры.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории дифференциальных уравнений в частных производных и нелинейного анализа.

Перший том серії "Задачі і методи: математика, механіка, кібернетика" складають вибрані твори І.В. Скрипника, в яких викладено його основні результати у вивченні слідуючих питань: A-гармонічні форми на рімановому просторі, регулярність розв'язків квазілінійних еліптичних рівнянь вищого порядку, топологічні методи дослідження розв'язності нелінійних рівнянь, квазілінійні рівняння вищого порядку з підсиленою еліптичністю, регулярність межевої точки для квазілінійних рівнянь, поточкові оцінки розв'язків модельних нелінійних задач і усереднення нелінійних задач Діріхле в областях складної структури.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів, що спеціалізуються у галузі теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і нелінійного аналізу.

Ответственный редактор 1-го тома – А.А. Ковалевский

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики НАН Украины

Этим томом открывается серия монографий «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика», которые готовятся к изданию учеными Института прикладной математики и механики НАН Украины. Инициатором серии обобщающих монографий, охватывающих основные достижения ведущих специалистов Института в ряде важных направлений математики, механики и кибернетики, был выдающийся ученый, академик НАН Украины, в 1977–2005 гг. директор Института, И.В. Скрыпник. Внезапная кончина Игоря Владимировича 2 февраля 2005 г. не позволила ему начать реализацию этого проекта. Но идея издания серии не забылась, была поддержана в Институте и уже начинает воплощаться в жизнь.

Монографии серии, относящиеся к области математики, будут посвящены исследованию сингулярных решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений, задачам со свободной границей, вопросам гармонического анализа, теории аппроксимации, геометрической и топологической теории отображений, а также предельным теоремам для решений стохастических уравнений.

В монографиях по механике будут рассмотрены классические задачи динамики твердого тела, изучены движения гиростата и динамика систем связанных твердых тел, исследованы устойчивость и стабилизация динамических систем, прямые и обратные задачи управления и пространственные задачи механики горных пород.

Наконец, в монографиях, относящихся к области кибернетики, будут представлены исследования, связанные с математическим моделированием, идентификацией и управлением технологическими процессами, рассмотрены дискретные и эволюционные методы в теории конечных систем, а также динамические системы и их приложения в обработке информации.

Начинается серия томом избранных трудов И.В. Скрыпника. Осуществление этого издания и открытие им данной серии – это не просто дань памяти автора идеи серии, ученого и руководителя, возглавлявшего Институт в течение долгого времени. Игорь Владимирович был ученым с большой буквы, обогатившим математику многими фундаментальными результатами. Несмотря на отнимавшую много сил и времени административную и организаторскую деятельность, он очень плодотворно и на высоком уровне работал сам и своим примером и поддержкой стимулировал работу коллег и учеников. Он возглавлял свою, хорошо известную в мире, школу по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных и заботился о развитии других научных школ в Институте. Выдающиеся научные достижения И.В. Скрыпника приходятся на годы его работы в Институте прикладной математики и механики и составляют гордость Института. Многие из основных результатов ученого содержатся в работах, включенных в том его избранных трудов, который предлагается Вашему вниманию.

Игорь Владимирович Скрыпник

И.В. Скрыпник родился 13 ноября 1940 г. в г. Жмеринке Винницкой области. Там же прошло его детство. После окончания средней школы он поступил во Львовский государственный университет им. И. Франко. В 1957–1962 гг. он – студент, а в 1962–1965 гг. – аспирант механико-математического факультета этого университета. Его учителем и научным руководителем был выдающийся математик Я.Б. Лопатинский. Общение с Лопатинским сыграло важную роль в формировании математических интересов И.В. Скрыпника и его становлении как ученого. В 1965 г. Игорь Владимирович защитил кандидатскую диссертацию «A-гармонические формы на римановых пространствах». В 1965–1967 гг. он работал ассистентом, старшим преподавателем и доцентом во Львовском университете.

Дальнейшая научная и педагогическая деятельность И.В. Скрыпника была тесно связана с учреждениями Донецка, куда он переехал вслед за своим учителем в 1967 г. С того же времени и до конца своей жизни Игорь Владимирович работал в Институте прикладной математики и механики НАН Украины. В 1967–1974 гг. он – старший научный сотрудник института. В 1972 г. защитил докторскую диссертацию «Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка». В 1975–1977 гг. он работал заместителем директора института по научной работе. С сентября 1977 г. и до своей внезапной кончины 2 февраля 2005 г. И.В. Скрыпник – директор института. В 1979 г. избран член-корреспондентом, а в 1985 г. – действительным членом Национальной академии наук Украины. В 1993–2005 гг. он – академик-секретарь Отделения математики НАН Украины.

И.В. Скрыпник обогатил математику многими фундаментальными результатами, и его научные достижения получили высокую оценку. Он – лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники (1989), премий имени Н. Островского (1972), Н.М. Крылова (1992) и Н.Н. Боголюбова (2000) НАН Украины. В 1998 г. ему было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники Украины». Он был награжден орденом Дружбы народов (1986) и орденом Ярослава Мудрого V степени (2003).

Первые научные работы ученого (1963–1966 гг.) были посвящены изучению -гармонических форм на римановых пространствах. В этих работах построена обобщенная теория де Рама–Ходжа для дифференциальных форм, удовлетворяющих эллиптическому уравнению высшего порядка. Затем И.В. Скрыпник переключился на исследование проблем теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Именно в этой теории ученый получил выдающиеся результаты, принесшие ему мировое признание.

Значительное внимание И.В. Скрыпник уделил исследованию регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка. Проблема регулярности решений нелинейных эллиптических уравнений была одной из ключевых проблем в теории дифференциальных уравнений на протяжении XX столетия. В частичной форме она была поставлена Д. Гильбертом в его девятнадцатой проблеме. К началу 70-х годов прошлого века в работах Э. Де Джорджи, Ю. Мозера, Дж. Серрина, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и других авторов была полностью исследована регулярность решений квазилинейных дивергентных эллиптических решений второго порядка. Вместе с тем для уравнений высшего порядка эта проблема оставалась открытой. Более того, были построены контрпримеры (Э. Де Джорджи, Э. Джусти–М. Миранда, В.Г. Мазья), показавшие, что эллиптические уравнения высшего порядка существенно отличаются по свойствам решений от уравнений второго порядка. В работах И.В. Скрыпника впервые был дан ответ на следующий вопрос: какой минимальной дополнительной гладкостью должно обладать обобщенное решение уравнения высшего порядка для того, чтобы оно было классическим? Ответом является условие регулярности: , где – половина порядка уравнения, а – число независимых переменных. Из этого результата и -оценки производных -го порядка просто получается классическая гладкость любого решения квазилинейного эллиптического уравнения произвольного порядка на плоскости.

Другое направление исследований И.В. Скрыпника было связано с развитием топологических методов в теории нелинейных уравнений. В начале 60-х годов прошлого века в работах М.И. Вишика, Г. Минти, Ф. Браудера, Ж.-Л. Лионса и других математиков были созданы методы исследования разрешимости граничных задач для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений произвольного порядка. Основой этих методов стала теория монотонных операторов. Дальнейшее их развитие и прогресс в исследовании нелинейных граничных задач были связаны с созданием теории степени операторов монотонного типа. В конце 60-х годов двадцатого столетия одновременно и независимо создаются теория степени -собственных операторов Браудера–Петришина, значениями которой являются последовательности целых чисел, и теория И.В. Скрыпника степени операторов класса α) (класса в современной терминологии), значениями которой являются целые числа.

Введение И.В. Скрыпником условия α) и, независимо, Ф. Браудером условия имело определяющее значение для развития топологических методов в теории нелинейных граничных задач. Теория степени операторов класса α) существенно расширила применение этих методов, берущих свое начало в классических работах Лерэ–Шаудера по степени операторов вида «тождественный плюс вполне непрерывный». И.В. Скрыпник дал определение степени операторов класса $\alpha)$ для сепарабельных и несепарабельных пространств, исследовал основные свойства степени и доказал аналог теоремы Хопфа, утверждающей, что степень отображений является единственным топологическим инвариантом. Игорь Владимирович установил формулу для индекса критической точки и дал применение теории степени к разрешимости нелинейных операторных уравнений и нелинейных эллиптических граничных задач. Теория степени позволила решить задачи о существовании собственных чисел и точек бифуркации.

Созданная И.В. Скрыпником в начале 70-х годов прошлого века теория степени операторов класса нашли важные применения в изучении общих нелинейных эллиптических уравнений с нелинейными граничными операторами, удовлетворяющими условию Лопатинского. И.В. Скрыпник предложил метод сведения общих нелинейных эллиптических граничных задач к операторным уравнениям с операторами класса . Такое сведение реализуется в пространствах Соболева, вложенных в пространства достаточно гладких функций, и основывается на априорных оценках решений линейных эллиптических задач. Теория степени операторов класса дала возможность развить топологические методы исследования существенно нелинейных параболических начально-краевых задач.

В конце 90-х годов прошлого столетия теория степени операторов монотонного типа получила дальнейшее развитие. Это было связано с изучением нелинейных задач с сильно растущими коэффициентами. В совместных работах И.В. Скрыпника и А. Картсатоса была введена степень для двух классов плотно заданных отображений. Первый класс является обобщением операторов класса , и теория степени отображений этого класса была применена для изучения нелинейных эллиптических задач с сильно растущими коэффициентами. Второй класс отображений – это сумма максимально монотонного оператора и оператора класса , и теория степени отображений этого класса была применена для изучения нелинейных параболических задач с сильно растущими коэффициентами. Было продолжено исследование индекса критической точки для плотно заданных операторов. Так, для операторов класса было введено понятие линеаризации и в терминах собственных чисел определенного линейного оператора получена формула индекса критической точки. Эти результаты нашли применение к нелинейным задачам с сильно растущими коэффициентами и задаче о точках бифуркации.

И.В. Скрыпник ввел классы нелинейных эллиптических и параболических уравнений высокого порядка, у которых произвольные обобщенные решения непрерывны по Гельдеру.

Им также установлено необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Это условие совпадает с установленным Р. Гарипи и В. Цимером достаточным условием регулярности граничной точки и, таким образом, результат И.В. Скрыпника приводит к критерию регулярности граничной точки. Позже результат Гарипи и Цимера был распространен ученым на введенный им класс квазилинейных уравнений высшего порядка с усиленной эллиптичностью.

И.В. Скрыпник был одним из ведущих специалистов в мире по вопросам усреднения нелинейных граничных задач в областях сложной структуры. Исследование граничных задач в сильно неоднородных областях стало, начиная с 70-х годов прошлого века, одной из центральных проблем теории дифференциальных уравнений в частных производных. Важность изучения таких задач связана с моделированием многочисленных задач механики и физики в сильно неоднородных средах. В случае линейных уравнений эти задачи изучали Э. Де Джорджи, Э. Санчес-Паленсия, О.А. Олейник и другие для областей с периодической структурой и В.А. Марченко и Е.Я. Хруслов для областей, вообще говоря, непериодической структуры. И.В. Скрыпник создал метод исследования задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в областях с мелкозернистой границей. Метод был основан на новых поточечных априорных оценках решений задач в модельных областях. Эти оценки дали возможность ученому исследовать построенное им асимптотическое разложение решений рассматриваемых задач в последовательности перфорированных областей, установить сильную сходимость остаточного члена и построить соответствующую усредненную граничную задачу. Важно, что при этом была доказана сходимость по лебеговой мере градиентов решений. Указанные результаты были получены для областей как с объемным, так и с поверхностным распределением перфорации. Дальнейшее развитие предложенного метода дала возможность И.В. Скрыпнику перейти к исследованию усреднения задач Дирихле в областях с каналами и тонкими пустотами, а затем и областях с общей перфорацией. Метод асимптотического разложения, разработанный И.В. Скрыпником, развивался им и в работах по усреднению нелинейных параболических задач Коши–Дирихле.

В последние десять лет своей жизни Игорь Владимирович был активно вовлечен в международное научное сотрудничество и вместе с известными зарубежными математиками получил целый ряд существенных результатов в интересовавших его направлениях исследований. Вместе с Дж. Даль Мазо он построил теорию усреднения задач Дирихле в общих перфорированных областях для нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью. Для положительных решений таких же уравнений

И.В. Скрыпник совместно с Ф. Николози доказал неравенства Гарнака. Вместе с В.А. Лискевичем он получил новые результаты о существовании и несуществовании положительных решений во внешних областях для нелинейных эллиптических уравнений с коэффициентами из класса Като. Совместно с Г. Гаевским И.В. Скрыпник исследовал эллиптико-параболические задачи диффузионных процессов в электрически заряженных средах при условиях сильного вырождения диффузионного коэффициента и, как уже отмечалось выше, вместе с А. Картсатосом занимался развитием теории степени операторов монотонного типа и соответствующими приложениями.

И.В. Скрыпник – автор более чем 200 научных публикаций. Среди них 5 монографий, одна из которых была опубликована на английском языке в Германии, а три переизданы на английском языке.

Плодотворную научную работу Игорь Владимирович удачно соединял с активной педагогической деятельностью. На протяжении многих лет он читал основные и специальные курсы по теории дифференциальных уравнений в частных производных для студентов математического факультета Донецкого национального университета, отбирал способную молодежь и уделял значительное внимание ее научной подготовке через аспирантуру. Среди его учеников 4 доктора и 20 кандидатов физико-математических наук. В 1999–2004 гг. И.В. Скрыпник возглавлял кафедру дифференциальных уравнений ДонНУ.

В личности Игоря Владимировича гармонично сочетались крупный математический талант, высокие качества учителя и большие организаторские способности. В 1979 г. по его инициативе в Институте прикладной математики и механики был создан отдел нелинейного анализа. Как руководитель отдела И.В. Скрыпник приложил много усилий для формирования Донецкой математической школы по теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эта школа и сегодня, после ухода из жизни ее несомненного лидера, сохраняет передовые позиции в Украине. Она имеет существенные научные достижения, известные во всем мире.

Благодаря своим высоким профессиональным качествам, принципиальности и вместе с тем демократичности и человечности Игорь Владимирович заслуженно пользовался авторитетом и уважением широкой научной общественности. Под его руководством в Институте прикладной математики и механики НАН Украины приобрели развитие новые направления фундаментальных и прикладных исследований, была создана опытно-конструкторская база и существенно укреплен кадровый состав. На посту академика-секретаря Отделения математики НАН Украины И.В. Скрыпник уделял постоянное внимание развитию творческих связей математических коллективов академических учреждений и вузов, повышению международного авторитета украинской математической науки. Возглавляя экспертный совет ВАК Украины по математике, он постоянно заботился о высоком уровне научных кадров.

Длительное время И.В. Скрыпник возглавлял Украинское математическое общество. Он был ответственным редактором сборника «Нелинейные граничные задачи», членом редакционных коллегий журналов «Вісник Національної академії наук України", "Доповіді Національної академії наук України", "Український математичний журнал", "Mathematical Physics, Analysis and Geometry", "Abstract and Applied Analysis", (USA) "Glasgow Mathematical Journal" (Great Britain) и членом редакционного совета журнала "У світі математики". В 2004 г. по его инициативе был создан новый журнал – "Український математичний вісник" – с авторитетным международным редакционным советом. Издание этого журнала продолжается, его англоязычная версия распространяется Американским математическим обществом.

И.В. Скрыпник был вдохновителем и организатором одних из наиболее авторитетных в странах СНГ традиционных конференций по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, которые регулярно, раз в два года, проводились Институтом прикладной математики и механики, начиная с 1979 г. Последние 15 лет эти конференции имеют международный статус, они проводятся с той же регулярностью, в них принимают участие многие известные зарубежные ученые-математики. Недавняя, пятнадцатая по счету, конференция из этой серии – международная конференция «Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных» (Ялта, Крым, Украина, 10–15 сентября 2007 г.) – была посвящена памяти Игоря Владимировича. В конференции приняли участие представители Украины, России, Беларуси, Казахстана, Грузии, Польши, Чехии, Словакии, Венгрии, Великобритании, Германии, Израиля, Италии, Франции, Швеции, Канады и США. Среди них было много крупных специалистов по теории дифференциальных уравнений, лично знавших И.В. Скрыпника и приехавших отдать дань памяти этого выдающегося ученого и замечательного человека.

On scientific contribution of I.V.Skrypnik

Igor Vladimirovich Skrypnik, an extremely prolific mathematician, made many important contributions in the field of nonlinear partial differential equations. He treated a wide variety of problems for elliptic and parabolic equations.

His work involved finding new estimates for solutions, proving existence and uniqueness results, and developing regularity theory for generalized solutions. He also studied solutions in domains with non-smooth boundaries and found sufficient conditions for "regular" boundary points extending the Wiener condition to nonlinear elliptic and parabolic equations.

The books he wrote on nonlinear problems are extremely useful. They contain a wealth of information, and include many of his results up to 1990, in particular, his results on nonlinear higher order equations. They also treat domains with fine-grained boundary, and study homogenization in domains with holes.

As a very useful tool in studying nonlinear problems, Professor Skrypnik introduced several extensions of topological degree theory to densely defined perturbations of maximal monotone operators, especially in order to treat nonlinear boundary conditions. He also presented possible applications to nonlinear functional analysis. One degree theory was used to define the index of isolated critical points, with applications to bifurcation theory.

He obtained new results on removable singularities for nonlinear elliptic equations, and others on nonexistence of solutions of some elliptic inequalities.

Another subject was the extension of Sobolev embedding theorems to Sobolev spaces with weights (the conditions on the weights are very sharp) and derivation of interpolation inequalities in such spaces.

Professor Skrypnik's untimely death is a great loss to all who knew him as well as to nonlinear analysis.

Louis Nirenberg

A-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ НА РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ДЕ РАМА

(Доповіді АН УРСР. – 1965. – № 1)

Нехай $\boldsymbol{M}$ – n-вимірний дійсний аналітичний компактний рімановий простір (без краю) і нехай на ньому задано аналітичні тензори $a_j^{i_1\dots i_q}$ $(q = 0, \dots, m)$, контраваріантні по верхніх індексах і коваріантні по нижньому. Розглядаємо оператори $\mathbf{A}^p$ $(p = 0, \dots, n-1)$, які переводять форми степеня p в форми степеня $p+1$ і задаються за формулою

$$(\mathbf{A}^p\alpha)_{k_1\dots k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} A_{k_\nu} \alpha_{k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_{p+1}}, \quad A_j = \sum_{q=0}^{m} a_j^{i_1\dots i_q} \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_q}.$$

Тут ∇_i – символ коваріантної похідної; індекси $k_1, \dots, k_{p+1}$ при $\mathbf{A}_\alpha^p$ вказують, що мова йде про коефіцієнти форми $\mathbf{A}_\alpha^p$ при $dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+1}}$ (аналогічно для α), а $k_1, \dots, \hat{k}_\nu, \dots, k_{p+1}$ одержуються із $k_1, \dots, k_{p+1}$ викресленням k_ν. У виразі A_j, як звичайно, мається на увазі сумування по індексах, які повторюються.

Визначаємо ще оператори $A^p = (\mathbf{A}^p)' \mathbf{A}^p + \mathbf{A}^{p-1}(\mathbf{A}^{p-1})'$, де $(\mathbf{A}^p)'$ метрично спряжений до $\mathbf{A}^p$ [1].

Припускаємо, що A° – еліптичний оператор і A_j – комутують.

Форму α називаємо $\mathbf{A}$-замкненою, якщо $\mathbf{A}_\alpha = 0$, β називаємо $\mathbf{A}$-гомологічною нулю, якщо існує форма γ така, що на $\boldsymbol{M}$ виконується $\mathbf{A}_\gamma = \beta$.

Нехай B^p – пучок ростків форм класу C^∞ степеня p і C^p – пучок ростків $\mathbf{A}$-замкнених форм класу C^∞ і степеня p [2]. Має місце така лема.

$\mathbf{A}$–лема Пуанкаре. Послідовність $0 \to C^p \to B^p \to C^{p+1} \to 0$ точна.

При доведенні використовуються ідеї [3].

За допомогою вказаної леми одержується така теорема.

Узагальнена теорема де Рама. Фактор-група групи $\mathbf{A}$-замкнених форм степеня p по підгрупі $\mathbf{A}$-гомологічних нулю форм степеня p ізоморфна $[H^p(\boldsymbol{M}, R)]^M$, де $H^p(\boldsymbol{M}, R)$ – p-вимірна група когомологій простору $\boldsymbol{M}$ з дійсними коефіцієнтами. M – число $\mathbf{A}$-замкнених форм нульового степеня.

Двоїсте твердження має місце для оператора $\mathbf{A}'$.

Теорема. *Фактор-група групи* $\mathbf{A}'$*-замкнених форм степеня* p *по підгрупі* $\mathbf{A}'$*-гомологічних нулю форм степеня* p *ізоморфна* $[H_p(\mathbf{M},R)]^M$*, де* $H_p(\mathbf{M},R)$ *–* p*-вимірна група гомологій* $\mathbf{M}$ *з дійсними коефіцієнтами.*

1. *Ж. де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, стор. 166.
2. *Чжэнь Шэн-шень,* Комплексные многообразия, ИЛ, 1961, стор. 56.
3. *Я. Б. Лопатинский,* УМЖ, **2**, 56 (1950).

A-ГАРМОНІЧНІ ФОРМИ НА КОМПАКТНОМУ РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

(Доповіді АН УРСР. – 1965. – № 2)

Зробимо ті ж припущення відносно простору $\boldsymbol{M}$, що і в [1]. Там же визначені оператори $\mathbf{A}^p, (\mathbf{A}^p)', A^p$, які ми будемо розглядати далі. Верхні індекси при цих операторах часто опускаються. Спочатку будуємо параметрикс для рівняння $A\varphi = 0$, після чого будуть застосовані методи інтегральних рівнянь. Виберемо деяке скінченне відкрите покриття $\{U_i\}$ простору $\boldsymbol{M}$ (таке, щоб U_i було гомеоморфне відкритій n-вимірній сфері R_i). Образ $x \in U_i$ в R_i при відповідному гомеоморфізмі позначаємо через x_i. Нехай $r_i(x)$ – віддаль x_i до границі R_i. Очевидно, що $\max r_i(x) \geq 2\rho > 0$. Позначаємо $g^i(y_i) = \det (g_{k,l}(y_i))$ і відповідну їй функцію в U_i через $g^i(y)$ ($g_{k,l}$ – компоненти метричного тензора).

Параметриксом називаємо таку подвійну форму:

$$\omega(x,y) = \frac{\sum\limits_i \varphi_i(x_i, y_i)\cdot\varphi(r_i(y))}{\sum\limits_i \varphi(r_i(y))\cdot\sqrt{g^i(y)}}\cdot\sigma(x,y)\cdot\alpha(x,y).$$

Тут $\varphi_i(x_i, y_i)$ – фундаментальний розв'язок рівняння $A^0 u = 0$, яке розглядається в R_i, побудований Я.Б. Лопатинським в [2]. $\varphi(x)$ – безмежно диференційовна функція на дійсній прямій, що дорівнює нулю при $x \leq \rho$ і одиниці при $x \geq 2\rho$. $\sigma(x,y), \alpha(x,y)$ мають той самий зміст, що і в [3]. При цьому $\omega(x,y)$ має порядок $O(r^{2m-n} lgr)$ при $2m \geq n$ і $O(r^{2m-n})$ при $2m < n$, а форма $q(x,y) = -A_x\omega(x,y)$ має порядок $O(r^{1-n})$ (r – геодезична віддаль між x і y).

Лема. *Має місце рівність*

$$A\int\limits_y \omega(x,y) < *\varphi(y) = \varphi(x) - \int\limits_y \varphi(x,y)\wedge *\,\varphi(y).$$

Форму h називаємо A-гармонічною, якщо $Ah = 0$.

Теорема 1. *Для того, щоб рівняння $A\varphi = \psi$ (φ, ψ – форми степеня p) мало на $\boldsymbol{M}$ розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ψ була ортогональна всім A-гармонічним формам степеня p.*

Теорема 2. *В просторі форм на $\boldsymbol{M}$ існують лінійні оператори H, G, які задовольняють співвідношення:*

$$\mathbf{A}H = H\mathbf{A} = 0,\quad \mathbf{A}'H = H\mathbf{A}' = 0,\quad H^2 = H,$$

$$\mathbf{A}G = G\mathbf{A},\quad \mathbf{A}'G = G\mathbf{A}',\quad GH = HG = 0,\quad AG = GA = 1 - H.$$

H і G метрично самоспряжені. Метричне ядро [3] $h(x,y)$ оператора H належить класу C^∞, метричне ядро $g(x,y)$ оператора G – класу C^∞ при $x \neq y$ і має при $x = y$ ту саму особливість, що і $\omega(x,y)$.

Наслідок 1. Будь-який потік на $\boldsymbol{M}$ можна представити і притому єдиним чином у вигляді суми потока, A-гомологічного нулю, потока A'-гомологічного нулю і A-гармонічної форми.

Визначення потока див. в [3, гл. 3]. Оператори на потоках визначаються природно.

Назвемо періодом A-замкненої форми α відносно будь-якого A'-замкненого потока T значення $(T,\alpha) = T[*\alpha]$.

Наслідок 2. (типу теореми Ходжа). На $\boldsymbol{M}$ існує A-гармонічна форма, яка має довільні наперед задані періоди відносно заданих A'-замкнених потоків, ніяка лінійна комбінація яких не A'-гомологічна нулю.

Теорема 3. *Векторний простір A-гармонічних форм степеня p ізоморфний* $[H^p(\boldsymbol{M}, R)]^M$.

1. *І.В. Скрипник,* ДАН УРСР, 18 (1965).
2. *Я. Б. Лопатинский,* ДАН СССР, **71**, 433 (1950).
3. *Ж. де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, стор. 189.

A-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

*(Украинский математический журнал. – 1965. – **17**, № 4)*

В работе строятся A-гармонические поля второго и третьего рода. Изучается поведение A-гармонического поля в окрестности изолированной особой точки. Дается обобщение теоремы Римана–Роха.

Изложение ведется для операторов $\mathbf{A}$ первого порядка. Однако при надлежащем видоизменении результаты пунктов 1–5 справедливы и для операторов $\mathbf{A}$ высшего порядка.

Соответствующие результаты для гармонических полей получил Кодаира [1].

1. Пусть $\boldsymbol{M}$ – действительное аналитическое ориентируемое риманово пространство размерности n (без границы), на котором заданы аналитические тензоры: a_i – ковариантный и a_i^j – смешанный. Рассматриваются операторы $\mathbf{A}^p$ $(p = 0, \dots, n-1)$, переводящие формы степени p в формы степени $p+1$ и задаваемые формулой:

$$(\mathbf{A}^p\alpha)_{k_1,\dots,k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} A_{k_\nu} \alpha_{k_1,\dots,\hat{k}_\nu,\dots,k_{p+1}}, \quad A_i = a_i^j \nabla_j + a_i, \tag{1}$$

∇_j – символ ковариантной производной; индексы $k_1, \dots, k_{p+1}$ при $\mathbf{A}^p\alpha$ указывают, что речь идет о коэффициентах формы $\mathbf{A}^p\alpha$ при $dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+1}}$ (аналогично для α), а $k_1, \dots, \hat{k}_\nu, \dots, k_{p+1}$ получается из $k_1, \dots, k_{p+1}$ вычеркиванием k_ν. Как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Определим еще $A^p = (\mathbf{A}^p)'\mathbf{A}^p + \mathbf{A}^{p-1}(\mathbf{A}^{p-1})'$, где $(\mathbf{A}^p)'$ метрически сопряжен к $\mathbf{A}^p$ (см. [3]).

В дальнейшем предполагается перестановочность A_j и эллиптичность A^0. Индексы при операторах $\mathbf{A}^p, (\mathbf{A}^p)', A^p$ будут часто опускаться.

2. Обозначим через $\mathbf{A}^{*p}$ оператор, получаемый по формуле (1) путем замены A_i на $A_i^* = -\nabla_j \cdot a_i^j + a_i$.

Лемма 1. *На $\boldsymbol{M}$ существует и притом единственная функция $\tilde{v}$, удовлетворяющая $\mathbf{A}^{*0}\tilde{v} = 0$.*

Пусть $\beta_n(u,\tilde{v}) = u \cdot \tilde{v}$, здесь u – форма степени n.

Лемма 2. *Существуют формы $\beta_p(u,\tilde{v})$ степени p $(0 \le p \le n-1)$, удовлетворяющие*

$$\beta_{p+1}(\mathbf{A}^p u,\tilde{v}) = d\beta_p(u,\tilde{v}) \tag{2}$$

и такие, что их коэффициенты являются билинейными формами относительно $\tilde{v}$ и коэффициентов u (u – форма степени p).

Меняя ролями операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ получим формы $\beta_p^*(\tilde{v}, v)$, обладающие аналогичными свойствами. $\tilde{u}$ – решение уравнения $\mathbf{A}^0 u = 0$.

В дальнейшем будут употребляться обозначения:

$$\{u, C\} = \int_C \beta_p(u, \tilde{v}), \quad [v, C] = \int_C \beta_p^*(\tilde{u}, *v).$$

3. A-гармоническими полями будем называть формы, удовлетворяющие соотношениям $\mathbf{A}u = 0,\ \mathbf{A}'u = 0$.

Под выражением «A-гармоническое поле φ имеет особенность θ» понимается следующее. Пусть заданы нигде не плотное компактное подмножество F многообразия $\boldsymbol{M}$, G – его окрестность, и A-гармоническое регулярное в $G-F$ поле Θ. Тогда φ имеет особенность Θ, если φ – регулярно в $\boldsymbol{M}-F$, и существует A-гармоническое в G поле W такое, что $\varphi = \Theta + W$ в $G-F$.

Для простоты будем рассматривать случай, когда F содержится в достаточно малой геодезической сфере S (с границей Γ), $S \subset G$. Тогда возможность построения поля с заданной особенностью Θ дается следующей теоремой существования.

Теорема 1. *Пусть степень Θ равна p. Тогда в случае $2 \le p \le n-2$ существует A-гармоническое поле φ с особенностью Θ. В случае $p=1$ или $p=n-1$ для этого достаточно соответственно*

$$[\Theta, \Gamma] = 0, \quad \{\Theta, \Gamma\} = 0. \tag{3}$$

Далее φ можно выбрать так, чтобы

$$\|\varphi\|_{\boldsymbol{M}-G} < +\infty, \tag{4}$$

$$\int_{\boldsymbol{M}} \varphi \wedge *\zeta \equiv (\varphi, \zeta) = 0 \tag{5}$$

для произвольной формы ζ, равной нулю в G и удовлетворяющей $\mathbf{A}\zeta = 0$.

4. В этом пункте определяются A-гармонические поля второго и третьего рода. Используя построенное Я.Б. Лопатинским фундаментальное решение [2], устанавливается существование двойной формы $\omega(x, \xi)$, удовлетворяющей $A_x \omega(x, \xi) = 0$ и такой, что для достаточно малой области $G \subset \boldsymbol{M}$ и для произвольной достаточно гладкой формы η с носителем в G имеет место

$$\eta(\xi) = (\mathbf{A}\eta, \mathbf{A}\omega(\cdot, \xi)) + (\mathbf{A}'\eta, \mathbf{A}'\omega(\cdot, \xi)).$$

Форма $\omega(x, \xi)$ определяется в окрестности диагонали произведения $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ и имеет порядок $O(r^{2-n})$ при $n > 2$ и $O(\lg r)$ при $n = 2$; r – геодезическое расстояние.

Пусть $C = C^p$ – цепь, содержащаяся в достаточно малой геодезической сфере S. Определим $u^{p-1}(x) = \{\omega(x), \Delta C\}$. Можно выбрать в $G \supset S$ регулярное поле f так, чтобы поле

$\Theta = f + \mathbf{A}u^{p-1}$ было A-гармоническим. Применением теоремы 1 доказывается существование A-гармонического поля на $\boldsymbol{M}$ с особенностью Θ. При помощи разбиения произвольной конечной цепи C на «малые» части устанавливается

Теорема 2. *Для каждой конечной цепи* $C = C^p$ $(1 \le p \le n-1)$ *в* $\boldsymbol{M}$ *существует одно и только одно поле* $e[C]$ *степени* p*, удовлетворяющее условиям* (3), (4) *и*

$$(e[C], \zeta) = \{\zeta, C\}, \quad \mathbf{A}\zeta = 0 \tag{6}$$

$$(e[C], \mathbf{A}'\varphi) = 0, \tag{7}$$

$$\| e[C] \|_{1,G} < +\infty. \tag{8}$$

Поле $e[C]$ регулярное A-гармоническое в $\boldsymbol{M} - \overline{\Delta C}$ и имеет особенность в каждой точке $\overline{\Delta C}$.

Пусть $\widetilde{e}[C]$ – аналогично получаемое поле для $\mathbf{A}^*$. Определим $e^*[C] = *\widetilde{e}[C]$. Если $\Delta C \ne 0$, $e[C]$ и $e^*[C]$ будем называть A-гармоническими полями третьего рода.

Пусть $u(x,\xi) = \mathbf{A}_\xi\, \omega(x,\xi)$.

Посредством предельного перехода из только что рассмотренного случая получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Для произвольного* ξ *и произвольных* $k_1, \dots, k_p$ *существует одно и только одно* A*-гармоническое поле* $e_{k_1 \dots k_p}(x,\xi)$*, регулярное в* $\boldsymbol{M} - \xi$*, удовлетворяющее* (3), (4) *и такое, что в* $G - \xi$

$$e_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi) - (\mathbf{A}u)_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi) = f_{k_1,\dots,k_p}(x); \tag{9}$$

$f_{k_1 \dots k_p}(x)$ *– голоморфное в некоторой окрестности* G *точки* ξ *поле.*

Пусть $\widetilde{e}_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi)$ – аналогично получаемое для оператора $\mathbf{A}^*$ поле.

Определяем $e^*_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi) = * \,\widetilde{e}_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi)$.

Пару $P^r = (\sigma, \xi)$, состоящую из тензора $\sigma = \sigma^{\lambda_1, \dots, \lambda_r; q_1, \dots, q_{s-1}}$ и точки ξ в $\boldsymbol{M}$ называем r-полюсом порядка s, причем σ предполагается кососимметрическим по греческим индексам.

Для произвольной формы φ степени r определяем

$$(\varphi, P^r) = \frac{1}{r!(s-1)!} \sigma^{\lambda_1, \dots, \lambda_r; q_1, \dots, q_{s-1}} \nabla_{q_1} \cdots \nabla_{q_{s-1}} \varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(\xi).$$

A-гармоническими полями второго рода называем $e[P](x) = (e(x,\cdot), P)$ и

$$e^*[P](x) = (e^*(x,\cdot), P).$$

5. В этом пункте изучается поведение A-гармонического поля в окрестности изолированной особой точки конечного порядка. Говорим, что регулярное при $x \ne x_0$ A-

гармоническое поле $\varphi(x,x_0)$ имеет в точке x_0 особую точку конечного порядка, если $\varphi(x,x_0)=O(r(x,x_0)^{-n-l+1})$. Наименьшее целое неотрицательное l, для которого имеет место написанное соотношение, называем порядком особенности в точке x_0.

Теорема 4. *Пусть* $\Theta(x,x_0)$ A*-гармоническое поле степени* p *и* x_0 *его изолированная особая точка порядка* l. *В случае* $p=1$ *или* $p=n-1$ *соответственно предполагаем выполнение* (3) *(где под* Γ *надо понимать поверхность достаточно малой геодезической сферы с центром в* x_0*). Тогда в окрестности точки* x_0, Θ *представляется в виде*

$$\Theta=\sum_{m=1}^{l} e[P_m]+\Theta_0;$$

Θ *– регулярное* A*-гармоническое поле,* P_m *–* p*-полюс порядка* m.

Если $p=n-1$ и (3) не выполнено, то поле

$$\Theta_1=\Theta-(-1)^n\{\Theta,\Gamma\}e^*[C]$$

будет уже удовлетворять (3) и теорема 4 применима.

Здесь $C-1$-цепь такая, что $\Delta C=x_0-y_0$, y_0 – точка в окрестности x_0. Аналогично для $p=1$.

6. Теорема 5. *Для произвольного конечного цикла* Z

$$\{e^*[C],Z\}=I(Z,C). \tag{10}$$

Здесь $I(Z,C)$ – индекс пересечения.

С помощью этой теоремы устанавливается следующая теорема, которую следует рассматривать как обобщение теоремы Римана–Роха. Предполагаем сейчас, что многообразие ***M*** компактно.

Теорема 6. *Пусть на* ***M*** p*-полюсы* $P_1,\dots,P_r$, $Q_1,\dots,Q_s$, p*-цепи* $C_1,\dots,C_t$ *и* $n-p$*-цепи* $C_1^*,\dots,C_u^*$ *заданы так, что* $e[Q_1],\dots,e[Q_s]$, $e[P_1],\dots,e[P_r]$, $e[C_1],\dots,e[C_t]$, $e^*[C_1^*],\dots,$ $e^*[C_u^*]$ *линейно независимы по модулю* H^p *(*H^p *– пространство* A*-гармонических форм степени* p*). Числа* M,N,b *определяются следующим образом.* M *– число линейно независимых* A*-гармонических полей* e, *удовлетворяющих:* $e\equiv 0 \bmod (H^p,e[P_1],\dots,e[P_r]), \{e,Z^p\}=0$ *для всех* p*-мерных циклов* Z^p *пространства* ***M***, $[e,Z^{n-p}]=0$ *для всех* $n-p$*-мерных циклов* Z^{n-p} *пространства* ***M***,

$$\{e,C_k\}=0\ (k=1,\dots,t),\ [e,C_i^*]=0\ \ (i=1,\dots,u),\ [e,Q_j]=0\ \ (j=1,\dots,s);$$

N *– число линейно независимых* A*-гармонических полей* e', *удовлетворяющих:*

$$(e',P_j)=0\quad (j=1,\dots,r),$$

$$e'\equiv 0\ \ \mathrm{mod}(H^p,\ e[Q_1],\dots,e[Q_s],\ \ e[C_1],\dots,e[C_t],\ \ e^*[C_1^*],\dots,e^*[C_u^*]);$$

b – p-мерное число Бетти многообразия $\boldsymbol{M}$.

Тогда

$$M = N - b + r - s - t - u.$$

1. *K. Kodaira,* Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), Annals of Math., 50, 1949, 587–665.
2. *Я. Б. Лопатинский,* Функциональная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, ДАН СССР, т. 71, № 3, 1950, 433–436.
3. *Ж. де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

ПЕРИОДЫ А-ЗАМКНУТЫХ ФОРМ

*(Доклады Академии наук СССР. – 1965. – **160**, № 4)*

В работе вводится понятие периодов $\mathbf{A}$-замкнутых форм относительно циклов многообразия. Устанавливаются в терминах периодов результаты, обобщающие известные теоремы де Рама и Ходжа (см. [3]–[6]). Понятие периода имеет важное значение в ряде вопросов, связанных с A-гармоническими полями и формами, в частности, при рассмотрении A-гармонических полей с особенностями.

1. Пусть $\boldsymbol{M}$ – вещественное аналитическое компактное риманово пространство размерности n (без границы), на котором заданы аналитические тензоры $a_j^{i_1,\dots,i_q}$ $(q=0,\dots,m)$, контравариантные по верхним индексам и ковариантные по нижнему. Определяем операторы $\mathbf{A}^p$ $(p=0,\dots,n-1)$, переводящие формы степени p в формы степени $p+1$ по формуле

$$(\mathbf{A}^p\alpha)_{k_1,\dots,k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} A_{k_\nu}\alpha_{k_1,\dots,\hat{k}_\nu,\dots,k_{p+1}}; \quad A_j = \sum_{q=0}^{m} a_j^{i_1,\dots,i_q}\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_q}.$$

Здесь ∇_i – символ ковариантной производной. Индексы при формах $\alpha, \mathbf{A}^p_\alpha$ указывают, что речь идет о соответствующих компонентах форм; $k_1,\dots,\hat{k}_\nu,\dots,k_{p+1}$ получается из $k_1,\dots,k_{p+1}$ вычеркиванием k_ν. В A_j ведется суммирование по повторяющимся индексам. Определяем еще $A^p = (\mathbf{A}^p)'\mathbf{A}^p + \mathbf{A}^{p-1}(\mathbf{A}^{p-1})'$, где $(\mathbf{A}^p)'$ метрически сопряжен к $\mathbf{A}^p$ (см. [4]).

Предполагается, что A^0 – эллиптический оператор и A_j перестановочны.

Форму α называем $\mathbf{A}$-замкнутой, если $\mathbf{A}\alpha=0$; β называем $\mathbf{A}$-гомологичной нулю, если существует на $\boldsymbol{M}$ такая форма γ, что $\mathbf{A}\gamma=\beta$. Форму φ называем A-гармонической, если $A\varphi=0$; ψ называем A-гармоническим полем, если $\mathbf{A}\psi=0, \mathbf{A}'\psi=0$.

Имеет место следующая обобщенная теорема де Рама.

Теорема 1. *Фактор-группа $\mathsf{H}^p_{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ группы $\mathbf{A}$-замкнутых форм степени p по подгруппе $\mathbf{A}$-гомологичных нулю форм степени p изоморфна $[H^p(\boldsymbol{M},R)]^M$, где $H^p(\boldsymbol{M},R)$ – p-мерная группа когомологий пространства $\boldsymbol{M}$ с вещественными коэффициентами. M – число линейно независимых $\mathbf{A}$-замкнутых форм нулевой степени.*

2. Здесь будут введены основные для дальнейшего формы $\beta_p(u,\tilde{v}_j)$ и сформулировано предположение относительно них.

Пусть $\mathbf{A}^{*p} = *(\mathbf{A}^{n-p})'*^{-1}$ (относительно оператора $*$ см. [4]). На $\boldsymbol{M}$ существует M линейно независимых решений уравнения $\mathbf{A}^{*0}v=0$, также для уравнения $\mathbf{A}^0 u=0$. Обозначим эти решения соответственно через $\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_M$; $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_M$.

Лемма 1. *Существуют формы* $\beta_p(u,\tilde{v}_j)$ $(1\le j\le M)$ *степени* p $(0\le p\le n)$ *такие, что для всех* u *степени* p *имеют место соотношения*

$$\beta_n(u,\tilde{v}_j)=u\cdot\tilde{v}_j;\ \ \beta_{p+1}(\mathbf{A}^p u,\tilde{v}_j)=d\beta_p(u,\tilde{v}_j)\ \ (p<n).$$

При этом коэффициенты $\beta_p(\tilde{u},v_j)$ *являются билинейными дифференциальными выражениями относительно* $u,\tilde{v}_j$ *(*d *– внешний дифференциал).*

Пусть $S_{\varepsilon_1\varepsilon_2}:\varepsilon_1<r_{P,Q}<\varepsilon_2$ – геодезическое кольцо с центром в произвольной точке $P\in\boldsymbol{M}$. В силу теоремы 1 группа $\mathbf{H}^{n-1}_{\mathbf{A}}(S_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ имеет M образующих $\hat{u}_1,\dots,\hat{u}_M$. Будем предполагать, что

$$\det\|B_{ij}\|\ne 0,\ \ (\beta_{i,j})_{j=1}^{M}\ne(0,\dots,0),$$

где $B_{i,j}$ задаются формулой $\int\limits_{r_{P,Q}=\varepsilon}\beta_{n-1}(\hat{u}_i,\tilde{v}_j)$ $(\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2)$ и не зависят от ε, а $\beta_{i,j}$ – числа на $\boldsymbol{M}$, равные $\beta_0(\tilde{u}_i,\tilde{v}_j)$.

3. Пусть K – некоторое симплициальное разбиение (см. [3]) многообразия $\boldsymbol{M}$. Введем отображение B_i множества всех форм степени p на $\boldsymbol{M}$ в множестве цепей комплекса K:

$$B_i(\varphi^p)=\sum_{C^p}\{\varphi^p,C^p\}_i\,C^p;\ \ \{\varphi^p,C^p\}_j\equiv\int\limits_{C^p}\beta_p(\varphi^p,\tilde{v}_j).$$

Следующая теорема имеет основное значение:

Теорема 2. *Оператор* $B\varphi\equiv(B_i\varphi)_{i=1}^{M}$ *устанавливает сформулированный в теореме* 1 *изоморфизм.*

Теперь можно ввести

Определение. Периодами $\mathbf{A}$-замкнутой формы φ относительно цикла Z многообразия $\boldsymbol{M}$ называем числа $\{\varphi,Z\}_i,\ 1\le i\le M$.

4. Опираясь на результаты пункта 3, устанавливаются теоремы:

Теорема 3. $\mathbf{A}$*-замкнутая форма с нулевыми периодами относительно всех циклов многообразия* $\mathbf{A}$*-гомологична нулю.*

Пусть Z_j^p $(j=1,\dots,s)$ – p-мерные циклы, никакая линейная комбинация которых не гомологична нулю. Тогда:

Теорема 4. *Существует* $\mathbf{A}$*-замкнутая форма, имеющая произвольные наперед заданные периоды относительно циклов* Z_j^p.

Теорема 5. *Существует* A*-гармоническая форма, имеющая произвольные наперед заданные периоды относительно циклов* Z_j^p*. Последняя однозначно определяется, если* s *равняется* p*-мерному числу Бетти.*

В случае оператора $\mathbf{A}$, совпадающего с оператором внешнего дифференцирования, теоремы 3 и 4 получены де Рамом [5], а теорема 5 известна как теорема Ходжа [4], [6].

5. В заключение укажем аналоги теоремы 3 и 4 для случая дифференциальных форм с фиксированным носителем. Эти результаты нужны при рассмотрении A-гармонических полей и форм на многообразии с краем (ср. [1], [2]).

Носитель формы φ обозначим через $\underline{\varphi}$. Пусть $\boldsymbol{N}$ – n-мерное подпространство $\boldsymbol{M}$ с границей $\boldsymbol{B}$ и R_i^p – базис относительных p-мерных циклов $\boldsymbol{N} (\operatorname{mod} \boldsymbol{B})$. Относительными периодами формы φ $(\underline{\varphi} \subseteq \boldsymbol{N})$ называем $\{\varphi, R_i^p\}_j$.

Теорема $3'$**.** $\mathbf{A}$*-замкнутая форма* φ $(\underline{\varphi} \subseteq \boldsymbol{N})$ *с нулевыми относительными периодами представима в виде* $\varphi = \mathbf{A}\psi$ $(\underline{\psi} \subseteq \boldsymbol{N})$.

Теорема $4'$**.** Существует $\mathbf{A}$*-замкнутая форма* θ $(\underline{\theta} \subseteq \boldsymbol{N})$*, имеющая произвольные наперед заданные относительные периоды.*

1. *G. F. D. Duff,* Ann. Math., **56**, 1, 115 (1952).
2. *G. F. D. Duff,* Spencer, Ann. Math., **56**, 1, 128 (1952).
3. *K. Kodaira,* Ann. Math., **50**, 3, 587 (1949).
4. *Ж. Де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956.
5. *G. de Rham,* J. math. pures et appl., **10**, 115 (1931).
6. *W .V. D. Hodge,* Proc. London Math. Soc., **41**, 483 (1936).

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

(*Доклады Академии наук СССР. – 1972. –* ***203****, № 1*)

Исследование разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка впервые было проведено в работах М.И.Вишика [1] и продолжено затем в работах Ф.Браудера, Ж.Лере, Ж.Лионса, Ю.А.Дубинского и др. (см., например, обзор [2]). При определенных предположениях доказано существование слабых решений для квазилинейных уравнений дивергентного вида.

О гладкости полученных обобщенных решений известно мало. Морри [3] доказал, что решение является гладким вне локально компактного множества меры нуль. При ряде существенных ограничений плоский случай рассмотрел Нечас [4] (помимо естественных условий предполагается включение оператора в некоторое параметрическое семейство, условие дефинитности его вариации и др.).

Известны примеры [5 – 7] регулярных вариационных задач, обобщенные решения которых не являются классическими, и показывающие, что уравнения высших порядков существенно отличаются по свойствам решений от уравнений второго порядка. В связи с этим возникает ряд вопросов для уравнений высшего порядка: определить минимальную гладкость обобщенного решения, обеспечивающую его классичность, выделить классы уравнений с регулярными решениями и др. Эти вопросы рассматриваются в настоящей работе.

1. Здесь строятся аналогичные указанным в [5–7] примеры регулярных вариационных задач с негладкими обобщенными решениями. Эти примеры показывают, что полученные ниже результаты являются точными.

Пусть $n > 2$, λ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $1 < \lambda < 2 - {}^1\!/_2\, n$, $\varphi(t)$ – функция класса C^∞ на R^1 такая, что $\varphi(t) \equiv 1$ при $t > |\lambda|$, $\varphi(t) \equiv {}^1\!/_2 |\lambda|$ при $t < {}^1\!/_2 |\lambda|$.

Тогда функция $u(x) = |x|^\lambda$ является обобщенным решением в шаре $B = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$ уравнения Эйлера функционала

$$J(u) = \int_B \left\{ \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi^{-2}(|\nabla u|) + \sigma_1 \delta_{ij} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \sigma_2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\} dx,$$

где

$$\sigma_2 = \frac{[(n+\lambda-2)\sigma_1+\lambda-1]\cdot[n+\lambda-3+\sigma_1(\lambda-2)]}{(2-\lambda)(n+\lambda-2)}.$$

Выбирая σ_1 так, чтобы σ_2 было положительным, добьемся эллиптичности уравнения Эйлера функционала $J(u)$.

Сделаем несколько замечаний.

1) При λ, близком к единице, получаем пример негладкого решения регулярной вариационной задачи в случае $n \ge 3$.

2) При λ, близком к единице, произвольном q, $1<q<2$, и достаточно большом n, получаем пример решения регулярной задачи, принадлежащего $B_q^{2+1/2n}$, но не являющегося регулярным. Определение пространств B_p^r см., например, в [8].

3). При λ, близком к нулю и отрицательном, имеем пример неограниченного решения при $n \ge 5$.

2. Сейчас будут указаны условия регулярности обобщенного решения у

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha A_\alpha(x,u,\ldots,D^m u)=0. \tag{1}$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, α_i целые, $D^\alpha u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u$, $D^j u=\{D^\alpha u:\ |\alpha|=j\}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in$ $\in\Omega\subset R^n$.

Еще С.Н.Бернштейном (при $m=1$) были выяснены условия, которые следует считать естественными при изучении регулярности решений. Это условие эллиптичности, которое для уравнения (1) будем писать в виде

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_{\alpha\beta}(x,\xi)\,\eta_\alpha\eta_\beta \ge C_1(1+|\xi|)^{p-2}\sum_{|\alpha|=m}\eta_\alpha^2, \quad C_1>0; \tag{2}$$

Здесь $A_{\alpha\beta}(x,\xi)=\partial A_\alpha(x,\xi)/\partial\xi_\beta$, $p\ge 2$, $\xi=\{\xi_\alpha:\ |\alpha|\le m\}\in R^M$. Естественными являются гладкость $A_\alpha(x,\xi)$ и оценки на рост функций $A_\alpha(x,\xi)$ и их производных. Предполагаем, что функции A_α дифференцируемы по своим аргументам $[\tfrac12 n]+1$ раз и имеют место оценки с положительной постоянной C_2 при $x\in\overline{\Omega}$ и $\xi\in R^M$, $|\alpha|\le m$, $|\beta|+|\gamma|\le[\tfrac12 n]+1$:

$$\left|D_x^\beta D_\xi^\gamma A_\alpha(x,\xi)\right|(1+|\xi^\gamma|)\le C_2(1+|\xi|)^{p-1}, \tag{3}$$

где $\gamma=\{\gamma_\alpha:\ |\alpha|\le m\}$, $D_\xi^\gamma=\prod_{|\alpha|\le m}(\partial/\partial\xi_\alpha)^{\gamma_\alpha}$, $\xi^\gamma=\prod_{|\alpha|\le m}\xi_\alpha^{\gamma_\alpha}$.

Функция $u\in W_p^m(\Omega)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для произвольной $v\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x,u,\ldots,D^m u)\,D^\alpha v\,dx=0.$$

Пусть Ω' – произвольная строго внутренняя подобласть области Ω, $\xi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и при $x \in \Omega'$ $\xi(x) \equiv 1$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* (2), (3) *и* $u(x)$ – *такое обобщенное решение уравнения* (1), *что при* $|\alpha| = |\beta| = m$

$$\left(1 + |D^\alpha u|\right)^{p-2} D^\beta u \cdot \xi \in B_2^{n/2}(\Omega). \tag{4}$$

Тогда $u(x) \in C^m(\Omega')$.

Дальнейшее повышение гладкости $u(x)$ следует из результатов [9]. Отметим, что, как показывает замечание 2), в условии (4) нельзя заменить $B_2^{\frac{1}{2}n}$ на $B_q^{\frac{1}{2}n}$ при $q < 2$.

3. Установим сейчас регулярность обобщенных решений в плоском случае ($n = 2$) при выполнении только естественных условий.

Теорема 2. *Пусть* $n = 2$, *выполнены условия* (2), (3) *предыдущего пункта и* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ – *обобщенное решение уравнения* (1).

Тогда $u(x) \in C^m(\Omega')$ *для произвольной строго внутренней подобласти* Ω' *области* Ω.

Регулярность решения вблизи границы дает

Теорема 3. *Пусть* $n = 2$, $\partial\Omega \in C^{m,\delta}$, $\delta > 0$, *выполнены условия* (2), (3) *и п.*2 *и при* x, *принадлежащем некоторой окрестности* $\partial\Omega$,

$$A_{\alpha\beta}(x,\xi) = A_{\beta\alpha}(x,\xi), \quad |\alpha| = |\beta| = m.$$

Тогда всякое обобщенное решение $u(x)$ *уравнения* (1) *принадлежит* $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ *с некоторым* $\lambda > 0$.

4. Рассмотрим теперь вопрос о регулярности обобщенных решений уравнения

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left\{ a_{\alpha\beta}(x,u,\ldots,D^k u)\, D^\beta u \right\} = 0 \tag{5}$$

при $k < m$. Предполагаем, что $\partial\Omega \in C^m$, $a_{\alpha\beta}(x,\xi')$ – непрерывные функции $(x,\xi') \in \overline{\Omega} \times R^N$, $\xi' = \{\xi_\alpha : |\alpha| \le k\} \in R^N$ и имеют место оценки с положительными k_1, k_2:

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x,\xi')\, \eta_\alpha \eta_\beta \ge k_1 \sum_{|\alpha|=m} \eta_\alpha^2, \tag{6}$$

$$|a_{\alpha\beta}(x,\xi')| \le k_2, \quad |\alpha|,|\beta| \le m. \tag{7}$$

Регулярность решений уравнения (5) дает

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (6), (7) *и* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ – *обобщенное решение уравнения (5).*

Тогда при $n = 2(m-k)$ $u(x) \in C^m(\overline{\Omega})$.

Замечание 1) п.1 показывает, что при $n < 2(m-k)$ утверждение теоремы не имеет места.

5. Укажем в заключение условия непрерывности обобщенного решения. Рассматриваем решение уравнения (1), предполагая выполненными неравенства с $C_1,\, C_2 > 0$:

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x,\xi)\,\xi_\alpha \ge C_1 \sum_{|\alpha|=m} |\,\xi_\alpha\,|^p - C_2\,, \tag{8}$$

$$\left|A_\alpha(x,\xi)\right| \le C_2(1+|\,\xi\,|)^{p-1}, \quad |\,\alpha\,| \le m\,. \tag{9}$$

Предполагается, что гладкость $\partial\Omega$ обеспечивает применение теорем вложения для $W_p^m(\Omega)$.

Теорема 5. *Если функции* $A_\alpha(x,\xi)$ *измеримы и удовлетворяют неравенствам* (8), (9), $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ *– обобщенное решение уравнения* (1) *и* $n = mp$, *то* $u \in C(\overline{\Omega})$.

Замечание 3) п.1 показывает, что утверждение теоремы не имеет места при $n > mp$.

Отметим, что ограниченность $u(x)$ в условиях теоремы 5 доказана в [10]. При $mp > n$ утверждение теоремы 5 следует из теорем вложения.

[1]*М.И. Вишик.* Тр. Московок. матем. общ., **12**, 125 (1963). [2]*Ю.А. Дубинський,* УМН, **23**, № 1, 45 (1968). [3]*Ч.Б. Морр,* Сборн. пер. Математика, **13**, 3, 50 (1959). [4]*I. Nečas,* Comm. Math. Univ. Carol, **9**, 3, 365 (1968). [5]*E. De Ciorg,* Boll. Un. Matem. Ital., Ser. 4, № 1, 135 (1968). [6]*E. Giusti, M. Mirand,.* Boll. Un. Matem. Ital., Ser. 4, № 2, 219 (1968). [7]*В.Г. Мазь,* Функ. Анализ, **2**, в. 3, 53 (1968). [8]*С.М. Никольский,* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. [9]*С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг,* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., 1962. [10]*I. Frehs,.* Boll. Unione Mat. Haliana, **3**, № 4, 607 (1970).

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

(*Математическая физика. – 1972. –* ***11***)

Проблема регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений является одной из основных в современной теории дифференциальных уравнений. Полное решение проблемы получено для случая уравнений второго порядка в конце пятидесятых

годов XX ст. усилиями ряда крупных математиков (см., например, [1]). Уравнения высшего порядка и системы существенно отличаются по свойствам решений от уравнений второго порядка. Это показали недавно построенные примеры В.Г.Мазья [2], Де Джорджи [3], Э.Джусти, М.Миранды [4]. В настоящее время известны только результаты, полученные для уравнений высшего порядка и систем Морри [5] и Нечасом [10]. Морри в общих предположениях доказана непрерывность некоторых производных в области с выкинутым локально компактным подмножеством меры нуль. И.Нечас доказал регулярность решений квазилинейных уравнений на плоскости при ряде существенных ограничений. Предполагается, что уравнение можно включить в параметрическое семейство специального вида. Делаются существенные ограничения на коэффициенты, обеспечивающие, например, единственность решения.

В настоящей статье устанавливается регулярность решений уравнений внутри области при естественных условиях. После работ С.Н.Бернштейна естественными считаются условие эллиптичности и оценки на поведение коэффициентов и их производных.

Отметим, что сделанные предположения могут быть ослаблены. Можно не требовать существование вторых производных от решений, а предполагать только принадлежность их к классу $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$. Можно ослабить предположения на рост коэффициентов. Получены подобные результаты и для некоторых неравномерно эллиптических уравнений.

Предлагаемый метод позволил ответить на вопрос об априорной минимальной гладкости решения, позволяющей судить о его регулярности, в случае многомерных областей.

§ 1. Ограниченность производных порядка m

Пусть $u \in W_{2p}^{m}(\Omega), \quad \dim \Omega = 2$, – обобщенное решение уравнения

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left\{A_{\alpha}(x,Du)\right\}=0\,, \tag{1}$$

т.е. для произвольной функции $v\in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{2p}(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|\le m}A_{\alpha}(x,Du)\,D^{\alpha}v\,dx=0\,. \tag{2}$$

Здесь пользуемся обычными мультииндексными обозначениями $Du=\left\{D^{\alpha}u:|\alpha|\le m\right\}$. Относительно гладкости области Ω никаких предположений не делается.

Предполагается, что для функций $A_{\alpha}(x,\xi)$ существуют все производные, участвующие ниже в неравенствах (3), и что имеют место оценки при $x\in\Omega,\ \ \xi=\left\{\xi_{\alpha}:|\alpha|\le m\right\}\in R^{M}\,,\ \ m\ge 2,\ \ 2p>1$:

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}A_{\alpha\beta}(x,\xi)\,\eta_{\alpha}\eta_{\beta}\ge \nu_{0}(1+|\,\xi\,|)^{2p-2}\sum_{|\alpha|=m}\eta_{\alpha}^{2}\,,$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le m}\left|A_{\alpha\beta\gamma}(x,\xi)\right|(1+|\,\xi\,|)^{2}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}|\,A_{\alpha\beta i}(x,\xi)\,|(1+|\,\xi\,|)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{|\alpha|\le m}|\,A_{\alpha ij}(x,\xi)\,|\le \mu_{0}(1+|\,\xi\,|)^{2p-1}, \tag{3}$$

$$A_{\alpha\beta}(x,\xi)=\frac{\partial A_{\alpha}(x,\xi)}{\partial\xi_{\beta}},\qquad A_{\alpha i}(x,\xi)=\frac{\partial A_{\alpha}(x,\xi)}{\partial x_{i}},$$

$$A_{\alpha\beta\gamma}(x,\xi)=\frac{\partial^{2}A_{\alpha}(x,\xi)}{\partial\xi_{\gamma}\partial\xi_{\beta}}\quad \text{и т.д.}$$

Здесь ν_{0},μ_{0} – положительные постоянные.

Пусть x_0 – произвольная точка Ω, расстояние которой до границы области Ω обозначим через d', и пусть $d=\min\left\{\dfrac{d'}{m+2},\,1\right\}$. Подставим в (2)

$$v=\Delta^{\beta}(-h)\left\{\left[V_{p,0}(x)\right]^{r}\Delta^{\beta}(h)\,u\,\xi^{s}(x)\right\},\quad V_{p,\alpha}(x)=1+\left(\frac{\Delta^{p}D^{\alpha}u(x)}{h^{m-|\alpha|}}\right)^{2}, \tag{4}$$

где r,s – положительные числа, значение которых будет указано ниже, $\xi(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$ и носитель ξ содержится в $B_{d_1}(x_0)$ – шаре радиуса d_1 с центром в $x_0, d_1\le 2d$. Предположим, что для производных ξ выполнена оценка $|D^{\alpha}\xi|\le\left(\frac{K}{d}\right)^{|\alpha|}$ при $|\alpha|\le m$. Здесь $\Delta^{\beta}(h)$ – конечноразностный оператор. Пусть $e_i=(0,...,0,1,0,...,0)$, где 1 стоит на i-м месте, k-я разность функции f в точке x в направлении e_i с шагом h определяется формулой

$$\Delta_i^k(h)\,f(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+k}C_k^l\ \ f(x+lhe_i)\,.$$

Для произвольного мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\alpha_i\ge 0$, целые определяем по формуле $\Delta^{\alpha}(h)\,f(x)=\Delta_l^{\alpha_1}(h)...\Delta_n^{\alpha_n}(h)\,f(x)$.

Произведя элементарные преобразования, получаем

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int_{\Omega}\Delta^{\beta}(h)\,A_{\alpha}(x,Du)\,D^{\alpha}\left\{\left[V_{p,0}(x)\right]^{r}\Delta^{\beta}(h)\,u\xi^{s}(x)\right\}dx=0. \tag{5}$$

Укажем преобразование каждого из множителей, стоящих под знаком интеграла. Пусть $\beta=e_i+\beta'$. Тогда

$$\Delta_i^1(h)\,A_{\alpha}(x,Du)=\int_0^1\frac{d}{dt}A_{\alpha}(x+hte_i\,,Du+t\Delta_i^1(h)\,Du)\,dt=$$

$$=\int_0^1\left\{\sum_{|\gamma|\le m}A_{\alpha,\gamma}\Delta_i^1(h)\,D^{\gamma}u+A_{\alpha,i}h\right\}dt. \tag{6}$$

Далее пользуемся легко проверяемым соотношением

$$\Delta^{\alpha}(h)\,(fg)=\sum_{\substack{\mu\le\alpha-\beta\\ \nu\le\beta}}C_{\mu,\nu}^{\alpha,\beta}\Delta^{\beta}f(x+\mu h)\,\Delta^{\alpha-\beta}g(x+\nu h), \tag{7}$$

где $C_{\mu,\nu}^{\alpha,\beta}$ – положительны при всех значениях индексов, и преобразуем $\Delta A_{\alpha\beta}$, $\Delta A_{\alpha i}$ подобно (6):

$$\Delta^{\beta}(h)\,A_{\alpha}(x,Du)=R_1+$$

$$+\int_0^1\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ \mu\le\beta'}}C_{\mu,\beta'}A_{\alpha\gamma}(x+the_i+\mu h,\quad(1+t\Delta_i^1(h)Du(x+\mu h))\,dt\,\Delta^{\beta}(h)\,D^{\gamma}u, \tag{8}$$

где

$$|R_1|\le C\left\{\left(1+\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ \mu\le\beta}}|D^{\gamma}u(x+\mu h)|\right)^{2p-1}h^2+\right.$$

$$\left.+\left(1+\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ \mu\le\beta}}|D^{\gamma}u(x+\mu h)|\right)^{2p-3}\sum_{\substack{|\delta|\le m\\ \nu\le\beta'}}\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i^1D^{\delta}u(x+\nu h)|^2\right\}. \tag{9}$$

Буквой C в дальнейшем обозначаются постоянные, зависящие только от $m,p,\nu_0,\mu_0,\|u\|_{C^{m-1}(B_{2d}(x_0))}$. Укажем теперь значение второго множителя подынтегрального выражения в (5):

$$D^{\alpha}\left\{\left[V_{p,0}(x)\right]^{r}\Delta^{\beta}(h)\,u\xi^{s}(x)\right\}=$$

$$=\frac{2r}{h^{2m}}\left[V_{0,0}(x)\right]^{r-1}D^{\alpha}\Delta^{p}(h)\,u\,\Delta^{p}(h)\,u\Delta^{\beta}(h\,u\xi^{s}(x)+$$

$$+\left[V_{p,0}(x)\right]^{r}D^{\alpha}\Delta^{p}(h)u\xi^{s}(x)+R_2, \tag{10}$$

где для R_2 имеет место оценка

$$|R_2|\le C\left[\frac{(r+s)K}{d}\right]^{m}\left\{\sum_{|\gamma|<m}\left[V_{p,0}(x)\right]^{r}|D^{\gamma}\Delta^{\beta}(h)\,u\,|\xi^{s-m}(x)+\right. \tag{11}$$

$$+\sum_{|\delta|=m}\sum_{|\beta|,|\gamma|\le m}\left[V_{p,0}(x)\right]^{r-m}\left[V_{p,\beta}(x)\right]^{m-\frac{1}{2}}\left|\frac{\Delta^{\delta}D^{\gamma}u}{h^{m-|\gamma|}}\right|^{2}\xi^{s-m}(x)\Bigg\}.$$

Теперь, подставляя (8), (10) в (5), суммируя по $\beta, p, |\beta|=|p|=m$, оценивая полученное выражение с помощью (3), (9), (11), получим

$$I^{*}(h)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=|p|=m}\int_{\Omega}\left[V_{p,0}(x)\right]^{r}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ \mu\le\beta}}\left[V_{0,\gamma}(x+\mu h)\right]^{p-1}(\Delta^{\beta}(h)D^{\alpha}u(x))^{2}\xi^{s}(x)dx\le$$

$$\le C\left[\frac{(r+s)K}{d}\right]^{2m}\int_{\Omega}\left\{\widetilde{V}_{r+p}(x)h^{4}+\widetilde{V}_{r+p-2}(x)\sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\omega+\delta|>m}}\left|\frac{\Delta^{\omega}D^{\delta}u}{h^{m-|\delta|}}\right|^{4}\right\}\xi^{s-m}(x)dx, \tag{12}$$

$$\widetilde{V}_{r}(x)=\sum_{|p|=m}\sum_{|\alpha|\le m}\left[V_{p,\alpha}(x)\right]^{r}+\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}\sum_{\mu\le\beta}\left[V_{0,\gamma}(x+\mu h)\right]^{r}.$$

Предположим теперь, что при некоторых значениях $r, s, H\le\frac{d}{2}$ конечен интеграл

$$I=I_{r,s}(H,\varsigma)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{|\alpha|=|\gamma|=m}\int_{0}^{2H}\frac{dh}{h^{3}}\int_{\Omega}|\Delta_{i}^{m}(h)\{\left[V_{0,\gamma}(x)\right]^{\frac{r-p}{4}-\frac{1}{2}}D^{\alpha}u\varsigma^{\frac{s-2m}{4}}\}|^{2}\,dx,$$

где $\varsigma\in C_{0}^{\infty}(\Omega)$, $\sup\varsigma\subset B_{2d}(x_{0})$, $|D^{\alpha}\varsigma|\le\left(\frac{L}{d}\right)^{|\alpha|}$, $\varsigma\equiv1$ на $B_{d_1+3mH}(x_0)$. Например, из оценки (см. [6], стр. 390, и [5])

$$I\le C\sum_{|\alpha|=|\gamma|=m}\left\|\left[V_{0,\gamma}(x)\right]^{\frac{r+p-2}{4}}D^{\alpha}u\varsigma^{\frac{s-2m}{4}}\right\|W_{2}^{1}(\Omega)$$

следует конечность I при $r\le p$. В дальнейшем будет доказано, что интегралы I конечны при всех значениях r, s, H.

Покажем сейчас, что при наших предположениях конечен интеграл

$$J=J_{r,s}(H,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}\left[V_{0,\alpha}(x)\right]^{r+p}\xi^{s-2m}(x)dx+$$

$$+\int_{0}^{H}\frac{dh}{h^{3}}\int_{\Omega}\widetilde{V}_{r+p-2}(x)\left\{\sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\omega+\delta|>m}}\left|\frac{\Delta^{\omega}D^{\delta}u}{h^{m-|\delta|}}\right|^{4}+\sum_{|\alpha|=m}\int_{I_{\alpha}}|\Delta^{1}(t_{\alpha}h)D^{\alpha}u|^{4}\,dt\right\}\xi^{s-2m}(x)dx$$

и получим для него оценку. Укажем способ оценки одного из слагаемых в интеграле J, например, члена

$$J_{1}=\int_{0}^{H}\frac{dh}{h^{3}}\int_{\Omega}\left[V_{p,\alpha}(x)\right]^{\gamma+p-2}\left|\frac{\Delta^{\omega}D^{\delta}u}{h^{m-|\delta|}}\right|^{4}\xi^{s-2m}(x)dx.$$

Воспользуемся легко проверяемым соотношением

$$\Delta^{\alpha}(h)f(x)=h^{|\alpha|}\int_{I_{\alpha}}D^{\alpha}f(x+t_{\alpha}h)\,dt,\quad I_{\alpha}=\left\{t_{1},\ldots,t_{|\alpha|}:0\le t_{i}\le1\right\}, \tag{13}$$

где для индекса $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ через t_α обозначен вектор $(t_1+\ldots+t_{\alpha_1},\ldots,t_{|\alpha|-\alpha_n+1}+\ldots+t_{|\alpha|})$. Представим $p=p'+p''$, $|p'|=m-|\alpha|$, $\omega=\omega'+\omega''$, $|\omega'|=m-|\delta|$, тогда

$$J_1 \le \sum_{\mu\le p''} \int_{I_{p'}} \int_{I_{\omega'}} \int_0^H \frac{dh}{h^3} \int_\Omega \left[V_{0,\alpha}(x+\mu h+t_p h)\right]^{r+p-2} |\, \Delta^{\omega''} D^{\delta+\omega'}(x+\tau_\omega h)|^4 \; \xi^{s-2m} dx\, dt\, d\tau,$$

и обозначим $x+\mu h+t_{p'}h = y$. Функция η равна единице в шаре радиуса d_1+mH с центром в x_0. Тогда

$$J_1 \le \sum_{|\gamma|=m} \sum_i \int_{I_{p'}} \int_{I_{\omega'}} \int_0^H \frac{dh}{h^3} \int_\Omega \left\{ \left[V_{0,\alpha}(y)\right]^{\frac{r+p-2}{4}} |\, \Delta^1(h_i)\, D^\gamma u(y)\,|\, \eta^{\frac{s-2m}{4}}(y) \right\}^4 dy\, dt\, d\tau\,.$$

Здесь h_i – вектор, зависящий от $t, \tau, |\, h_i \,| \le 2mh$.

Пользуясь соотношением вида (7), оцениваем последний интеграл через слагаемые вида

$$J_2 = \int_{I_{p'}} \int_{I_{\omega'}} \int_0^H \frac{dh}{h^3} \int_\Omega \left| \Delta^1(h_i) \left\{ \left[V_{0,\alpha}(y)\right]^{\frac{r+p-2}{4}} D^\gamma u(y)\, \eta^{\frac{s-2m}{4}}(y) \right\} \right|^4 dy\, dt\, d\tau\,,$$

$$J_3 = \int_\Omega \left[V_{0,\alpha}(y)\right]^{r+p-2} |\, D^\gamma u(y)\,|^4 \; \varsigma^{s-2m-4}(y)\, dy\,.$$

Дальнейшие оценки основаны на следующих неравенствах, первое из которых имеется в [7], а доказательство второго можно провести аналогично доказательству леммы 2.4 работы [7]

$$\|f\|_{L_4(\Omega)} \le C \left\{ \|f\|_{L_2(\Omega)} H^{-\frac12} + \sum_{i=1}^2 H^{\frac12} \left[\int_0^{2H} \frac{dh}{h^3} \int_\Omega |\, \Delta_i^m(h)\, f\,|^2 \, dx \right]^{\frac12} \right\},$$

$$\left\{ \int_0^H \frac{dh}{h^3} \int_\Omega |\, \Delta^1(h_i)\, f(x)\,|^4 \, dx \right\}^{\frac14} \le C \|f\|_{L_2(\Omega)} H^{-1} + C \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^{2H} \frac{dh}{h^3} \int_\Omega |\, \Delta_i^m(h)\, f(x)\,|^2 \, dx \right\}^{\frac12},$$

$$0 < 2H \le d\,. \tag{14}$$

Неравенства (14) заведомо справедливы для f, если конечна правая часть (14) и если носитель f содержится в $B_{2d}(x_0)$. Применяя (14) для оценки интегралов J_2, J_3, получаем при соответствующем выборе f существование интегралов J_2 и оценку для него. Таким образом, получаем оценку для J:

$$J \le C \left(\frac{rL}{d} \right)^4 \frac{1}{H^2} \left\{ \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \left[V_{0,\alpha}(x)\right]^{\frac{r+p}{2}} \varsigma^{\frac{s-2m-4}{2}}(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^2 \sum_{|\alpha|=|\gamma|=m} \int_0^{2H} \frac{dh}{h^3} \int_\Omega \left| \Delta_i^m \left\{ \left[V_{0,\alpha}(x)\right]^{\frac{r+p-2}{4}} D^\gamma u(x)\, \eta^{\frac{s-2m}{4}}(x) \right\} \right|^2 dx \right\}^2. \tag{15}$$

Далее преобразуем последний интеграл, используя равенство (7):

$$J \le C \left(\frac{rL}{d} \right)^{2m+4} \frac{1}{H^2} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \left[V_{0,\alpha}(x)\right]^{\frac{r+p}{2}} \varsigma^{\frac{s-2m-4}{2}}(x)\, dx + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{|\alpha|=|\gamma|=m} \sum_{j,k=1}^m \left(\int_0^{2H} \frac{dh}{h^3} \int_\Omega \left[V_{0,\alpha}(x+khe_i)\right]^{\frac{r+p-2}{2}} |\, \Delta_i^m\, D^\gamma u(x)\,|^2\, \eta^{\frac{s-2m}{2}}(x)\, dx + \right.$$

$$+\int_0^{2H}\frac{dh}{h^3}\int_\Omega \left[V_{0,\alpha}(x+khe_i)\right]^{\frac{r+p-4}{2}} |\Delta_i^1(jh)D^\gamma u(x)|^4 \varsigma^{\frac{s-6m}{2}}(x)\,dx\Bigg)\Bigg\}^2. \tag{16}$$

Обозначим второй интеграл справа через J_4 и сравним его с интегралом

$$J_5=\int_0^{2H}\frac{dh}{h^3}\int_\Omega \left[V_{\alpha_0}(x)\right]^{\frac{r-p}{2}}\left[V_{0,\alpha}(x+khe_i)\right]^{p-1}|\Delta_i^m D^\gamma u(x)|^2\,\eta^{\frac{s-2m}{2}}(x)\,dx,$$

$$|J_4-J_5|\le|C\,\varepsilon(J_4+J_5)+$$

$$+\frac{C}{\varepsilon}\int_0^{2H}\frac{dh}{h^3}\int_\Omega \widetilde{V}_{\frac{r+2p-4}{2}}(x)\left\{\sum_{k=1}^m\sum_{|\beta|=m}|\Delta_i^1(kh)D^\beta u(x)|^4+\int_{I_\alpha}|\Delta^1(t_\alpha h)D^\alpha u|^4\,dt\right\}\eta^{\frac{s-2m}{2}}(x)\,dx.$$

Применяя к J_5 неравенство (12), приходим к оценке

$$J_{r,s}(H,\xi)\le C\left(\frac{rL}{d}\right)^{4+2m}\left[\frac{(r+s)K}{d}\right]^{2m}\frac{1}{H^2}J^2_{\frac{r}{2},\frac{s}{2}-m}(2H,\varsigma). \tag{17}$$

Отметим, что из оценки (17), ограниченности интеграла $\int_0^H\frac{I^*(h)}{h^3}dh$ можно получить путем рассуждений подобных только что проделанным при оценке второго интеграла в (15) ограниченность интеграла $I_{r,s}(H,\xi)$. Выберем теперь последовательности r_k,s_k,H_k,ξ_k следующим образом:

$$r_k=2^k\cdot p,\quad s_k=2^k(1+2m)-2m,\quad H_k=\frac{d}{6m\cdot 2^k}.$$

Пусть $\varphi(t)\in C_0^\infty(R^1)$ – функция, равная единице при $t\le1$ и нулю – при $t\ge2,\ \ 0\le\varphi(t)\le1$,

$$d_k=d\left(2-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^i}\right).$$

Определим $\xi_k(x)=1$ при $|x-x_0|\le d_k$ и

$$\xi_k(x)=\varphi\left(1+\frac{2^{k+1}}{d}\left(|x-x_0|-d_k\right)\right).$$

Тогда функция $\xi_k(x)$ имеет носитель в шаре радиуса $d_k+\frac{d}{2^{k+1}}$ с центром в x_0. Функция $\xi_{k-1}(x)$ равна единице при $|x-x_0|\le d_{k-1}$. Так как $d_{k-1}=d_k+\frac{d}{2^{k+1}}+3mH_k$, то получаем из (17) неравенство

$$L_k\le C\frac{2^{k(8m+10)}}{d^{4m+6}}\cdot L_{k-1}^2, \tag{18}$$

где $L_k=J_{r_k,s_k}(H_k,\xi_k)$. Из (18) следует

$$L_k^{\frac{1}{r_k}}\le C\left(\frac{Z_0}{d^{4m+6}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{19}$$

Отметим, что L_0 зависит только от $\nu_0\mu_0,p,m,\|u\|_{W_p^m(\Omega)}$. Тогда из оценки (19) следует теорема.

Теорема 1. *Пусть* $u(x)$ *есть обобщенное решение из* $W_{2p}^m(\Omega)$ *уравнения* (1), $2p>1$, $m\ge 2$. *Предположим, что функции* $A_\alpha(x,\xi)$ *дважды дифференцируемы при* $x\in\Omega$, $\xi\in R^M$ *и выполнены неравенства* (3). *Тогда для произвольной подобласти* Ω' *области* Ω *такой, что* $\overline{\Omega'}\subset\Omega$, $\underset{\Omega'}{vrai\max}|D^\alpha u|$ *при* $|\alpha|=m$ *оценивается постоянной, зависящей лишь от* $\nu_0,\mu_0,p,m,\|u\|_{W_p^m(\Omega)}$ *и расстояния* Ω' *до* $\partial\Omega$.

§ 2. Непрерывность производных порядка m

Сохраняем все предположения § 1. Пусть u – обобщенное решение уравнения и докажем непрерывность производных порядка m в произвольной внутренней точке x_0 области Ω. Пусть d – то же число, что и в § 1, и пусть в $B_{2d}(x_0)$ выполнена оценка $\sum\limits_{|\alpha|=m}|D_u^\alpha|\le M$.

Обозначим для произвольного $R\le d$, $|\alpha|=m$

$$\begin{gathered}\omega_{1,\alpha}=\omega_{1,\alpha}(2R)=\inf_{x\in B_{2R}(x_0)}D^\alpha u,\quad \omega_{2,\alpha}=\omega_{2,\alpha}(2R)=\sup_{x\in B_{2R}(x_0)}D^\alpha u,\\ \omega_\alpha=\omega_{2,\alpha}-\omega_{1,\alpha},\quad \omega=\omega(2R)=\sup_{|\alpha|=m}\omega_\alpha .\end{gathered}\tag{20}$$

Без ограничения общности можем предполагать, что

$$\inf_{|\alpha|=m}\omega_{1,\alpha}(2d)\ge 1+\omega(2d).\tag{21}$$

Этого всегда можно добиться, переходя от u к новой функции $v: u=v+\sum\limits_{|\alpha|=m}c_\alpha x^\alpha$ при надлежащем выборе c_α. Пусть

$$\Omega_\alpha=\Omega_\alpha\left(\frac{\Delta^\alpha u}{h^m}\right)=\begin{cases}\dfrac{\Delta^\alpha u}{h^m},\ \textit{если}\quad mes\left\{x\in B_{2R}(x_0):D^\alpha u(x)<\omega_{2,\alpha}-\frac{\omega}{2}\right\}>\frac{1}{2}R^2,\\ -2\omega_{2,\alpha}+\omega+\frac{\Delta^\alpha u}{h^m},\quad \textit{если}\quad mes\left\{x\in B_{2R}(x_0):D^\alpha u(x)<\omega_{2,\alpha}-\frac{\omega}{2}\right\}\le\frac{1}{2}R^2\end{cases}$$

Подставляем в (2)

$$v=\Delta_i^l(-h)\,\Delta^\beta(-h)\{\Delta_i^l(h)\left[W_p'\Omega_\beta\right]\xi^s(x)\},\quad W_p=\frac{\omega}{\omega_{2,p}^2-\Omega_p^2+\eta(R)},\tag{22}$$

где $\xi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, носитель $\xi(x)$ содержится в $B_{R_1(x_0)}$, $R_1<2R$, для $\xi(x)$ выполнены оценки $|D^\alpha\xi|\le\left(\dfrac{K}{R}\right)^{|\alpha|}$ при $|\alpha|\le m;$ $\eta(R)$ – положительная функция, вид которой будет указан ниже, $\eta(R)\le 1$. Получаем

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\Delta_i^1(h)\,\Delta^\beta(h)\,A_\alpha(x,Du)\,D^\alpha\left\{\Delta_i^1(h)\left[W_p^r\Omega_\beta\right]\xi^s(x)\right\}dx=0.\tag{23}$$

Для выражения $\Delta_i^1(h)\,\Delta^{\beta}(h)\,A_{\alpha}(x,Du)$ пользуемся представлением, аналогичным (8), второй подынтегральный множитель представляем в виде

$$D^{\alpha}\left\{\Delta_i^1(h)\left[W_p^r\Omega_{\beta}\right]\xi^s(x)\right\}=\frac{1}{h^m}\left\{\overline{W}_{p,i}^{\,r}(x)\,\Delta_i^1(h)\,\Delta^{\beta}(h)\,D^{\alpha}u(x)\,\xi^s(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{2r}{\omega}W_p^{r+1}(x)\,\Omega_p(x)\Delta_i^1(h)\,\Delta^p(h)\,D^{\alpha}u(x)\,\Omega_{\beta}\,\xi^s(x)+R_3\right\}, \tag{24}$$

где $\overline{W}_{p,i}^{\,r}(x)=W_p^r(x)+W_p^r(x+he_i)$, а для R_3 имеет место оценка

$$|R_3|\le C\left(\frac{r+s}{\omega}\right)^{m+1}\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{K}{R}\right)^j\left\{\overline{W}_{p,i}^{\,r+m+1}(x)\,h^j\sum_{\substack{|\gamma|<m\\|\delta+\gamma|>m}}\left|\frac{\Delta^{\delta}(h)D^{\gamma}u(x)}{h^{m-|\gamma|}}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\overline{W}_{p,i}^{\,r+1}\sum_{\substack{|\gamma|\le m-i\\|\delta+\gamma|>m}}|\,\Delta^{\delta}(h)\,D^{\gamma}u(x)\,|\right\}\xi^{s-m}(x). \tag{25}$$

Отсюда и из (23) при $h\le R$ следует основное неравенство:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=|p|=m}\int_{\Omega}\overline{W}_{p,i}^{\,r}(x)\,|\,\Delta_i^1(h)\,\Delta^{\beta}(h)\,D^{\alpha}u(x)\,|^2\ \xi^s(x)\,dx\le$$

$$\le C\left(\frac{r+s}{\omega}\right)^{2(m+1)}K^{2m}\sum_{i=1}^{2}\sum_{|p|=m}\int_{\Omega}\overline{W}_{p,i}^{\,r+2m+2}(x)\left\{\sum_{\substack{|\gamma|\le m\\|\delta+\gamma|>m}}\left|\frac{\Delta^{\delta}(h)\,D^{\gamma}u(x)}{h^{m-|\gamma|}}\right|^4+\left(\frac{h}{R}\right)^4\right\}\xi^{s-2m}(x)\,dx. \tag{26}$$

Далее, аналогично изложенному выше доказательству сходимости интегралов $I_{r,s}(H,\xi)$, устанавливается сходимость интеграла

$$\bar{I}=I_{r,s}(H,\xi)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{|p|=|\alpha|=m}\int_0^H\frac{dh}{h^3}\int_{\Omega}|\,\Delta_i^m(h)\left\{\left[\widetilde{W}_0(x)\right]^r\,\Omega_{\alpha}(D^{\alpha}u)\,\xi^s(x)\right\}|^2\ dx,$$

$$\widetilde{W}_p(x)=\frac{\omega}{\omega_{2,p}^2-\Omega_p^2(D^pu)+\eta(R)}\ .$$

Укажем только на возникающие при этом отличия. При оценке W_p^{r+2m+2} пользуемся формулой (3) и неравенством Иенсена [8]. Получаем

$$W_p^{r+2m+2}(x)\le\int_{I_p}\left[\frac{\omega}{\omega_{2,p}^2-\Omega_p^2\ (D^pu(x+t_ph))+\eta(R)}\right]^{r+2m+2}dt\,.$$

При оценке

$$\bar{J}_1=\int_0^H\frac{dh}{h^3}\int_{\Omega}\overline{W}_{p,i}^{\,r+2m+2}(x)\,\xi^{s-2m}(x)\left(\frac{h}{R}\right)^4dx\le\frac{1}{R^2}\int_{\Omega}\left[\widetilde{W}_p(x)\right]^{r-2m-2}\widetilde{\xi}^{s-2m}(x)\,dx\,,$$

где $\widetilde{\xi}(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$ и равна единице в $B_{R_1+3mH}(x_0)$, пользуемся первым неравенством (14).

Получим

$$\bar{J}_1\le C\left(\frac{R}{H}\right)^2\left\{\frac{1}{R^2}\int_{\Omega}\left[\widetilde{W}_p(x)\right]^{\frac{r+2m+2}{2}}\widetilde{\xi}^{\frac{s-2m}{2}}(x)\,dx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^{2H}\frac{dh}{h^3}\int_{\Omega}\left|\Delta_i^m\left\{\left[\widetilde{W}_p(x)\right]^{\frac{r+2m+2}{4}}\widetilde{\xi}^{\frac{s-2m}{4}}(x)\right\}\right|^2dx\right\}^2.$$

Учитывая эти замечания, устанавливаем для интеграла

$$\bar{J}_{r,s}(H,\xi)=\sum_{|p|=m}\left\{\frac{1}{R^2}\int_{\Omega}\left[\widetilde{W}_p(x)\right]^{r+2m+2}\xi^{s-2m}(x)\,dx+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^H\frac{dh}{h^3}\int_{\Omega}\left(\left[\widetilde{W}_p(x)\right]^{r+2m+2}+\left[\overline{W}_{p,i}(x)\right]^{r+2m+2}\right)\left[\sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\omega|+\delta>m}}\left|\frac{\Delta^{\omega}D^{\delta}u}{h^{m-|\delta|}}\right|^4+\right.$$

$$\left.+\sum_{|\alpha|=m}\int|\Delta^1(t_\alpha h)\,D^\alpha u\,|^4\;dt\right]\xi^{s-2m}dx$$

оценку

$$\bar{J}_{r,s}(H,\xi)\le C\left(\frac{r+s}{\omega}\right)^{2m+2}K^{2m}\left(\frac{rL}{\omega}\right)^{4+2m}\left(\frac{R}{H}\right)^2\bar{J}^{\,2}_{\frac{r}{2}+m,\frac{s}{2}-m}(2H,\widetilde{\xi}). \tag{27}$$

Выберем теперь

$$r_k=2^k+2m,\quad s_k=2^k(1+2m)-2m,\quad H_k=\frac{R}{6m\cdot 2^k},$$

$$\xi_k(x)=1\quad\text{при}\quad |x-x_0|\le R\left(2-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^i}\right)=R_k\,,$$

$$\xi_k(x)=\varphi\left(1+\frac{2^{k+1}}{R}\left(|x-x_0|-R_k\right)\right)\quad\text{при}\quad |x-x_0|>R_k\,,$$

где φ – та же функция, что и в § 1. Получаем

$$\left\{\overline{L}\right\}^{\frac{1}{2^k}}\le\frac{C}{\omega^{4m+6}}\cdot\overline{L}_0,\quad \overline{L}_k=\bar{J}_{r_k,s_k}(H,\xi_k). \tag{28}$$

Теперь будет установлена ограниченность $\overline{L}_0$ при определенном выборе функции $\eta(R)$. Пользуясь тем, что $\widetilde{W}_p$ ограничена на множестве, мера которого не меньше $\frac{1}{2}R^2$ (это следует из выбора Ω_p), можно доказать неравенство

$$\frac{1}{R^2}\int_{B_{2R}(x_0)}\widetilde{W}_p^{\,2m+2}(x)\,dx\le C\left\{1+\frac{1}{[\eta(R)]^{2m+4}}\int_{B_{2R}(x_0)}|\nabla D^p u|^2\;dx\right\}.$$

Так что справедлива оценка

$$\overline{L}_0\le C\sum_{|p|=m}\left\{1+\frac{1}{[\eta(R)]^{2m+4}}\left[\int_{B_{2R}(x_0)}|\nabla D^p u|^2\;dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^R\frac{dh}{h^3}\int_{B_{2R}(x_0)}\left(\sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\omega-\delta|>m}}\left|\frac{\Delta^{\omega}D^{\delta}u}{h^{m-|\delta|}}\right|^4+\sum_{|\alpha|=m}\int_{I_\alpha}|\Delta^1(t_\alpha h)D^\alpha u|^4\;dt\right)dx\right]\right\}. \tag{29}$$

Выберем $\eta(R)$ так, чтобы второе слагаемое в фигурной скобке формулы (29) равнялось единице. Отметим, что $\eta(R)$ стремится к нулю при R, стремящемся к нулю. Тогда из оценки (28) следует для $x\in B_R(x_0)$ при $|p|=m$

$$\widetilde{W}_p(x)\le\frac{C}{\omega^{4m+6}}.$$

Из последнего неравенства получаем, что при всех $R \le d$ выполнена оценка

$$\omega(R) \le \omega(2R) - \frac{\omega^{4m+7}(2R)}{C} + \eta(R), \qquad (30)$$

из которой и следует, что $\omega(R) \to 0$ при $R \to 0$, т.е. непрерывность всех производных m-го порядка функции u в точке x_0. В самом деле, если предположить, что $\omega(R) \ge \omega_0 > 0$ при всех $R > 0$, то из (30) имеем

$$\omega(R) \le \theta\omega(2R) + \eta(R), \quad \theta = 1 - \frac{\omega_0^{4m+6}}{C} < 1.$$

Тогда

$$\omega\left(\frac{d}{4^n}\right) \le \theta^n \omega(d) + \frac{1}{1-\theta}\eta\left(\frac{d}{2^n}\right),$$

т.е. предположение о том, что $\lim\limits_{R\to 0}\omega(R) \ne 0$ неверно. Тем самым доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть* $u(x)$ *есть обобщенное решение из* $W_{2p}^m(\Omega)$ *уравнения* (1), $2p > 1$, $m \ge 2$. *Предположим, что функции* A_α *дважды дифференцируемы и удовлетворяют условиям* (3). *Тогда производные порядка* m *функции* $u(x)$ *непрерывны в* Ω.

Отсюда и из теоремы 11.4 работы [9] получаем гладкость производных порядка выше, чем m, при определенной гладкости A_α. Так что в наших предположениях, например, непрерывны производные порядка $m+1$.

1. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. “Наука”, М., 1964.
2. *Мазья В.Г.*– Функциональный анализ и его приложения, 1968, 2, 3.
3. *De Ciorgi E.* – Boll. Un. Mat. Ital., 1968, 1.
4. *Givsti E., Miranda M.* – Boll. Un. Mat. Ital., 1968, 2.
5. *Morrey C.B.* – J. Math. Mech., 1968, 17, 7.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. «Наука». М. 1969.
7. *Ильин В.П.* – Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова, 1962, 66.
8. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. ИЛ, М, 1948.
9. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. ИЛ, М., 1962.
10. *Necas I.* – Comm. Math. Univ. Carol., 1968, 9, 3.

ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

(*Математическая физика. – 1972. – вып. 11*)

В работе [1] автором доказаны теоремы о регулярности внутри области обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений на плоскости. В настоящей статье изучаются свойства решений вблизи границы.

Раньше И.Нечасом [2] устанавливалась регулярность решений вблизи границы при ряде дополнительных ограничений. Предполагалось, что уравнение можно включить в параметрическое семейство специального вида. Делался ряд существенных ограничений на коэффициенты, обеспечивающих в частности, единственность решения.

Пусть $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega), \quad m \geq 2, \quad p \geq 2$, – обобщенное решение уравнения

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, Du) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha\,, \ \ f_\alpha \in W_{p_0}^1(\Omega), \quad p_0 > 2\,, \tag{1}$$

т. е. для произвольной $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x, Du)\, D^\alpha \eta dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha D^\alpha \eta dx\,. \tag{2}$$

Здесь пользуемся обычными мультииндексными обозначениями $Du = \{D^\alpha u : |\,\alpha\,|\leq m\}$.

Будем считать, что внутри области Ω производные порядка $m+1$ функции u_0 непрерывны. Граница S области Ω предполагается класса $C^{m,\delta}$, $\delta > 0$. Пусть Ω' – некоторая строго внутренняя подобласть области Ω, так что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Предполагается, что функции $A_\alpha(x, \xi)$ при $x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega'$, $\xi = \{\xi_\alpha : |\,\alpha\,|\leq m\} \in R^M$ непрерывно дифференцируемы и выполнены соотношения

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_{\alpha\beta}(x,\xi)\eta_\alpha\eta_\beta \geq \nu\big(1+|\,\xi\,|\big)^{p-2} \sum_{|\alpha|=m} \eta_\alpha^2\,,$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} |\,A_{\alpha\beta}(x,\xi)\,|(1+|\,\xi\,|) + \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{i=1}^{2} |\,A_{\alpha,i}(x,\xi)\,| \leq \mu(1+|\,\xi\,|)^{p-1},$$

$$A_{\alpha\beta}(x,\xi) = A_{\beta\alpha}(x,\xi) \quad \text{при} \quad |\,\alpha\,|=|\,\beta\,|=m\,, \tag{3}$$

где

$$A_{\alpha\beta}(x,\xi) = \frac{\partial A_\alpha(x,\xi)}{\partial \xi_\beta}, \quad A_{\alpha i}(x,\xi) = \frac{\partial A_\alpha(x,\xi)}{\partial x_i}\,,$$

а ν, μ – положительные постоянные. Обозначим в дальнейшем $F = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\, f_\alpha \,\| W_{p_0}^1(\Omega)$, где f_α – та же функция, что и в (1).

Лемма 1. *Пусть* Ω_0 *– произвольная подобласть области* $\Omega\setminus\overline{\Omega}'$ *с границей класса* $C^{m,\delta}$ *и пусть* $v(x)\in C^m(\overline{\Omega}_0)\cap W_2^{m+1}(\Omega_0)$ *– обобщенное решение в* Ω_0 *уравнения* $\sum\limits_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,Dv)=\sum\limits_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha g_\alpha$, $\sum\limits_{|\alpha|\le m}\| g_\alpha\|_{W'_{p0}(\Omega_0)}\le F$ *такое, что* $v(x)\in\varphi(x)+\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega_0)$, $\varphi(x)\in$ $\in C^{m+1}(\Omega_0)$. *Существуют* q, $2<q\le p_0$, *зависящее только от* ν,μ,p_0,Ω_0; C_1, *зависящие только от* $\nu,\mu,F,\|\varphi\|_{C^{m+1}(\Omega_0)},\Omega_0,\|v\|_{W_p^m(\Omega_0)}$ *такие, что имеет место оценка*

$$\|v\|_{W_q^{m+1}(\Omega_0)}\le C_1 .$$

Доказательство леммы 1 можно провести аналогично доказательству леммы 8.4 в работе [2].

Рассмотрим расширяющуюся последовательность подобластей Ω_t области Ω, $0\le t\le 1$, такую, что при $0\le t_1<t_2\le 1$ $\Omega'\subset\Omega_{t_1}\subset\Omega_{t_2}\subset\overline{\Omega}_{t_2}\subset\Omega$, $\partial\Omega_t\in C^{m,\delta}$, $mes(\Omega\setminus\Omega_t)\to 0$ при $t\to 1$.

Лемма 2. *Существует* $t_1<1$ *такое, что задача*

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,Du)=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha g_\alpha,\quad u\in u_0+\overset{\circ}{W}{}_p^m(\widetilde{\Omega}_t), \tag{4}$$

в произвольной области $\widetilde{\Omega}_t=\Omega\setminus\overline{\Omega}_t$, $t\ge t_1$, *имеет и притом единственное обобщенное решение при произвольных* g_α *таких, что* $\sum\limits_{|\alpha|\le m}\|g_\alpha\|_{W'_{p0}(\widetilde{\Omega}_t)}\le F$. *Кроме того, справедлива оценка* $\|u\|_{W_p^m(\widetilde{\Omega}_t)}\le C_2$ *, где* C_2 *– постоянная, зависящая только от* $F,\nu,\mu,p,\|u_0\|_{W_p^m(\Omega)}$.

Доказательство существования решения в области $\widetilde{\Omega}_t$ при t, близком к единице, можно провести обычными методами [3]. Если предположить существование двух различных решений u_1, u_2 задачи (4), то, подставляя в интегральное тождество $\eta=u_1-u_2$ и оценивая, приходим к противоречию. Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Существует* t_2, $t_1\le t_2<1$*, такое, что задача*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left[A_{\alpha\beta}(x,Dw)\,D^\beta v\right]=0,\quad v\in\overset{\circ}{W}{}_p^m(\widetilde{\Omega}_t)$$

имеет только нулевое решение v *при произвольной функции* $w\in C^m(\overline{\widetilde{\Omega}}_t)$, $\|w\|_{W_p^m(\widetilde{\Omega}_t)}\le C_2$, $t\ge t_2$.

Обозначим дальше через Ω_0 область $\Omega\setminus\overline{\Omega}_{t_2}$ и через $\varphi\in C^{m+1}(\Omega_0)$ такую функцию, что $u_0-\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega_0)$, $\|\varphi\|_{W_p^m(\Omega_0)}\le\|u\|_{W_p^m(\Omega_0)}+1$.

Введем оператор $A:X\to Y$, $X=\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega_0)\cap W_q^{m+1}(\Omega_0)$, $Y=\left[\overset{\circ}{W}{}_{q'}^{m-1}(\Omega_0)\right]^*$ равенством

$$\left\langle Au,v\right\rangle=\sum_{|\gamma|\le 1}\sum_{|\beta|\le m-1}\int_{\Omega_0}(-1)^{|\gamma|}D^{\gamma}A_{\beta+\gamma}(x,Du)\,D^{\beta}\,v\,dx\,,\quad v\in Y^{*},$$

где через $\left\langle h,v\right\rangle$ обозначено значение функционала $h\in Y$ на элементе v. И пусть $A'(w)$ – оператор из X в Y, определяемый равенством

$$\left\langle A'(W)\,u,v\right\rangle=\sum_{|\gamma|\le 1}\sum_{|\beta|\le m-1}\sum_{|p|\le m}\int_{\Omega_0}(-1)^{|\gamma|}D^{\gamma}\left[A_{\beta+\gamma,p}(x,Dw)\,D^{p}u\right]D^{\beta}v\,dx\,.$$

Здесь $w\in X$.

Лемма 4. *При произвольной функции $w\in X$, для которой $\|w\|_{W_p^m(\Omega_0)}\le C_2$, область значения оператора $A'(w)$ плотна в Y.*

Достаточно доказать для любой функции $\psi(x)\in C_0^{\infty}\Omega_0)$ существование функции $u\in X$ такой, что

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}\int_{\Omega_0}A_{\alpha\beta}(x,Dw)\,D^{\beta}u\,D^{\alpha}\eta\,dx=\sum_{|\alpha|=m-1}\int_{\Omega_0}D^{\alpha}\psi\,D^{\alpha}\eta\,dx \tag{5}$$

при произвольной $\eta\in C_0^{\infty}(\Omega_0)$. Используя лемму 3, доказываем существование решения $u(x)$ уравнения (5), принадлежащего $\overset{\circ}{W}{}_r^m(\Omega_0)$ с любым $r>1$. И дальше, обычным образом, получаем включение $u\in W_q^{m+1}(\Omega_0)$.

Введем множества

$$G=\left\{u\in X:\|u\|_{W_q^{m+1}(\Omega_0)}\le C_1+1\right\},\quad R=\left\{h\in Y:\|h\|_Y\le F\right\}.$$

Очевидно, что функционал f, для которого

$$\left\langle f,v\right\rangle=\sum_{|\gamma|\le 1}\sum_{|\beta|\le m-1}\int_{\Omega_0}(-1)^{|\gamma|}D^{\gamma}f_{\beta+\gamma}D^{\beta}v\,dx\,,\quad v\in\overset{\circ}{W}{}_{q'}^{m-1}(\Omega_0)\,,$$

принадлежит R.

Лемма 5. *Множество $AG\cap R$ замкнуто в Y.*

Если $u_n\in G$ и $Au_n\in R$, $Au_n\xrightarrow{Y}h$, то с помощью леммы 1 получим $u_n\in R$. Можем считать, что последовательность u_n сходится в W_p^m к $\tilde{u}\in G$ и, следовательно, Au_n сходится в $(\overset{\circ}{W}{}_p^m)^{*}$ к $A\tilde{u}$. Это приводит к $A\tilde{u}=h$.

Лемма 6. *Имеет место включение $R\subset AG$.*

Пусть h_0 – произвольный элемент R. Из теоремы Эдельштейна [4] следует существование последовательности h_n, сходящейся к h_0, и последовательности $u_n\in G$ таких, что

$$\|h_n-Au_n\|=\inf_{u\in G}\|h_n-Au\|.$$

Из леммы 4 аналогично [4] получаем $Au_n=h_n$. Отсюда следует, что $h_0=AG$ в силу леммы 5.

Таким образом, для функционала f, определяемого равенством (8), существует функция $u_1 \in G$ такая, что $Au_1 = f$. Из леммы 2 следует $u_0 = u_1$ и, тем самым, доказано, что $u_0 \in W_q^{m+1}(\Omega_0)$. Следовательно, с некоторым $\lambda > 0$ $u_0 \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}_0)$ и справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $u_0(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (1)*, имеющее непрерывные производные* $(m+1)$*-го порядка внутри области* Ω*, и пусть для некоторой строго внутренней подобласти* Ω' *области* Ω *функции* $A_\alpha(x,\xi)$ *непрерывно дифференцируемы для* $x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega'$, $\xi \in R^M$ *и удовлетворяют условиям* (3)*. Тогда существует положительное* λ *такое, что* $u \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.

[1]*И.В.Скрипник,* Математическая физика (наст. сборник). [2]*I.Nečas,* Comm. Math. Univ. Carol., 1968, 9, 3. [3]*М.И.Вишик,* Труды Моск. матем. общ.-ва, 1963, 12. [4]*С.И.Похожаев,* Функциональный анализ, 1969, 3, 2.

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

(*Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1973, № 1*)

Відомий результат Де Джорджі [1] полягає в тому, що всякий узагальнений розв'язок еліптичного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0$$

з вимірними обмеженими коефіцієнтами, який належить простору W_2^1, задовольняє умову Гельдера. Існують приклади [2, 3], коли аналогічне твердження не має місця для рівнянь довільного порядку. В даній статті вказуються умови неперервності узагальнених розв'язків лінійних і квазілінійних еліптичних рівнянь вищого порядку.

1. Нехай $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ – узагальнений розв'язок рівняння

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) = 0, \tag{1}$$

тобто для довільної $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u \cdot D^\alpha v \, dx = 0.$$

Тут Ω – обмежена область у R^n така, що для простору $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ справедливі теореми вкладення С.Л.Соболєва,

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad x = (x_1, ..., x_n),$$

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}, \quad dx = dx_1 ... dx_n.$$

Припускаємо, що функції $a_{\alpha\beta}(x)$ вимірні, і з деякими додатними сталими C_1, C_2 виконуються нерівності

$$|a_{\alpha\beta}(x)| \le C_1, \quad |\alpha|, |\beta| \le m, \qquad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \ge C_2 \sum_{|\alpha|=m} \xi_\alpha^2.$$

За цих умов має місце

Теорема 1. *Нехай* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ *– узагальнений розв'язок рівняння* (1) *і* $n = 2m$. *Тоді* $u \in C(\overline{\Omega})$. $\|u\|_{C(\overline{\Omega})}$ *оцінюється сталою, яка залежить тільки від* m, C_1, C_2, Ω *і* $\|u\|_{m,2}$.

Через $\|\cdot\|_{m,p}$ позначаємо норму в $W_p^m(\Omega)$.

2. Розглянемо тепер квазілінійне рівняння дивергентного виду

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u, ..., D^m u) = 0, \tag{2}$$

де $D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$. Узагальнені розв’язки розуміємо аналогічно лінійному випадку.

Припускаємо, що $A_\alpha(x,\xi)$ при $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times R^M$, $\xi = \{\xi_\alpha : |\alpha| \le m\} \in R^M$ – вимірні функції, і виконуються нерівності з додатними сталими C_1, C_2, $p > 1$:

$$|A_\alpha(x,\xi)| \le C_1 (1 + |\xi|)^{p-1},$$

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x,\xi)\,\xi_0 C_2 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p - C_1\left(1 + \sum_{|\beta| \le m-1} |\xi_\beta|^p\right). \qquad (3)$$

Теорема 2. *Нехай* $n = mp$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ *– узагальнений розв’язок рівняння* (2) *і* A_α *– вимірні функції, які задовольняють умови* (3). *Тоді* $u \in C(\overline{\Omega})$ *і* $\|u\|_{c(\overline{\Omega})}$ *залежить тільки від* m, p, C_1, C_2, Ω і $\|u\|_{m,p}$.

Зауваження.

1. Умови (3) можна записати у більш загальному вигляді. Наприклад,

$$|A_\alpha(x,\xi)| \le C_1 \sum_{|\beta| \le m} |\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}} + h_\alpha(x), \quad h_\alpha \in L_{p_\alpha},$$

з відповідними $p_{\alpha\beta}, p_\alpha$.

2. Можна побудувати приклади, які показують, що умову $n = mp$ не можна послабити. А саме, для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати приклади розривних розв’язків рівняння (2), якщо $n - mp > \varepsilon$. 3. У випадку $n - mp < 0$ гельдеровість розв’язку $u(x)$ в умовах теореми 2 безпосередньо одержується з теорем вкладення. 4. Обмеженість розв’язку $u(x)$ в умовах теореми 2 доведено в [4].

1. *E. De Giorgy,* Memorie delle Acc. Sci. Forino, Ser. 3, **3**, 25 (1957). 2. *E. De Giorgy,* Boll. Un. Matem. Ital, Ser. 4, **1,** 135 (1968). 3. *В.Г.Мазья,* Функц. анализ, **2,** вып. 3, 53 (1968). 4. *J.Frehse,* Boll. Unione Mat. Haliana, **3,** 607 (1970).

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ НА ПЛОЩИНІ

(*Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1973, № 3*)

Квазілінійні еліптичні рівняння вищого порядку істотно відрізняються за своїми властивостями від рівнянь другого порядку. Це показали приклади, побудовані рядом авторів [1], в яких вказані необмежені розв'язки, якщо n – вимірність області – не менше п'яти. Нижче наводиться приклад негладкого розв'язку при $n \geq 3$. Випадок $n=2$ при певних умовах розглянув Нечас [2]. Припускалось, що рівняння можна включити в параметричну сім'ю спеціального вигляду, робилось ряд істотних припущень на коефіцієнти рівняння.

У даній статті одержана для $n=2$ регулярність узагальнених розв'язків при природних умовах – еліптичності рівняння і оцінках на ріст відповідних похідних коефіцієнтів рівняння.

1. Нехай $n>2$, $\varphi(t)$ – функція класу C^∞ на R^1 така, що $\varphi(t)\equiv 1$ при $t>\frac{1}{2}$, $\varphi(t)\equiv\frac{1}{4}$ при $t<\frac{1}{4}$.

Тоді функція $u(x)=|x|^{1-\varepsilon}$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ є узагальненим розв'язком у кулі $B=\left\{x\in R^n : |x|\leq 1\right\}$ рівняння Ейлера функціоналу

$$I(u)=\int_B\left\{\left[\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}}{\varphi^2(|\nabla u|)}+\sigma_1\delta_i^j\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]^2+\sigma_2\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2\right\}dx$$

де

$$\sigma_2=\frac{\left[(n-1-\varepsilon)\sigma_1-\varepsilon\right]\cdot\left[n-2-\varepsilon-\sigma_1(1+\varepsilon)\right]}{(1+\varepsilon)\,(n-1-\varepsilon)}.$$

Підбираємо σ_1 так, щоб σ_2 було додатним. Тоді рівняння Ейлера функціоналу I буде еліптичним.

2. Нехай $u\in W_p^m(\Omega)$ – узагальнений розв'язок рівняння

$$\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,u,\ldots,D^m u)=0\,, \tag{1}$$

тобто для довільної $v\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ виконується інтегральна тотожність

$$\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq m}A_\alpha(x,u,\ldots,D^m u)\,D^\alpha v\,dx=0\,.$$

Тут Ω – обмежена область в R^2, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$,

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\quad D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2},\qquad D^k u=\left\{D^\alpha u:|\alpha|=k\right\}.$$

Припускаємо, що функції $A_\alpha(x,\xi)$ два рази неперервно диференційовні по всіх аргументах при

$$x\in\overline{\Omega},\quad \xi=\left\{\xi_\alpha:|\alpha|\le m\right\}\in R^M$$

і виконуються оцінки, аналогічні [2], при

$$|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le m,\quad 1\le i,j\le 2,\quad C_1,\,C_2>0,\quad p\ge 2;$$

$$\left|\frac{\partial^2 A_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta\partial\xi_\gamma}\right|,\left|\frac{\partial^2 A_\alpha(x,\xi)}{\partial x_i\partial\xi_\beta}\right|,\left|\frac{\partial A_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\right|\le C_1(1+|\xi|)^{p-2},$$

$$\left|\frac{\partial^2 A_\alpha(x,\xi)}{\partial x_i\partial x_j}\right|\le C_1(1+|\xi|)^{p-1}. \tag{2}$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\frac{\partial A_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\eta_\alpha\eta_\beta\ge C_2(1+|\xi|)^{p-2}\cdot\sum_{|\alpha|=m}\eta_\alpha^2. \tag{3}$$

При виконанні цих умов справедливі наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $u(x)$ *– узагальнений розв'язок рівняння* (1). *Тоді для довільної підобласті* Ω' *області* Ω *такої, що* $\overline{\Omega}'\subset\Omega$ $\operatorname*{vrai\,max}_{\Omega'}|D^\alpha u|$ *при* $|\alpha|=m$ *оцінюється сталою, що залежить від* C_1, C_2, p, $\|u\|_{m,p}$ *і віддалі* Ω' *до* $\partial\Omega$. *Тут* $\|\cdot\|_{m,p}$ *– норма в* $W_p^m(\Omega)$.

Теорема 2. *Нехай* $u(x)$ *– узагальнений розв'язок рівняння* (1). *Тоді похідні порядку* m *функції* $u(x)$ *неперервні в* Ω.

Звідси і з теореми 11.4 роботи [3] одержуємо гладкість похідних порядку вищого, ніж m, при певній гладкості A_α. Так що, наприклад, у наших умовах неперервні похідні порядку $m+1$.

3. Зараз розглянемо поведінку узагальнених розв'язків в околі границі S області Ω. Нехай $u(x)$ – узагальнений розв'язок рівняння (1). Припускається, що для деякої строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω функції $A_\alpha(x,\xi)$ неперервно диференційовні при $x\in\overline{\Omega}/\Omega'$, $\xi\in R^M$ і виконані співвідношення з додатними сталими k_1, k_2:

$$\left|\frac{\partial A_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\right|\le k_1(1+|\xi|)^{p-2},\qquad \left|\frac{\partial A_\alpha(x,\xi)}{\partial x_i}\right|\le k_2(1+|\xi|)^{p-1},$$

$$\frac{\partial A_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}=\frac{\partial A_\beta(x,\xi)}{\partial\xi_\alpha},\quad |\alpha|=|\beta|=m. \tag{4}$$

Теорема 3. *Нехай* $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ *– узагальнений розв'язок рівняння* (1), *який має в* Ω *неперервні похідні* $m+1$ *порядку, границя* S *області* Ω *належить класу* $C^{m,\delta}$, $\delta>0$ *і* *функції* $A_\alpha(x,\xi)$ *задовольняють умови* (3), (4). *Тоді* $u(x)\in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, *де* λ – *деяка додатна стала.*

1. *E. Giusti, M. Miranda,* Boll. Un. Matem. Ital., ser. 4, 2, 219 (1968). 2. *Ч.Б. Морри,* Математика, сб. перев., **13**:3, 50 (1969). 3. *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг,* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, 1962, стор. 103.

УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

*(Известия АН СССР. – 1973. **– 37**)*

В работе изучаются свойства обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного вида

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x,u,\,\dots,\,D^m u) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x), \tag{0.1}$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, Ω – ограниченная область в n-мерном эвклидовом пространстве R^n; $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – мультииндекс, α_i – целые неотрицательные, $|\alpha|$ – длина мультииндекса α, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \quad D^k u=\{D^\alpha u : |\alpha|=k\}.$$

Предполагаются: эллиптичность уравнения (0.1), определенная гладкость функций $A_\alpha(x,\zeta)$ ($\zeta=\{\zeta_\alpha : |\alpha|\le m\}\in R^M$, M – число различных мультииндексов длины не большей, чем m) и некоторые оценки на рост $A_\alpha(x,\zeta)$ и их производных при $|\zeta|\to\infty$.

Проблема регулярности решений квазилинейных уравнений идет от Гильберта [1] (проблема № 19), который поставил вопрос: должны ли быть все решения регулярной вариационной задачи необходимо аналитическими функциями? В дальнейшем, по мере перехода от уравнений с аналитическими функциями к уравнениям с дифференцируемыми функциями, постановка проблемы регулярности расширяется: «дифференциальные свойства решений эллиптического уравнения внутри области их существования определяются дифференциальными свойствами функций, образующих эти уравнения, и не зависят ни от гладкости граничных значений, ни от того функционального пространства, в котором эти решения первоначально найдены» [2].

Дифференциальные свойства обобщенных решений уравнений второго порядка ($m=1$) изучались в работах многих авторов и обзор их результатов имеется в монографии [2].

Полное решение проблемы регулярности для многомерной задачи в случае уравнений второго порядка было получено О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой, доказавшими при естественных предположениях классическую гладкость произвольного обобщенного решения.

Для эллиптических систем уравнений высшего порядка проблема регулярности в классе аналитических функций рассмотрена И.Г. Петровским [3], установившим аналитичность всех достаточно гладких решений. Требование на априорную гладкость решения было ослаблено С. Агмоном, А. Дуглисом, Л. Ниренбергом [4]. Так, для уравнения (0.1) достаточно установить принадлежность решения классу $C^m(\Omega)$, так как дальнейшее повышение гладкости при гладких A_α, f_α непосредственно следует из [4]. Поэтому, ниже под регулярными решениями уравнения (0.1) мы понимаем решения класса $C^m(\Omega)$.

Недавно построены примеры (В.Г. Мазья [5], Де Джорджи [6], Э. Джусти и М.Миранда [7]), показывающие, что уравнения высшего порядка существенно отличаются по свойствам обобщенных решений от уравнений второго порядка. Так, при $n \geq 3, m \geq 2$ построены примеры уравнений вида (0.1) даже с аналитическими функциями A_α, f_α, но имеющими нерегулярные обобщенные решения.

Имеется небольшое число работ, в которых изучаются свойства обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка дивергентного вида.

Ч. Морри [8] доказал, что для каждого обобщенного решения $u(x)$ существует локально компактное множество Z меры нуль такое, что $u \in C^m(\Omega \setminus Z)$. В дальнейшем при определенных условиях было доказано [9], что Z имеет хаусдорфову меру нуль в определенной размерности.

Гладкость обобщенного решения в случае двух аргументов изучал И. Нечас [10] при ряде существенных дополнительных ограничений (предполагалось, что уравнение можно включить в параметрическое семейство уравнений специального вида, а также другие условия).

Уравнения специального вида рассмотрел А.С. Фохт [11]. Частичная регулярность обобщенных решений изучалась в работах [12]–[14].

В связи с контрпримерами, о которых говорилось выше, основной в проблеме регулярности решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка стала задача: установить минимальную априорную гладкость обобщенного решения, обеспечивающую его регулярность. Эта задача решается в настоящей работе: доказывается, что при естественных предположениях всякое обобщенное решение $u(x)$ уравнения (0.1) регулярно в Ω, если для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется условие

$$u\varphi \in B_2^{m+\frac{n}{2}}(\Omega) \tag{R}$$

($B_2^{m+\frac{n}{2}}$ – пространство О.В. Бесова [15]). Контрпримеры [16] показывают, что в условии (R) нельзя заменить $B_2^{m+\frac{n}{2}}$ на $B_q^{m+\frac{n}{2}}$ с $q < 2$.

Контрпримеры [5]–[7] относятся к случаю трех и более независимых переменных. Из результатов работы, в частности, следует, что при выполнении естественных предположений всякое обобщенное решение является регулярным в случае плоской области [17]. Выполнение условия (R) при $n=2$ для произвольного обобщенного решения следует из доказанного М.И. Вишиком [16] включения $u\in W_2^{m+1}(\Omega')$, справедливого для произвольной строго внутренней подобласти Ω' области Ω.

Отсюда и из [3] следует, что девятнадцатая проблема Гильберта имеет положительное решение в случае плоской области: всякое решение регулярной вариационной задачи необходимо аналитично, если функции, образующие уравнение, аналитичны.

Основной результат настоящей работы был анонсирован в заметке [17].

§ 1. Вспомогательные предложения

Пусть $f(x)$ – определенная на R^n функция и l – n-мерный вектор. $\Delta^k(l)f(x)$ – конечная разность функции f порядка k с шагом l – определяется равенством

$$\Delta^k(l)f(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j\,f(x+lj),\quad k=0,1,\dots. \tag{1.1}$$

При $k=1$ будем писать $\Delta(l)$ вместо $\Delta^1(l)$. Если $l=he_i$, $e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, где единица стоит на i-ом месте, h – вещественное число, то разностный оператор будем обозначать через $\Delta_i^k(h)$ вместо $\Delta^k(he_i)$.

Для произвольного мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и вещественного числа h определим:

$$\Delta^\alpha(h)f(x)=\Delta_1^{\alpha}(h)\dots\Delta_n^{\alpha_n}(h)f(x).$$

В дальнейшем будет применяться следующая «формула суммирования по частям»:

$$\int_{R^n}\Delta^\alpha(h)f(x)\cdot g(x)\,dx=\int_{R^n}f(x)\cdot\Delta^\alpha(-h)g(x)\,dx, \tag{1.2}$$

справедливая для определенных в R^n функций f,g, принадлежащих соответственно $L_p(R^n)$, $L_{p'}(R^n)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1,\ p>1$.

Лемма 1.1 *Пусть* $f_1(x),\dots,f_k(x)$ *– произвольные определенные в* R^n *функции. Тогда с некоторыми положительными постоянными* $C^{(\alpha)}_{\beta^{(1)},\dots,\beta^{(k)}}$ *имеет место равенство*

$$\Delta^\alpha(f_1\dots f_k)=\sum_{\beta^{(1)}+\dots+\beta^{(k)}=\alpha}C^{(\alpha)}_{\beta^{(1)},\dots,\beta^{(k)}}\Delta^{\beta^{(1)}}f_1(x+\mu^{(1)}h)\dots$$
$$\dots\Delta^{\beta^{(k-1)}}f_{k-1}(x+\mu^{(k-1)}h)\Delta^{\beta^{(k)}}f_k(x), \tag{1.3}$$

где $\beta^{(i)},\mu^{(i)}$ *– мультииндексы,* $\mu^{(i)}$ *зависят от* $\beta^{(1)},\dots,\beta^{(k)}$ *и* $\beta^{(i)}+\mu^{(i)}\le\alpha$.

Здесь и дальше для двух мультииндексов α и β будем писать $\alpha\le\beta$, если все координаты вектора $\beta-\alpha$ неотрицательны.

Соотношение (1.3) при $|\alpha|=1$ для $k=2$ проверяется непосредственно, а в случае произвольного k получается индукцией по k. Для мультииндексов α произвольной длины равенство (1.3) очевидным образом устанавливается индукцией по $|\alpha|$.

В дальнейшем нам понадобится еще следующее, проверяемое аналогично (1.3), соотношение:

$$\Delta^{\alpha}(h)(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \sum_{\substack{\nu+\beta\le\alpha \\ \mu\le\beta}} C_{\mu,\nu}^{(\beta,\alpha)}\, \Delta^{\beta}(h)\, f_1(x+\nu h)\cdot \Delta^{\alpha-\beta}(h)\, f_2(x+\mu h), \tag{1.4}$$

где $C_{\mu,\nu}^{(\beta,\alpha)}$ – положительные постоянные.

Обозначим для мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ длины k и вектора $t=(t_1,\ldots,t_n)$ через t_α вектор

$$\left(\sum_{1\le i\le\alpha_1} t_i\,,\quad \sum_{1\le i\le\alpha_2} t_{\alpha_1+i},\ldots,\sum_{1\le i\le\alpha_n} t_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+i}\right).$$

Лемма 1.2. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в* R^n *обобщенные производные до* k*-го порядка. Тогда для произвольного мультииндекса* $\alpha, |\alpha|=k$,

$$\Delta^{\alpha}(h)\, f(x) = h^k\cdot\int\limits_{I_k} D^{\alpha} f(x+t_\alpha h)\,dt, \tag{1.5}$$

где $dt=dt_1\ldots dt_k$, $I_k=\{t=(t_1,\ldots,t_k): 0\le t_i\le 1,\ i=1,\ldots,k\}$.

В случае гладкой функции $f(x)$ соотношение (1.5) легко проверяется для $|\alpha|=1$ и распространяется на случай любого α индукцией по $|\alpha|$. Пользуясь (1.2), проверяем, что (1.5) имеет место и тогда, когда f дифференцируема в обобщенном смысле.

Отметим сейчас в нужном для дальнейшего виде свойства одного класса дифференцируемых функций, введенного О.В. Бесовым. Пространством $B_p^l(R^n), l>0, p\ge 1$, называется замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в R^n функций но норме

$$\|u\|_{B_p^l} = \|u\|_{L_p(R^n)} + \|u\|_{b_p^l}\,,\quad \|u\|_{b_p^l} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\int\limits_0^\infty \frac{\left\|\Delta_i^k(h)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^m u\right\|_{L_p(R^n)}^p}{h^{1+p(l-m)}}\,dh\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

где k, m – целые числа, удовлетворяющие условиям $0\le m<l,\ k\ge l-m$. Известно, что выражения (1.6) при различных m, k дают эквивалентные нормы.

Из теорем вложения [15] следует, что для $u\in B_p^l(R^n)$ существует обобщенная производная $D^{\alpha}u$ и выполняется оценка

$$\left\| D^{\alpha} \right\|_{L_q(R^n)} \le C\{\lambda^{-\delta} \| u \|_{L_q(R^n)} + \lambda^{\varepsilon} \| u \|_{b_p^l}\}, \tag{1.7}$$

если только $q > p, |\alpha| \le l - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}$. Здесь $\varepsilon = 1 - \frac{1}{l}\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{q} + |\alpha|\right),\ \delta = 1 - \varepsilon,\ \lambda$ – произвольное положительное число.

Лемма 1.3. *Пусть* $f_i(h) = (f_{i1}(h), \dots, f_{in}(h)) \in R^n$, $i = 1, \dots, \sigma$, $f_{ij}(h)$ *– непрерывные функции, удовлетворяющие при* $h \ge 0$ *условию* $|f_{ij}(h)| \le K_0 h$, *и* s *– положительное число. Тогда при выполнении неравенств* $q > p,\ \varepsilon > 0, s \le l\varepsilon, s < \sigma$ *для* $u \in B_p^1(R^n)$ *имеет место оценка*

$$\left\{ \int_0^{\infty} \frac{\| \Delta(f_1(h)) \dots \Delta(f_{\sigma}(h)) D^{\alpha} u \|_{L_q(R^n)}^q}{h^{1+qs}} dh \right\}^{\frac{1}{q}} \le C\{\lambda^{-\delta - \frac{s}{l}} \| u \|_{L_p(R^n)} + \lambda^{\varepsilon - \frac{s}{l}} \| u \|_{b_p^l}\} \tag{1.8}$$

с постоянной C, *зависящей только от* $p, q, l, s, \sigma, K_0, n$. *Здесь* $\varepsilon, \delta, \lambda$ *– такие же, как и в* (1.7).

Доказательство неравенства (1.8) можно провести аналогично доказательству неравенства (1.5) работы [19] и поэтому мы его опускаем.

Нам понадобится одно неравенство для функций, принадлежащих пространству С.Л.Соболева $W_p^m(R^n)$. Через $B_R(x_0)$ обозначаем шар радиуса R с центром в x_0.

Лемма 1.4. *Пусть* $f(x)$ *– произвольная функция из* $W_n^1(B_R(x_0))$ *и предположим, что для некоторого измеримого подмножества* $G \subset B_R(x_0)$ *выполнены неравенства*

$$\operatorname{mes} G \ge C' \cdot R^n, \quad \operatorname*{vraimax}_{x \in G} |f(x)| \le C''$$

с положительными постоянными C', C''. *Тогда*

$$\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^n dx \le C_0 R^n \left\{ \int_{B_R(x_0)} |\nabla f(x)|^n dx + 1 \right\} \tag{1.9}$$

с постоянной C_0, *зависящей лишь от* n, C', C''. *Здесь*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right).$$

Подобные неравенства имеются, например, в [2] и доказательство леммы 1.4 можно провести аналогично.

Отметим еще несколько элементарных неравенств, которые будут использоваться в дальнейшем.

1) При произвольных векторах $a, b \in R^n$, $p \ge 0$

$$\int_0^1 (1 + |ta + (1-t)b|)^p dt \ge C(1 + |a| + |b|)^p \tag{1.10}$$

с положительной постоянной C, зависящей только от p.

2) Пусть N – число различных мультииндексов длины m и

$$T=\left\{\tau=(\tau_\gamma:|\gamma|=m)\in R^N:\tau_\gamma\ge 0,\ \sum_{|\gamma|=m}\tau_\gamma=1\right\}.$$

Тогда для любых неотрицательных чисел a_α, любого β, $|\beta|=m$, и $r>0$

$$\frac{1}{C(r+1)^N}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha^r\le\int_T\tau_\beta\left(\sum_{|\alpha|=m}\tau_\alpha a_\alpha\right)^r d\tau\le C\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha^r \tag{1.11}$$

с положительной постоянной C, зависящей только от m, n.

3) При произвольных положительных a, b, ε и $p>1$ справедливо неравенство Юнга

$$ab\le\frac{1}{p}(\varepsilon a)^p+\frac{1}{p'}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^{p'},\quad p'=\frac{p}{p-1}. \tag{1.12}$$

Неравенство (1.12) хорошо известно, неравенства (1.10), (1.11) легко проверяются.

§ 2. Первое основное неравенство

Здесь будет получена априорная оценка обобщенного решения уравнения (1.1). Будут рассматриваться обобщенные решения, удовлетворяющие условию (R), и поэтому условия на A_α будут формулироваться в более общем, чем обычно, виде.

Предполагаем, что функции $A_\alpha(x,\xi)$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ при $x\in\overline{\Omega},\ \xi\in R^M\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\text{целая часть }\frac{n}{2}\right)$ и удовлетворяют при $x\in\overline{\Omega},\ \xi\in R^M,\ \eta\in R^N$ условиям с $p\ge 2$:

1)

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}A_{\alpha\beta}(x,\xi)\eta_\alpha\eta_\beta\ge C_1(|\xi'|)\left(1+\sum_{|\gamma|=m}|\xi_\gamma|\right)^{p-2}\cdot\sum_{|\alpha|=m}\eta_\alpha^2; \tag{2.1}$$

2) при $|\delta|+s\le\left[\frac{n}{2}\right]+1,\ |\beta^{(i)}|\le m$:

а) $$|A^{(\delta)}_{\alpha\beta^{(1)}\dots\beta^{(s)}}(x,\xi)|\le C_2(|\xi'|)\left(1+\sum_{|\gamma|=m}|\xi_\gamma|\right)^{p_1} \tag{2.2}$$

с произвольным $p_1<+\infty$, если $|\delta|>0$ или $|\alpha|+|\beta^{(1)}|+\dots+|\beta^{(s)}|<(s+1)m$;

б) $$|A_{\alpha\beta^{(1)}\dots\beta^{(s)}}(x,\xi)|\le C_2(|\xi'|)\left(1+\sum_{|\gamma|=m}|\xi_\gamma|\right)^{p_2^{(s)}} \tag{2.3}$$

с $p_2^{(s)}=p-2$ при $s=1$, $p_2^{(s)}=p-3$ при $s>1$, если $|\delta|=0,\ |\alpha|=|\beta^{(1)}|=\ldots=|\beta^{(s)}|=m$.

Здесь

$$A^{(\delta)}_{\alpha\beta^{(1)}\dots\beta^{(s)}}(x,\xi)\equiv D_x^\delta\frac{\partial}{\partial\xi_{\beta^{(1)}}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_{\beta^{(s)}}}A_\alpha(x,\xi),$$

$$A_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\beta}^{(0)},$$

C_1, C_2 – положительные непрерывные функции, первая из которых невозрастающая, а вторая неубывающая. Функции $f_\alpha(x)$, стоящие в правой части уравнения (0.1), без ограничения общности можем считать заданными в R^n и предполагаем, что $f_a \in B_2^{p_0}(R^n)$ с некоторым $p_0 > \frac{n}{2}$.

Введем теперь понятие обобщенного решения уравнения (0.1). Функцию $u(x)$, удовлетворяющую условию (R), назовем обобщенным решением уравнения (0.1) в области Ω, если для произвольной $v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x, u, \dots, D^m u) D^\alpha v\, dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} f_\alpha(x) D^\alpha v\, dx. \tag{2.4}$$

В дальнейшем d – произвольное число, заключенное между нулем и единицей, и $m_1 = \max\left\{0, \left[\frac{n}{2}\right] + 1 - m\right\}$.

Пусть $u(x)$ – удовлетворяющее условию (R) обобщенное решение уравнения (0.1); подставим в (2.4)

$$v = \tau_{\beta'} \Delta^\beta(-h)\{[W_\tau(x,h)]^r \Delta^\beta(h) u \psi^s(x)\}, \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered} \tau = \{\tau_\gamma : |\gamma| = m\} \in T \subset R^N, \quad T = \left\{\tau : \tau_\gamma \ge 0, \sum_{|\gamma|=m} \tau_\gamma = 1\right\}, \\ W_\tau(x,h) = \sum_{|\gamma|=m} V_\gamma(x,h)\tau_\gamma, \quad V_\gamma(x,h) = 1 + \left(\frac{\Delta^\gamma(h)u}{h^m}\right)^2, \end{gathered} \tag{2.6}$$

β – произвольный мультииндекс длины $m + m_1$, β' – произвольный мультииндекс длины m такой, что $\beta' \le \beta$, $0 < h < \frac{d}{2(m+m_1)}$, r, s – произвольные, удовлетворяющие неравенствам $r \ge 0$, $2m \le s \le C_0(r+1)$ числа, $\psi(x)$ – произвольная функция, принадлежащая $C_0^\infty(\Omega_d)$ (Ω_d – подобласть области Ω, состоящая из всех тех точек, которые отстоят от границы Ω на расстояние, большее, чем d). Предполагаем, что для функции ψ и ее производных выполнены оценки

$$0 \le \psi(x) \le 1, \quad |D^\alpha \psi| \le K^{|\alpha|}, \quad |\alpha| \le m. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что для функции v, определяемой равенством (2.5), справедливо равенство (2.4). Используя (1.2), получим суммированием по β и интегрированием по τ:

$$\sum_{|\beta|=m+m_1} \sum_{|\alpha|\le m} \int_T \tau_{\beta'} \int_\Omega \Delta^\beta(h)[A_\alpha(x, u, \dots, D^m u) - f_\alpha(x)] \times$$

$$\times D^\alpha \{[W_\tau(x,h)]^r \Delta^\beta(h) u \cdot \psi^s(x)\}\, dx\, d\tau = 0. \tag{2.8}$$

Основное неравенство данного параграфа будет следовать из оценки формулы (2.8). Займемся преобразованием каждого из множителей, стоящих под знаком интеграла.

Лемма 2.1. *Пусть с некоторым* i_0 $\beta = e_{i_0} + \widetilde{\beta}$, $|\widetilde{\beta}| = m + m_1 - 1$. *Тогда при* $2 \le l \le \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ *имеет место равенство*

$$\Delta^{\beta}(h)\ A_{\alpha}(x, u, \dots, D^m u) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{\substack{|\beta| \le m \\ \mu \le \widetilde{\beta}}} C_{\mu}^{\beta} A_{\alpha\delta}(x + the_{i_0} + \mu h, \dots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x + \mu h))\, dt \times$$

$$\times \Delta^{\beta} D^{\delta} u + \sum_{k=2}^{l} \sum_{i=0}^{k} \sum_{\sigma_{k,i} \in R_{k,i}} h^{k-i} \prod_{j=1}^{i} \Delta^{\omega^{(j)}}(h) D^{\delta^{(j)}} u(x + \mu^{(j)} h) \times$$

$$\times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left\{ C_{\sigma_{k,i}}(t) \Delta^{\lambda} A^{(\kappa)}_{\alpha\delta^{(1)} \dots \delta^{(i)}}\ (x + t_{\rho} h + \nu h, \dots, \sum_{\mu \le \beta - \lambda} b_{\mu}(t) D^m u(x + \mu h) \right\} dt_1 \dots dt_k, \tag{2.9}$$

где C_{μ}^{β} *– положительные постоянные,* $\sum_{\mu \le \widetilde{\beta}} C_{\mu}^{\beta} = 1$, $C_{\sigma_{k,i}}$, b_{μ} *– непрерывные функции, зависящие только от* m, n*;* $\sigma_{k,i}$ *– следующий набор индексов:*

$$\{\lambda, \kappa, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(i)}, \rho, \nu, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(i)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(i)}\}$$

и множество $R_{k,i}$ *определяется соотношениями:*

$$\lambda + \omega^{(1)} + \dots + \omega^{(i)} + \kappa = \beta,\ \ |\kappa| = k - i,\ \ \omega^{(j)} + \mu^{(j)} \le \beta,$$

$$|\delta^{(j)}| \le m,\ \ |\rho| = k,\ \ \rho + \lambda + \nu \le \beta;\ \ \lambda = 0 \text{ при } k < l.$$

Доказательство леммы проведем индукцией по l. При $l = 2$ (2.9) следует из равенства

$$\Delta_{i_0}(h) A_{\alpha}(x, u, \dots, D^m u) = \int_0^1 \frac{d}{dt} A_{\alpha}(x + the_{i_0}, \dots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x))\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{|\delta| \le m} A_{\alpha\delta}(x + the_{i_0}, \dots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x)) \Delta_{i_0} D^{\delta} u(x) + \right.$$

$$\left. + A_{\alpha}^{(ei_0)}(x + the_{i_0}, \dots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x)) \cdot h \right\} dt \tag{2.10}$$

и формулы (1.4):

$$\Delta^{\beta}(h) A_{\alpha}(x, u, \dots, D^m u) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{|\delta| \le m} C_{\mu}^{\beta} A_{\alpha\delta}(x + the_{i_0} + \mu h, \dots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x + \mu h))\, dt \cdot \Delta^{\beta} D^{\delta} u +$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \sum_{\substack{|\delta| \le m \\ \gamma \le \widetilde{\beta}}} \sum_{\substack{\mu \le \gamma \\ \gamma \le \widetilde{\beta} - \gamma}} C_{\mu_{\gamma}}^{\beta} \Delta^{\widetilde{\beta} - \gamma} A_{\alpha\gamma}(x + the_{i_0} + \mu h, \dots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x + \mu h)) \times \right.$$

$$\left. \times \Delta_{i_0} \Delta^{\gamma} D^{\delta} u(x + \nu h) + \Delta^{\widetilde{\beta}}\ A_{\alpha}^{(ei_0)}(x + the_{i_0}, \dots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x))\, h \right\} dt.$$

Применяя к последним двух слагаемым соотношение вида (2.10), получим (2.9) при $l=2$. Предполагая по индукции доказанной формулу (2.9) при $l \le l_0$, получим ее для $l = l_0 + 1$, пользуясь формулами (1.4), (2.10).

Очевидно также, что в (2.9) можно добиться выполнения $\lambda = 0$ при $k < l$. В противном случае следует применить (2.10).

Оценим второе слагаемое в правой части (2.9). Функция $u(x)$, обобщенное решение уравнения (0.1), предполагается удовлетворяющей условию (R) и, следовательно, принадлежит $C^{m-1}(\overline{\Omega}_{\frac{d}{2}})$. Обозначим $\|u\|_{C^{m-1}(\overline{\Omega}_{\frac{d}{2}})}$ через M_0, и пусть $C_1 = C_1(M_0)$, $C_2 = C_2(M_0)$, где $C_1(t)$, $C_2(t)$ – функции из (2.1)–(2.3).

В дальнейшем в оценках буквой C без всяких индексов будем обозначать все постоянные, зависящие только от m, n, p, p_1, C_1, C_2.

Лемма 2.2. *При* $|\alpha| = m$ *выполнено равенство*

$$\Delta^{\beta}(h)\, A_{\alpha}(x, u, \ldots, D^m u) =$$

$$= R_1 + \int_0^1 \sum_{\substack{|\delta| \le m \\ \mu \le \beta}} C_{\mu}^{\beta} A_{\alpha\delta}(x + the_{i_0} + \mu h, \ldots, (1 + t\Delta_{i_0}) D^m u(x + \mu h))\, dt\, \Delta^{\beta} D^{\delta} u, \tag{2.11}$$

где для R_1 *имеет место оценка в* $\overline{\Omega}_d$*:*

$$|R_1| \le C \left\{ \sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \sum_{\sigma_k \in R_k^{(1)}} \left(1 + \sum_{\substack{|\gamma| = m \\ \mu \le \beta}} |D^{\gamma} u(x + \mu h)| \right)^{p-3} \times \right.$$

$$\times \prod_{j=1}^{k} |\Delta^{\omega^{(j)}}(h) D^{\delta^{(j)}} u(x + \nu^{(j)} h)| + \sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \sum_{i=0}^{k} h^{k-i} \times$$

$$\left. \times \sum_{\sigma_i \in R_{k,i}^{(2)}} \left(1 + \sum_{\substack{|\gamma| = m \\ \mu \le \beta}} |D^{\gamma} u(x + \mu h)|^{p_1} \right) \prod_{j=1}^{i} |\Delta^{\omega^{(j)}}(h) D^{\delta^{(j)}} u(x + \nu^{(j)} h)| \right\}. \tag{2.12}$$

Здесь

$$\sigma_i = \{\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(i)};\ \delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(i)};\ \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(i)}\},$$

$$R_k^{(1)} = \left\{ \sigma_k : |\delta^{(1)}| = \ldots = |\delta^{(k)}| = m,\ m + m_1 \ge \sum_{j=1}^{k} |\omega^{(j)}| \ge \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ \omega^{(j)} + \nu^{(j)} \le \beta,\ |\omega^{(j)}| > 0 \right\}, \tag{2.13}$$

$$R_{k,i}^{(2)} = \left\{ \sigma_i : k - i + \sum_{j=1}^{i} (m - |\delta^{(j)}|) > 0,\ |\delta^{(j)}| \le m,\ \omega^{(j)} + \nu^{(j)} \le \beta,\ m + m_1 \ge k - i + \sum_{j=1}^{i} |\omega^{(j)}| \ge \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ |\omega^{(j)}| > 0 \right\}.$$

Утверждение леммы 2.2 получается непосредственной оценкой из формулы (2.9) при $l = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ и применением неравенств (2.2), (2.3). Укажем теперь значение второго множителя подынтегрального выражения в (2.8).

Лемма 2.3. *Имеет место равенство*

$$D^{\alpha}\{[W_{\tau}(x,h)]^{r}\Delta^{\beta}(h)u\cdot\psi^{s}(x)\}=[W_{\tau}(x,h)]^{r}\Delta^{\beta}(h)D^{\alpha}u\cdot\psi^{s}(x)+$$

$$+\frac{2r}{h^{2m}}\sum_{|\gamma|=m}\tau_{\gamma}\cdot[W_{\tau}(x,h)]^{r-1}\Delta^{\gamma}(h)D^{\alpha}u\cdot\Delta^{\gamma}(h)u\cdot\Delta^{\beta}(h)u\cdot\psi^{s}(x)+R_{2}, \tag{2.14}$$

где для R_2 *выполнена оценка:*

$$|R_{2}|\le C(r+1)^{m}K^{m}\sum_{l=0}^{|\alpha|}[W_{\tau}(x,h)]^{r-1}\cdot\sum_{\substack{|\gamma^{(i)}|=m\\ \alpha^{(i)}<\alpha,\overline{\alpha}\le\alpha}}\prod_{i=1}^{2l}\left|\frac{\Delta^{\gamma^{(i)}}D^{\alpha^{(i)}}u}{h^{m}}\right|\cdot|\Delta^{\beta}D^{\alpha^{(0)}}u|\psi^{s-m}. \tag{2.15}$$

Здесь $\overline{\alpha}=\alpha^{(0)}+\alpha^{(1)}+\ldots+\alpha^{(2l)}$.

Индукцией по $|\alpha|$ нетрудно установить формулу для левой части (2.14). Из нее непосредственно, применяя (2.7), получаем утверждение леммы.

Теорема 2.1. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения (0.1), удовлетворяющее условию (R), и пусть выполнены условия (2.1)–(2.3),* $f_{\alpha}(x)\equiv B_{2}^{p_0}(R^{n})$ *при* $p_0>\frac{n}{2}$. *Существует последовательность* q_i, $i=1,\ldots,I$, $q_i\ge\left[\frac{n}{2}\right]+1$, *зависящая только от* m,n, *такая, что для произвольных чисел* d,r,s, *удовлетворяющих неравенствам* $0<d<1$, $r\ge 0$, $2m\le s\le C_0(r+1)$, *и произвольной функции* $\psi\in C_0^{\infty}(\Omega_d)$, *удовлетворяющей условию (2.7), при* $0<h<\frac{d}{2(m+m_1)}$ *имеет место оценка*

$$\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\int_{\Omega}[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[V_{\gamma}(x,h)]^{r}\times$$

$$\times(\Delta^{\beta}(h)D^{\alpha}u)^{2}\psi^{s}(x)dx\le C(r+1)^{2N+2m}K^{2m}\times$$

$$\times\left\{J_{r,s}(h,\psi)-\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ |\gamma|=m,|\alpha|\le m}}\int_{\Omega}[V_{\gamma}(x,h)]^{r}(\Delta^{\beta}(h)f_{\alpha}(x))^{2}\psi^{s}(x)dx\right\}, \tag{2.16}$$

$$J_{r,s}(h,\psi)\equiv\sum_{\substack{|\mu|\le m+m_1\\ |\gamma|=m}}\sum_{i=1}^{I}\int_{\Omega}\left\{[W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}}\sum_{\substack{1\le|\omega|<q_i\\ |\delta|=m}}|\Delta^{\omega}D^{\delta}u|^{\frac{2q_i}{|\omega|}}[V_{\gamma}(x,h)]^{r}+\right.$$

$$+[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[V_{\gamma}(x,h]^{r-1}\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ 1\le|\omega+\alpha|-m<q_i}}\left|\frac{D^{\alpha}\Delta^{\omega}u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}}+$$

$$+[W(x+\mu h)]^{\overline{p}}[V_{\gamma}(x,h)]^{r}\left(\sum_{\substack{1\le|\omega|\le q_i\\ |\delta|<m}}|D^{\delta}\Delta^{\omega}u(x)|^{\frac{2q_i}{|\omega|}}+\right.$$

$$\left.\left.+h^{2}\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ 1\le|\alpha+\omega|-m\le q_i}}\left|\frac{D^{\alpha}\Delta^{\omega}u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}}+h^{n+1}\right)\right\}\psi^{s-2m}(x)dx$$

с постоянной C, *зависящей только от* m,n,p,p_1,C_0,C_1,C_2. *Здесь*

$$W(x)=1+\sum_{|\delta|=m}|D^{\delta}u(x)|^2,\ \ \overline{p}=(p_1+2)(m+m_1).$$

Доказательство. Оценку (2.16) мы получим, оценивая левую часть формулы (2.8) на основании лемм 2.2–2.4. Покажем, как оценивать члены, возникающие при перемножении правых частей формул (2.11), (2.13) и (2.14). Неравенство

$$\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\tilde\beta}}\ \sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\alpha|=m}}\int_0^1 C_\mu^\beta A_{\alpha\delta}(x+the_{i_0}+\mu h,\dots,(1-t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))\,dt\times$$

$$\times\Delta^\beta D^\delta u\cdot\Delta^\beta D^\alpha u\cdot\psi^s(x)\cdot\int_T \tau_{\beta'}\cdot[W_\tau(x,h)]^r d\tau\ge$$

$$\ge\frac{1}{C(r+1)^N}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\ \sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\alpha|=m}}(W(x+\mu h))^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r\times$$

$$\times(\Delta^\beta D^\alpha u)^2\psi^s(x)-C(r+1)^N\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\ \sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\delta|<m}}(W(x+\mu h))^{p_3}\cdot[V_\gamma(x,h)]^r(\Delta^\beta D^\delta u)^2\psi^s(x) \qquad (2.17)$$

Следует из (2.1), (2.2) и (1.10)–(1.12); $p_3=p_1-\dfrac{p-2}{2}$.

Аналогично, при $m_1=0$ имеем:

$$\sum_{\substack{|\gamma|=|\beta|=m\\ \mu\le\beta}}\ \sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\alpha|=m}}\int_T\int_0^1 C_\mu^\beta A_{\alpha\beta}(x+the_{i_0}+\mu h,\dots,(1+t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))dt\times$$

$$\times\tau_\beta\Delta^\beta D^\delta u\cdot\frac{2r}{h^{2m}}[W_\tau(x,h)]^{r-1}\tau_\gamma\Delta^\gamma(h)D^\alpha u\cdot\Delta^\gamma(h)u\cdot\Delta^\beta(h)u\cdot\psi^s(x)d\tau\ge$$

$$\ge\frac{r}{Ch^{2m}}\sum_{|\alpha|=m}\int_T[W(x)]^{\frac{p-2}{2}}[W_\tau(x,h)]^{r-1}\left(\sum_{|\beta|=m}\tau_\beta\Delta^\beta D^\alpha u\cdot\Delta^\beta u\right)^2\psi^s(x)d\tau-$$

$$-Cr\sum_{\substack{|\beta|=m\\ \mu\le\beta}}\ \sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\delta|<m}}[W(x+\mu h)]^{p_3}[V_\gamma(x,h)]^r(\Delta^\beta(h)D^\delta u)^2\psi^s(x)-$$

$$-Crh^2\sum_{\substack{|\beta|=m\\ \mu\le\beta}}\ \sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\delta|=m}}(W(x+\mu h))^{p_3}[V_\gamma(x,h)]^r(\Delta^\beta(h)D^\delta u)^2\psi^s(x)-$$

$$-Cr\sum_{\substack{|\beta|=m\\ \mu\le\beta}}\ \sum_{\substack{|\gamma|=|\delta^{(1)}|=m\\ |\delta^{(2)}|<m,e_i+\nu\le\beta}}(W(x+\mu h))^{p_3}[V_\gamma(x,h)]^r(\Delta^\beta D^{\delta^{(1)}}u)^2(\Delta_i D^{\delta^{(2)}}u(x+\nu h))^2\psi^s-$$

$$-Cr\sum_{\substack{|\gamma|=|\beta|=|\delta^{(1)}|=|\delta^{(2)}|=m\\ \mu\le\beta,e_i+\nu\le\beta}}(W(x+\mu h))^{\frac{p-4}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r(\Delta^\beta D^{\delta^{(1)}}u)^2(\Delta_i D^{\delta^{(2)}}u(x+\nu h))^2\psi^s(x). \qquad (2.18)$$

Здесь при оценке для $|\alpha|=|\delta|=m$ мы использовали представление

$$A_{\alpha\delta}(x+the_{i_0}+\mu h,\dots,(1+t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))=$$
$$=A_{\alpha\delta}(x,\dots,D^m u(x))+[A_{\alpha\delta}(x+the_{i_0}+\mu h,\dots$$
$$\dots,(1+t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))-A_{\alpha\delta}(x,\dots,D^m u(x))],$$

и соответствующий первому слагаемому член оценивали с помощью (2.1).

При $m_1>0$ левую часть (2.18) оценим по абсолютной величине; она не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{C(r+1)^N}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\alpha|=m}}(W(x+\mu h))^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r\times$$

$$\times(\Delta^\beta(h)D^\alpha u)^2\psi^s(x)+\frac{C(r+1)^{N+2}}{\varepsilon}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\alpha|=|\beta|=m}}(W(x+\mu h))^{\frac{p-2}{2}}\times$$

$$\times[V_\gamma(x,h)]^{r-1}\left[|\Delta^\rho D^\alpha u|^{\frac{2(m+m_1)}{m}}+\left|\frac{\Delta^\beta u}{h^m}\right|^{\frac{2(m+m_1)}{m_1}}\right]\psi^s(x)+$$

$$+C\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\delta|<m}}(W(x+\mu h))^{p_3}[V_\gamma(x,h)]^r\,|\Delta^\beta D^\delta u|^2\,\psi^s(x).$$

Используя (2.2), (2.3), (2.15), (1.12), получаем

$$\left|\int_0^1\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\tilde\beta}}\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ |\delta|\le m}}C_\mu^\beta A_{\alpha\delta}(x+the_{i_0}+\mu h,\ldots,(1+t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))dt\cdot\Delta^\beta D^\delta u\cdot R_2\right|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon\cdot C}{(r+1)^N}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\alpha|=m}}(W(x+\mu h))^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r\cdot(\Delta^\beta D^\delta u)^2\psi^s(x)+$$

$$+\frac{C}{\varepsilon}(r+1)^{2m+N}K^{2m}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1,\ \mu\le\beta\\ |\gamma|=m,\ |\delta|<m}}(W(x+\mu h))^{p_3}\cdot[V_\gamma(x,h)]^r\cdot(\Delta^\beta D^\delta u)^2\psi^{s-2m}(x)+$$

$$+\frac{C}{\varepsilon}(r+1)^{2m+N}K^{2m}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=|\delta|=m\\ 0<|\alpha|<m}}(W(x+\mu h))^{\frac{p-2}{2}}\cdot[V_\gamma(x,h)]^{r-1}\times$$

$$\times\left\{\left|\frac{D^\alpha\Delta^\delta u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2(m+m_1)}{|\alpha|}}+\left|\frac{D^\alpha\Delta^\beta u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2(m+m_1)}{m_1+|\alpha|}}+h^{2(m+m_1)}\right\}\psi^{s-2m}(x). \tag{2.19}$$

Оценка

$$|R_1[W_\tau(x,h)]^r\cdot\Delta^\beta(h)D^\alpha u\cdot\psi^s(x)|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon\cdot C}{(r+1)^N}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\alpha|=m}}(W(x+\mu h))^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r\cdot(\Delta^\beta D^\alpha u)^2\psi^s(x)+$$

$$+\frac{C}{\varepsilon}(r+1)^N\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\alpha|=m}}\sum_{\substack{l=\left[\frac{n}{2}\right]+1\\ 0<|\omega|<l,\ \omega+\nu\le\beta}}^{m+m_1}(W(x+\mu h))^{\frac{p-4}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r\,|\Delta^\omega D^\delta u(x+\nu h)|^{\frac{2l}{|\omega|}}\cdot\psi^s(x)+$$

$$+\frac{C(r+1)^N}{\varepsilon}\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}}\sum_{\substack{|\gamma|=m\\ |\delta|<m}}\sum_{\substack{l=\left[\frac{n}{2}\right]+1\\ 0<|\omega|<l,\ \omega+\nu\le\beta}}^{m+m_1}(W(x+\mu h))^{\bar p}[V_\gamma(x,h)]^r\{h^{2l}+|\Delta^\omega D^\delta u(x+\nu h)|^{\frac{2l}{|\omega|}}\}\cdot\psi^s(x) \tag{2.20}$$

получается из (2.12), (1.12).

Аналогично оцениваются остальные члены, возникающие при перемножении правых частей формул (2.11), (2.13) и (2.14). Основное неравенство (2.16) непосредственно следует при соответствующем выборе $\varepsilon > 0$ из (2.17)–(2.20) и аналогичных оценок для остальных членов. Эти заканчивается доказательство теоремы.

Отметим, что при выполнении условий теоремы неравенство вида (2.16) справедливо и при $r < 0$. Дадим нужное в дальнейшем уточнение формулы (2.16) в случае малых r. При этом мы используем очевидное неравенство

$$\frac{1}{C}\left\{\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\right\}^\lambda \le \int_T \left\{\sum_{|\alpha|=m} \tau_\alpha a_\alpha\right\}^\lambda \prod_{|\alpha|=m} \tau_\alpha^k d\tau \le C\left\{\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\right\}^\lambda, \tag{2.21}$$

справедливое для любых неотрицательных чисел a_α, отрицательного λ и неотрицательного k таких, что $\lambda + k > -1$. В случае $r < 0$ изменим (2.8), умножая равенство (2.4) после подстановки в него (2.5) на $\prod_{|\alpha|=m} \tau_\alpha^k$ с $r + k > 0$ и интегрируя затем по τ. Тогда, повторяя дословно доказательство теоремы 2.1 с использованием (2.21), получим следующую лемму.

Лемма 2.4. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условию* (R), *и пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3), $f_\alpha \in B_2^{p_0}(R^n)$. *Для произвольных чисел* r, s, *удовлетворяющих неравенствам* $|r| \le C_0, 2m \le s \le C_0$, *и произвольной функции* $\psi \in C_0^\infty(\Omega_d)$, *удовлетворяющей условию* (2.7), *справедлива оценка:*

$$\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ \mu\le\beta}} \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega [W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}} [W(x,h)]^r \cdot (\Delta^\beta(h) D^\alpha u)^2 \cdot \psi^s(x)dx \le$$

$$\le CK^{2m}\left\{\bar{J}_{r,s}(h,\psi) + \sum_{\substack{|\beta|=m+m_1\\ |\alpha|\le m,\, |\gamma|=m}} \int_\Omega [V_\gamma(x,h)]^r \,|\Delta^\beta f_\alpha|^2\, \psi^s(x)dx\right\},$$

$$\bar{J}_{r,s}(h,\psi) = \sum_{|\mu|\le m+m_1} \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega \left\{[W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}} [W(x,h)]^r \sum_{\substack{|\delta|=m\\ 1\le|\omega|<q_i}} |\Delta^\omega D^\delta u(x)|^{\frac{2q_i}{|\omega|}} + \right.$$

$$+ [W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}} [W(x,h)]^{r-1} \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ 1\le|\alpha+\omega|-m<q_i}} \left|\frac{D^\alpha \Delta^\omega u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}} +$$

$$+ [W(x+\mu h)]^{\bar{p}} [W(x,h)]^r \left(\sum_{\substack{1\le|\omega|\le q_i\\ |\delta|<m}} |\Delta^\omega D^\delta u(x)|^{\frac{2q_i}{|\omega|}} + \right.$$

$$\left.\left. + h^2 \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ 1\le|\alpha+\omega|-m<q_i}} \left|\frac{D^\alpha \Delta^\omega u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}} + h^{n+1}\right)\right\} \psi^{s-2m}(x)dx, \tag{2.22}$$

где $q_i, C, \bar{p}$ *– такие же, как и в* (2.16),

$$W(x,h) = 1 + \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{\Delta^\alpha u}{h^m}\right)^2.$$

§ 3. Второе основное неравенство

Сохраним все обозначения предыдущего параграфа и займемся оценкой выражения

$$J^*_{r,s}(H,\psi)=\int\limits_0^H \frac{1}{h^{1+n}}J_{r,s}(h,\psi)dh+\sum_{|\gamma|=m}\int\limits_{\Omega}[V_\gamma(x)]^{r+\bar\rho}\psi^{s-2m}(x)dx+$$

$$+\sum_{\substack{|\beta|=|\gamma|=m\\|\mu|\le m+m_1}}\sum_{\substack{|\nu|\le m+m_1\\0<|\omega|<m+m_1}}\int\limits_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int\limits_\Omega\{W^{\frac{p-2}{2}}(x+\mu h)([V_\gamma(x)]^{r-1}+[V_\gamma(x,h)]^{r-1})+$$

$$+W^{\frac{p-4}{2}}(x+\mu h)([V_\gamma(x)]^{r}+[V_\gamma(x,h)]^{r})+[V_\gamma(x+\mu h)]^{r+\frac{p}{2}-2}\}\times$$

$$\times[|\Delta^\omega(h)D^\beta u(x+\nu h)|^{\frac{2(m+m_1)}{|\omega|}}+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_\beta h)D^\beta u(x)|^{2(m+m_1)}\,dt]\cdot\psi^{s-2m}(x)dx, \tag{3.1}$$

$$V_\gamma(x)=1+|D^\gamma u(x)|^2,$$

при определенном выборе r,s,H,ψ. Значение $J_{r,s}(H,\psi)$ определено в (2.16).

Будем теперь предполагать, что для некоторых чисел $\tilde r,\tilde s$ и некоторых функций $\tilde\psi(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, и $0<\tilde H<\dfrac{d}{2(m+m_1)}$ при $0\le r\le\tilde r, 2m\le s\le\tilde s$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\tilde H}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{|\gamma|=m\\|\alpha|=m}}\frac{1}{h^{1+n}}|\Delta_i^{m+m_1}(h)\{[V_\gamma(x)]^r D^\alpha u\tilde\psi^s(x)\}|^2\,dxth. \tag{3.2}$$

Из условия (R) следует существование интеграла (3.2) при $r=0$, произвольных $s,\tilde H,\tilde\psi$. В дальнейшем будет доказано, что интегралы вида (3.2) конечны при всех r,s,H и определенном выборе ψ.

На протяжении всего параграфа будет показано, как оценивать различные слагаемые, входящие в $J^*_{r,s}(H,\psi)$, через интегралы вида (3.2), а основное неравенство подытожит все эти рассмотрения и будет приведено в конце параграфа.

Третье слагаемое в $J^*_{r,s}(H,\psi)$ и члены, соответствующие первому и второму слагаемому подынтегральной функции выражения $J_{r,s}(h,\psi)$, оцениваются однотипно, и мы получим оценку только одного из членов. Выражение

$$J^{(1)}=\int\limits_\Omega[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x,h)]^{r-1}\left|\frac{D^\alpha\Delta^\omega u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}}\psi^{s-2m}(x)dx$$

при $r\ge1, |\alpha|\le m, 1\le|\alpha+\omega|-m<q_i$ оценим сначала по неравенству Юнга, а затем воспользуемся соотношением (1.5), представляя ω в виде $\omega'+\omega''$, $|\omega'|=m-|\alpha|$. Тогда получим:

$$J^{(1)}\le C\int\limits_\Omega\{[V_\gamma(x+\mu h)]^{r+\frac{p}{2}-2}+[V_\gamma(x,h)]^{r+\frac{p}{2}-2}\}\left|\frac{D^\alpha\Delta^\omega u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}}\psi^{s-2m}(x)dx\le$$

$$\le C\sum_{|\gamma|=m}\int_{I_{|\omega'|}}\int_{\Omega}[V_\gamma(x+\mu h)]^{r+\frac{p}{2}-2}\,|\Delta^{\omega}D^{\alpha+\omega'}u(x+t_{\omega'}h)|^{\frac{2q_i}{|\omega''|}}\,\psi^{s-2m}(x)dxdt+$$

$$+C\int_{I_{|\omega'|}}\left\{\int_{I_m}\int_{\Omega}[V_\gamma(x+\tau_\gamma h)]^{r+\frac{p}{2}-2}\,|\Delta^{\omega''}D^{\alpha+\omega'}u(x+t_{\omega'}h)|^{\frac{2q_i}{|\omega''|}}\,\psi^{s-2m}(x)dxd\tau\right\}dt. \tag{3.3}$$

Ограничимся далее рассмотрением только второго слагаемого справа, так как первое оценивается аналогично. Выберем число θ, меньшее единицы, так, чтобы оно удовлетворяло условиям:

$$\theta>\begin{cases}\dfrac{[q_i]}{q_i}, \text{ если } q_i - \text{не целое число,}\\[2mm] \dfrac{q_i-1}{q_i}, \text{ если } q_i - \text{ целое число.}\end{cases}$$

Неравенство

$$\int_{I_{|\omega'|}}\int_{I_m}\int_{\Omega}[V_\gamma(x+\tau_\gamma h)]^{r+\frac{p}{2}-2}\,|\Delta^{\omega''}D^{\alpha+\omega'}u(x+t_{\omega'}h)|^{\frac{2q_i}{|\omega''|}}\,\psi^{s-2m}(x)dxd\tau dt\le$$

$$\le\left\{\int_{I_{|\omega'|}}\int_{\Omega}|\Delta^{\omega''}(D^{\alpha+\omega'}u(x+t_{\omega'}h))\psi^{\overline{m}}(x)|^{\frac{2q_i}{|\omega''|}}dxdt\right\}^{1-\frac{|\omega''|}{q_i\theta}}\{J^{(2)}\}^{\frac{|\omega''|}{q_i\theta}}, \tag{3.4}$$

где

$$J^{(2)}=\int_{I_{|\omega'|}}\int_{I_m}\int_{\Omega}\{[V_\gamma(x+\tau_\gamma h)]^{\frac{\theta(r+r_1)}{2}}\,|\Delta^{\omega''}D^{\alpha+\omega'}u(x+t_{\omega'}h)|\,\psi^{\frac{\theta(s+s_1)}{2}}(x)\}^{\frac{2q_i}{|\omega''|}}dxd\tau dt,$$

$$s_1=2\overline{m}(1+\max_i q_i),\ \ r_1=\frac{p}{2}-2,\ \ \overline{m}=m+\max_i q_i,$$

получается применением неравенства Гельдера. В выражении $J^{(2)}$ в интеграле по Ω сделаем замену $x=y-\tau_\gamma h$ и предположим, что существует функция $\psi_1(x)$ класса $C_0^\infty(\Omega_d)$ такая, что для $|\gamma|=m,\ x\in\Omega, 0<h\le H,\ \tau\in I_m$

$$\begin{gathered}\psi_1(x)\cdot\psi_1(x+\tau_\gamma h)=\psi(x),\ \ 0\le\psi_1(x)\le 1,\\ |D^\alpha\psi_1(x)|\le K_1^{|\alpha|},\ \ |\alpha|\le m.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Тогда

$$J^{(2)}\le\int_{I_{|\omega'|}}\int_{I_m}\int_{\Omega}\{[V_\gamma(y)]^{\frac{\theta(r+r_1)}{2}}\,|\Delta^{\omega''}D^{\alpha+\omega'}u(y+t_{\omega'}h-\tau_\gamma h)|\,\psi_1^{\frac{\theta(s-s_1)}{2}}(y)\}^{\frac{2q_i}{|\omega''|}}dyd\tau dt\le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{2}\int_{I_{|\omega'|}}\int_{I_m}\int_{\Omega}\{[V_\gamma(y)]^{\frac{\theta(r+r_1)}{2}}\,|\Delta(f_1^{(j)}h)\ldots\Delta(f_{|\omega''|}^{(j)}h)D^{\alpha+\omega'}u(y)|\times$$

$$\times\psi_1^{\frac{\theta(s+s_1)}{2}}(y)\}^{\frac{2q_i}{|\omega''|}}dyd\tau dt, \tag{3.6}$$

где $f_k^{(j)}=f_k^{(j)}(t,\tau)\in R^n$ – непрерывные вектор-функции аргументов $t,\tau, |f_k^{(j)}|\le 2m$.

Дальнейшая оценка основана на преобразовании выражения в фигурной скобке в (3.6).

Лемма 3.1. *Пусть* $l_1,\ldots,l_k$ $-$ n*-мерные векторы,* $k>1$, $r\ge r_0>\frac{1}{2}$. *Имеет место оценка:*

$$\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}[V_\gamma(x)]^r\,|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\beta u(x)|\le$$

$$\le C\left\{\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)\{[V_\gamma(x)]^r D^\beta u(x)\}|+rR_3\right\},\qquad(3.7)$$

где

$$R_3=C\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}r^{k-j+1}\sum_{\mu,\nu,I_j}[V_\gamma(x+\mu)]^r\,|\Delta(l_{i_1})\ldots\Delta(l_{i_j})D^\beta u(x+\nu)|^{\frac{k}{j}}$$

с постоянной C*, зависящей только от* r_0,k,m,n*. Здесь суммирование по* μ,ν,I_j *распространяется по всем таким индексам, что* $\mu=\varepsilon_1 l_1+\ldots+\varepsilon_k l_k,\nu=\sum_{i\notin I_j}\varepsilon_i l_i$, ε_i *принимают значения* 0 *или* 1 *и* $I_j=(i_1,\ldots,i_j)$ $-$ *подпоследовательность из* $1,\ldots,k$.

Доказательство. Индукцией по k легко получить формулу для члена R_4 в равенстве

$$\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)\{[V_\gamma(x)]^r D^\beta u\}=[V_\gamma(x)]^r\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\beta u+$$

$$+2r\int_0^1[(1+t\Delta(l_1))V_\gamma(x)]^{r-1}dt\cdot D^\gamma u(x)\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\gamma u\cdot D^\beta u+R_4\qquad(3.8)$$

и оценку $|R_4|\le R_3$. При этом мы пользуемся равенством вида (1.3) и представлением

$$\Delta(l_1)[V_\gamma(x)]^r=\int_0^1\frac{d}{dt}[(1+t\Delta(l_1))V_\gamma(x)]^r dt=$$

$$=r\int_0^1[(1+t\Delta(l_1))V_\gamma(x)]^{r-1}dt\cdot\Delta(l_1)V_\gamma(x).$$

Непосредственно из (3.8) получаем:

$$|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)\{[V_\gamma(x)]^r D^\gamma u(x)\}|\ge$$

$$\ge\int_0^1[(1+t\Delta(l_1))V_\gamma(x)]^r dt\cdot|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\gamma u(x)|-R_5,\qquad(3.9)$$

где $|R_5|\le R_3$.

Из (3.8), применяя неравенство Юнга с ε к последнему слагаемому правой части, находим

$$[V_\gamma(x)]^r\,|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\beta u|\le|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)\{[V_\gamma(x)]^r D^\beta u\}|+$$

$$+\varepsilon^{2r}[V_\beta(x)]^r\,|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\gamma u|+|R_4|+$$

$$+Cr\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{2r}{2r-1}}\{[V_\gamma(x)]^r+[V_\gamma(x-l_1)]^r\}\cdot|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\gamma u|.\qquad(3.10)$$

Для третьего слагаемого правой части (3.10) получим из (3.9) оценку:

$$\{[V_\gamma(x)]^r+[V_\gamma(x+l_1)]^r\}\cdot|\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)D^\gamma u|\le$$

$$\leq C\{| \Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)\{[V_\gamma(x)]^r D^\gamma u\} | + | R_5 |\}, \tag{3.11}$$

и неравенство (3.7) следует теперь из (3.10), (3.11) при достаточно малом положительном ε.

Аналогично доказывается

Лемма 3.2. *Пусть* l *– произвольный* n*-мерный вектор,* $r \geq r_0 > \frac{1}{2}$. *Имеет место оценка*

$$\sum_{|\beta|=|\gamma|=m} [V_\gamma(x)]^r \, | \Delta(l) D^\beta u(x) | \leq$$

$$\leq Cr \sum_{|\beta|=|\gamma|=m} \{| \Delta(l)\{[V_\gamma(x)]^r D^\beta u\} | + | \Delta(l)\{[V_\gamma(x)]^r D^\gamma u\} | \cdot | \Delta(l) D^\beta u |\} \tag{3.12}$$

с постоянной C*, зависящей только от* m, n, r_0.

При доказательстве (3.12) мы пользуемся еще неравенством

$$[V_\gamma^r(x) + V_\gamma^r(x+l)] \cdot | \Delta(l) D^\gamma u(x) | \leq C \, | \Delta(l)\{V_\gamma^r(x) \cdot D^\gamma u(x)\} |,$$

непосредственно следующим из соотношения

$$\Delta(l)\{V_\gamma^r(x) \cdot D^\gamma u(x)\} = \frac{1}{2}\{[V_\gamma^r(x+l) + V_\gamma^r(x)] \cdot \Delta(l) D^\gamma u(x) +$$
$$+ \Delta(l) V_\gamma^r(x) \cdot [D^\gamma u(x+l) + D^\gamma u(x)]\}.$$

Отметим, что в формуле (2.16) $| \omega | \leq \overline{m}$.

Предположим существование последовательности $\psi_k(x),\ k = 1,\ldots,2\overline{m}+1$, такой, что $\psi_k(x) \in C_0^\infty(\Omega_d)$ и для произвольного $y \in R^n$, $y \leq 2^{k-1}\overline{m}^k H$, имеем:

$$\begin{aligned} &\psi_{k-1}(x) \cdot \psi_k(x+y) \equiv \psi_{k-1}(x),\ \psi_0(x) \equiv \psi(x), \\ &0 \leq \psi_k(x) \leq 1,\ \ | D^\alpha \psi_k(x) | \leq K_k^{|\alpha|},\ \ | \alpha | \leq \overline{m}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Можем считать, что $K_i \geq K_{i-1}$.

Применяя леммы 3.1 и 3.2 к интегралу $J^{(2)}$, получим при $\theta\left(r + \frac{\rho}{2} - 2\right) > 1$ индукцией по $| \omega'' |$ оценку

$$J^2 \leq Cr^{6q_i} \sum_i \sum_{\substack{|\rho|=|\beta|=|\gamma|=m \\ k \leq k_1 \leq |\omega''|}} \left\{ \left(\int_\Omega | \Delta(\widetilde{l}_{1j}) \ldots \Delta(\widetilde{l}_{k_{1}j}) D^\rho u(x) \psi_{|\omega''|}^{\overline{m}}(x) |^{\frac{2q_i}{k_1}} \, dx \right)^{1-\frac{k}{|\omega''|}} \times \right.$$

$$\times \left[\int_\Omega (| \Delta(l_{1j}) \ldots \Delta(l_{kj})([V_\gamma(x)]^{\frac{\theta(r+r_1)}{2}} D^\beta u(x)) | \times \right.$$

$$\left. \times \psi_{|\omega''|}^{\frac{\theta(s-s_1)}{2}}(x))^{\frac{2q_i}{k}} \, dx \right]^{\frac{k}{|\omega''|}} + \left[\int_\Omega | \Delta(l_{1j})([V_\gamma(x)]^{\frac{\theta(r+r_1)}{2}} D^\gamma u(x)) \times \right.$$

$$\left. \times \psi^{\frac{\theta(s-s_1)}{2}}(x) |^{4q_i} \, dx \right]^{\frac{1}{2|\omega''|}} \left[\int_\Omega (| \Delta(\widetilde{l}_{1j}) D^\rho u \times \right.$$

$$\times\psi^{\overline{m}}_{|\omega''|}(x)|^{4q_i}+\sum_{\lambda=1}^{|\omega''|}|\Delta(\widetilde{l}_{ij})\ldots\Delta(\widetilde{l}_{\lambda j})D^{\rho}u\psi^{\overline{m}}_{|\omega''|}(x)|^{\frac{2q_i}{\lambda}})dx\Bigg]^{1-\frac{1}{2|\omega''|}}\Bigg\}, \qquad (3.14)$$

где $\widetilde{l}_{kj}, l_{kj}$ – некоторые n-мерные векторы, $|\widetilde{l}_{kj}|, |l_{kj}| \le (2\overline{m})^{|\omega''|}h, j$ пробегает конечную, зависящую лишь от m, n последовательность номеров.

При дальнейшей оценке интеграла из правой части (3.14) будет применяться следующая

Лемма 3.3. *Пусть* $l_1,\ldots,l_\lambda$ – n*-мерные векторы,* $|l_i| \le 2^{k-1}\overline{m}^k h, q > 1$*. Тогда для произвольной функции* $f(x)$

$$\int_\Omega |\Delta(l_1)\ldots\Delta(l_\lambda)[f(x)]\psi^s_k(x)|^q\,dx \le$$

$$\le C\sum_{\nu=0}^{\lambda}\sum_{i_1,\ldots,i_\nu}(K_{k+\lambda}sh)^{q(\lambda-\nu)}\int_\Omega|\Delta(l_{i_1})\ldots\Delta(l_{i_\nu})\{f(x)\psi^{s-\lambda+\nu}_{k+\lambda-\nu}(x)\}|^q\,dx, \qquad (3.15)$$

где суммирование по $i_1,\ldots,i_\nu$*, распространяется по всем подпоследовательностям последовательности* $1,\ldots,\lambda$ *и постоянная* C *зависит от* m, n, λ, q.

Доказательство (3.15) проводится индукцией по λ и при этом используется формула вида (1.3). Докажем (3.15) только при $\lambda = 1$, так как дальнейшие рассуждения проводятся аналогично. Непосредственно проверяется, что

$$\Delta(l_1)\{f(x)\cdot\psi^s_k(x)\} = \Delta(l_1)[f(x)]\cdot\psi^s_k(x) +$$
$$+ f(x+l_1)\cdot s\int_0^1[(1+t\Delta(l_1))\psi_k(x)]^{s-1}\,dt\cdot\Delta(l_1)\psi_k(x).$$

Отсюда следует:

$$\int_\Omega|\Delta(l_1)[f(x)]\cdot\psi^s_k(x)|^q\,dx \le C\Bigg\{\int_\Omega|\Delta(l_1)\{f(x)\cdot\psi^s_k(x)\}|^q\,dx +$$
$$+(sK_k\cdot h)^q\int_\Omega|f(x+l_1)[\psi^{s-1}_k(x)+\psi^{s-1}_k(x+l_1)]|^q\,dx\Bigg\}.$$

Делая в последнем интеграле замену $x = y - l$, получим в силу (3.14):

$$\int_\Omega\{|f(x+l_1)|[\psi^{s-1}_k(x)+\psi^{s-1}_k(x+l_1)]\}^q dx \le 2^q\int_\Omega\{|f(x)|\cdot\psi^{s-1}_{k+1}(x)\}^q dx,$$

откуда следует (3.15) при $\lambda = 1$.

Из формул (3.3), (3.4), (3.14) и (3.15) теперь получаем, что при $r > 1$, $\theta(r + r_1) > 1$ интеграл

$$\int_0^H\frac{J^{(1)}}{h^{1+n}}dh$$

оценивается суммой членов вида

$$J^{(3)} = C(rK_{2\overline{m}})^{8\overline{m}}\left\{\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega|h^{j_1}\cdot\Delta(\bar{l}_1)\ldots\Delta(\bar{l}_{i_1})\{D^\beta u\psi^{\overline{m}-\nu_1}_{\lambda_1}(x)\}|^{\frac{2q}{k_1}}\,dx\right\}^{1-\frac{k_2}{q\theta}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega |\, h^{j_2}\ \Delta(\widetilde{l}_1)\ldots\Delta(\widetilde{l}_{i_2})\{[V_\gamma(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+\eta)} D^\beta u(x)\psi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\}\,|^{\frac{2q}{k_2}}\ dx\right\}^{\frac{k_2}{q\theta}}, \tag{3.16}$$

где $|\gamma|=|\beta|=m,\ q>i_1+j_1=k_1\ge k_2=i_2+j_2;\ \lambda_1,\lambda_2\le 2\overline{m},\ \nu_1,\nu_2<\overline{m},\ \bar{l}_i,\widetilde{l}_j$ – n-мерные векторы, $|\bar{l}_i|$, $|\widetilde{l}_j|\le 2^{\overline{m}-1}m^{\overline{m}}h,\ q$ равняется q_i, либо $2q_i$.

Дальнейшая оценка $J^{(3)}$ получается из леммы 1.3 и неравенства Гельдера (если $j_i\ne 0, k_i$). Например, для второго множителя справа в (3.16) имеем при $0<j_2<k_2$:

$$J^{(4)}=\int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega |\, h^{j_2}\Delta(\widetilde{l}_1)\ldots\Delta(\widetilde{l}_{i_2})\{V_\gamma(x)^{\frac{\theta}{2}(r+\eta)} D^\beta u\psi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\}\,|^{\frac{2q}{k_2}}\ dx\le$$
$$\le C\left\{\int_0^H \frac{h^{2q}}{h^{1+n}}\right\}^{\frac{j_2}{k_2}}\left\{\int_\Omega |\,\Delta(\widetilde{l}_1)\ldots\Delta(\widetilde{l}_{i_2})\{[V_\gamma(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+\eta)} D^\beta u\psi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\}\,|^{\frac{2q}{k_2}}\ dx\right\}^{\frac{i_2}{k_2}}.$$

Далее применяем ко второму множителю оценку (1.8) с $\lambda=1,\ l=\dfrac{n}{2},\ \rho=2$. Все условия леммы 1.3 выполнены, так как в данном случае

$$\frac{2q}{i_2}\ge\frac{2q}{k_2}\ge\frac{2q}{k_1}>2,\quad \varepsilon=1-\frac{2}{n}\left(\frac{n}{2}-\frac{ni_2}{2q}\right)=\frac{i_2}{q}>0,$$
$$s=\frac{nl_2}{2q},\quad s=ls,\quad s<i_2,$$

Выбирая значение k в (1.6) равным $m+m_1$, получаем:

$$J^{(4)}\le C\left\{\left[\int_\Omega [V_\gamma(x)]^{\theta(r+\eta)}\,|D^\beta u(x)|^2\ \psi_{\lambda_2}^{\theta(s-2s_1)-2\nu_2}(x)dx\right]^{\frac{q}{k_2}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^n\left[\int_0^\infty\frac{dh}{h^{1+n}}\int_{R^n}|\,\Delta_i^{m+m_1}(h)\{[V_\gamma(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+\eta)} D^\beta u(x)\psi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\}\,|^2\ dx\right]^{\frac{q}{k_2}}\right\}.$$

Здесь $H^{(2q-n)\frac{j_2}{k_2}}$ мы включили в постоянную C, так как считаем $H\le d\le 1$. Можем дальше продолжить оценку с любым $\widetilde{H}\le d$:

$$J^{(4)}\le C\left\{\left[\widetilde{H}^{-n}\int_\Omega [V_\gamma(x)]^{\theta(r+\eta)}\,|D^\beta u(x)|^2\ \psi_{\lambda_2}^{\theta(s-2s_1)-2\nu_2}(x)dx\right]^{\frac{q}{k_2}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^n\left[\int_0^{\widetilde{H}}\frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega|\,\Delta_i^{m+m_1}(h)\{[V_\gamma(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+\eta)} D^\beta u(x)\psi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\}\,|^2\ dx\right]^{\frac{q}{k_2}}\right\}. \tag{3.17}$$

Эта же оценка справедлива для $J^{(4)}$ при $j_2=0$ (те же рассуждения, только без применения неравенства Гельдера) и при $j_2=k_2$. В последнем случае

$$J^{(4)}\le C\int_0^H\frac{h^{2q}}{h^{1+n}}dh\cdot\int_\Omega|\,[V_\gamma(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+\eta)} D^\beta u(x)\psi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\,|^{\frac{2q}{k_2}}\ dx$$

и нужно применить ко второму интегралу оценку (1.7) при $\lambda = 1,\ \alpha = 0$. Легко проверить, что все условия при этом выполнены и для $J^{(4)}$ мы снова получим оценку (3.17).

Аналогично оценивается первый множитель в (3.16). Для него имеет место оценка

$$\int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega |\, h^{j_1} \Delta(\bar{l}_1) \ldots \Delta(\bar{l}_{i_1}) \{ D^\beta u(x) \cdot \psi_{\lambda_1}^{\overline{m}-\nu_1}(x) \} |^{\frac{2q}{k_1}}\, dx \le C \{ K_{2\overline{m}}^{2\overline{m}}\, I_0(\widetilde{H}) \}^{\frac{q}{k_1}},$$

где

$$I_0(\widetilde{H}) = \sum_{|\beta|=m} \left\{ \widetilde{H}^{-n} \int_\Omega |\, D^\beta u(x) |^2\, \varphi_0(x) dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \int_0^{\widetilde{H}} \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega |\, \Delta_i^{m+m_1}(h) \{ D^\beta u(x) \cdot \varphi_0(x) \} |^2\, dx + 1 \right\}, \tag{3.18}$$

где $\varphi_0(x)$ – некоторая функция класса $C_0^\infty(\Omega)$, равная единице в Ω_d.

Из (3.17) и (3.18) получаем оценку для $J^{(3)}$ и, следовательно,

$$\int_0^H \frac{J^{(1)}}{h^{1+n}} dh \le C r^{8\overline{m}} K_{2m}^{8\overline{m}+2\overline{q}\cdot\overline{m}} \{ I_0(\widetilde{H}) \}^{2\overline{q}-\frac{1}{\theta}} \{ I_{r,s}(\widetilde{H}) \}^{\frac{1}{\theta}},$$

где $\overline{q} = \max_i q_i$,

$$I_{r,s}(\widetilde{H}) \sum_{|\beta|=|\gamma|=m} \sum_{\lambda=0}^{2\overline{m}} \sum_{\nu=0}^{\overline{m}} \left\{ \widetilde{H}^{-n} \int_\Omega [V_\gamma(x)]^{\theta(r+\eta)+1} \psi_\lambda^{\theta(s-2s_1)-2\nu}(x) dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \int_0^{\widetilde{H}} \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega |\, \Delta_i^{m+m_1}(h) \{ [V_\gamma(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+\eta)} D^\beta u(x) \psi_\lambda^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu}(x) \} |^2\, dx \right\}. \tag{3.19}$$

Мы показали, как оценивать одно из слагаемых, входящих в $J_{r,s}^*(H,\psi)$. Аналогично оценивается третье слагаемое в формуле (3.1) и член, соответствующий первому слагаемому в подынтегральном выражении формулы (2.16). Сделаем только замечание относительно последнего члена при $p < 4$, так как в этом случае нельзя непосредственно получить для него оценку вида (2.3). Представим

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}} [V_\gamma(x,h)]^r = [W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}} [V_\gamma(x,h)]^{r-1} \times$$
$$\times \{ V_\gamma(x+\mu h) + [V_\gamma(x,h) - V_\gamma(x+\mu h)] \}.$$

Отсюда, пользуясь очевидным неравенством

$$|\, V_\gamma(x,h) - V_\gamma(x+\mu h) \,| \le \{ [V_\gamma(x,h)]^{\frac{1}{2}} + [V_\gamma(x+\mu h)]^{\frac{1}{2}} \} \times$$
$$\times \left\{ |\, \Delta(\mu h) D^\gamma u(x) \,| + \int_{I_m} |\, \Delta(t_\gamma h) D^\gamma u(x) \,|\, dt \right\},$$

получаем:

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}} [V_\gamma(x,h)]^r = C [W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}} [V_\gamma(x,h)]^{r-1} \times$$

$$\times\left\{W(x+\mu h)+|\Delta(\mu h)D^{\gamma}u|^{2}+\int_{I_m}|\Delta(t_{\gamma}h)D^{\gamma}u|^{2}\,dt\right\}$$

и, следовательно, по неравенству Юнга

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}}[V_{\gamma}(x,h)]^{r}\,|\Delta^{\omega}D^{\delta}u(x)|^{\frac{2q_i}{|\omega|}}\,\psi^{s-2m}(x)\le$$

$$\le C[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[V_{\gamma}(x,h)]^{r-1}\left\{|\Delta^{\omega}D^{\delta}u(x)|^{\frac{2(q_i+1)}{|\omega|}}+|\Delta^{\omega}D^{\delta}u|^{\frac{2q_i}{|\omega|}}+\right.$$

$$\left.+|\Delta(\mu h)D^{\gamma}u|^{2(q_i+1)}+\int_{I_m}|\Delta(t_{\gamma}h)D^{\gamma}u(x)|^{2(q_i+1)}\,dt\right\}\psi^{s-2m}(x).$$

Теперь уже в правой части все слагаемые подобны подынтегральной функции в $J^{(1)}$ и оценка интегралов от них проводится точно так же, как и для $J^{(1)}$. Оставшиеся члены $J^{*}_{r,s}(H,\psi)$ оцениваются одинаково и мы остановимся еще только на интеграле

$$J^{(5)}=\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int_{\Omega}[W(x+\mu h)]^{\bar p}[V_{\gamma}(x,h)]^{r+1}\,|\Delta^{\omega}D^{\delta}u(x)|^{\frac{2q_i}{|\omega|}}\,\psi^{s-2m}(x)dx$$

при $|\delta|<m,\ 1\le|\omega|\le q_i$. Возможны два случая:

а) $|\omega|+|\delta|\le m$,

б) $|\omega|+|\delta|>m$.

В первом случае, представляя по формуле (1.5)

$$\Delta^{\omega}(h)D^{\delta}u(x)=h^{|\omega|}\int_{I_{|\omega|}}D^{\omega+\delta}u(x+t_{\omega}h)dt$$

и применяя неравенство Юнга, получим оценку

$$J^{(5)}\le C\sum_{|\gamma|=m}[V_{\gamma}(x)]^{r+r_2}\psi_1^{s-2m}(x)dx, \tag{3.20}$$

где $r_2=\bar p+1+\dfrac{q_i}{|\omega|}$. Применим к последнему интегралу неравенство Гельдера и воспользуемся легко проверяемым соотношением

$$[V_{\gamma}(x)]^{r+\frac{1}{2}}\le Cr\{1+[V_{\gamma}(x)]^{r}\,|D^{\gamma}u(x)|\}.$$

Будем иметь:

$$J^{(5)}\le Cr\left\{1+\sum_{|\gamma|=m}\left[\int_{\Omega}[V_{\gamma}(x)]^{r_3}\psi_1(x)dx\right]^{1-\frac{1}{q_1\theta}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{\Omega}\left([V_{\gamma}(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+r_1)}\,|D^{\gamma}u(x)|\,\psi_1^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)}(x)\right)^{2q_1}dx\right]^{\frac{1}{q_1\theta}}\right\}, \tag{3.21}$$

где q_1 такое же, как в (2.16), $r_3=\left(r_2-r_1-\dfrac{1}{\theta}\right)\dfrac{q_1\theta}{q_1\theta-1}$. Оба интеграла справа в (3.21) можно оценить по неравенству (1.7) и в результате придем к оценке

$$J^{(5)} \le Cr \cdot \{I_0(\widetilde{H})\}^{q'} \{I_{r,s}(\widetilde{H})\}^{\frac{1}{\theta}} \tag{3.22}$$

с некоторым q', зависящим только от $m, n, p, \overline{p}$. Если же в $J^{(15)} |\omega+\delta| > m$, то оценим $J^{(15)}$ по неравенству Юнга:

$$J^{(5)} \le \int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega \left\{ [W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}} [V_\gamma(x,h)]^{r-1} \left| \frac{\Delta^\omega D^\delta u(x)}{h^{m-|\delta|}} \right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\delta|-m}} \right.$$
$$\left. + [W(x+\mu h)]^{\widetilde{p}} [V_\gamma(x,h)]^{r+\widetilde{r}} h^{2q_i} \right\} \psi^{s-2m}(x)\, dx$$

с $\widetilde{p} = \overline{p} \cdot \dfrac{|\omega|}{m-|\delta|} - \dfrac{p-2}{2} \cdot \dfrac{|\omega+\delta|-m}{m-|\delta|}$, $\widetilde{r} = \dfrac{2|\omega|}{m-|\delta|} - 1$.

Для первого слагаемого справа справедлива оценка (3.19), а второе слагаемое оценивается аналогично правой части (3.20), Таким образом, мы опять получим для $J^{(5)}$ оценку вида (3.22).

Из оценок (3.19), (3.22), а также аналогично получающихся оценок для остальных слагаемых $J^*_{r,s}(H,\psi)$ следует

Теорема 3.1. *Пусть* $\psi(x)$ *– произвольная функция класса* $C_0^\infty(\Omega_d)$ *и последовательность* $\psi_k(x)$ *такова, что выполнены условия* (3.13). *Существует* θ, *зависящее только от* m, n *и меньшее единицы, такое, что для произвольной функции* $u(x)$ *и произвольных* $r, s, \widetilde{H}$, *удовлетворяющих условиям*

$$I_0(\widetilde{H}) < -\infty, \quad I_{r,s}(\widetilde{H}) < +\infty, \quad r \ge 1, \quad \theta\left(r + \frac{p}{2} - 2\right) > 1,$$
$$4\overline{m} \le s < C_0 r, \quad 0 < \widetilde{H} \le \frac{d}{2(m+m_1)}, \quad 0 < \widetilde{H} \le \frac{d}{2(m+m_1)},$$

конечна величина $J^*_{r,s}(H,\psi)$ *и имеет место оценка*

$$J^*_{r,s}(H,\psi) \le C(rK_{2\overline{m}})^{\widetilde{m}} (I_0(\widetilde{H}))^{\widetilde{q}} \{I_{r,s}(\widetilde{H})\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{3.23}$$

Здесь $J^*_{r,s}(H,\psi), I_0(\widetilde{H}), I_{r,s}(\widetilde{H})$ *определяются соответственно по формулам* (3.1), (3.18), (3.19), q_i *– те же числа, что и в теореме* 3.1, $\widetilde{q}, \widetilde{m}$ *зависят только от* m, n.

Неравенства (2.16) и (3.23) будут основными при доказательстве в следующем параграфе ограниченности производных m-го порядка обобщенного решения уравнения (0.1).

Покажем, какие нужно сделать изменения для того, чтобы аналогичное теореме 3.1 утверждение было справедливым без ограничений на r:

$$r \ge 1, \quad \theta\left(r + \frac{p}{2} - 2\right) > 1. \tag{3.24}$$

При $|r|\le C_0$ изменим $J^*_{r,s}(H,\psi)$ в соответствии с тем, что роль основного неравенства играет в этом случае (2.22). Определим для $|r|\le C_0$ величину

$$\bar J^*_{r,s}(H,\psi)=\int\limits_0^H \frac{1}{h^{1+n}}\bar J_{r,s}(h,\psi)dh+\int\limits_\Omega [W(x)]^{r+\bar p}\psi^{s-2m}(x)\,dx+$$

$$+\sum_{|\beta|=m}\int\limits_0^H \frac{dh}{h^{1+n}}\int\limits_\Omega\left\{[W(x,h)]^{r+\frac{p}{2}-2}\sum_{j=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]}\left[\sum_{\substack{|\omega|=1\\|\nu|\le m+m_1}}^{m+m_1}|\Delta^\omega(h)D^\beta u(x+\nu h)|^{\frac{2(m+m_1+j)}{|\omega|}}+\right.\right.$$

$$\left.+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_\beta h)D^\beta u(x)|^{2(m+m_1+j)}\,dt\right]+\sum_{|\mu|\le m+m_1}[W^{r+\frac{p}{2}-2}(x+\mu h)+$$

$$+W^{\frac{p-2}{2}}(x+\mu h)(W^{r-1}(x)+W^{r-1}(x,h))+W^{\frac{p-4}{2}}(x+\mu h)(W^r(x)+W^r(x,h))]\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{\substack{|\omega|=1\\|\nu|\le m+m_1}}^{m+m_1-1}|\Delta^\omega(h)D^\beta u(x+\nu h)|^{\frac{2(m+m_1)}{|\omega|}}+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_\beta h)D^\beta u(x)|^{2(m+m_1)}\,dt\right]\right\}dx \tag{3.25}$$

и покажем, как оценивать входящие в $\bar J^*_{r,s}(H,\psi)$ члены при выполнении второго условия в (3.24). При $r<1$ и оценке, например, интеграла

$$\bar J^{(1)}=\int\limits_\Omega [W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[W(x,h)]^{r-1}\left|\frac{D^\alpha\Delta^\omega u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}}\psi^{s-2m}(x)dx$$

аналогично $J^{(1)}$ мы не можем, пользуясь неравенством Юнга, получить оценку вида (3.3). Поэтому представим

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[W(x,h)]^{r-1}=[W(x+\mu h)]^{\frac{p}{2}+r-2}+$$

$$+\{[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}-[W(x,h)]^{\frac{p-2}{2}}\}\cdot[W(x,h)]^{r-1} \tag{3.26}$$

и оценим разность в фигурной скобке с помощью уже часто применявшегося приема:

$$|[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}-[W(x,h)]^{\frac{p-2}{2}}|=$$

$$=\left|\int\limits_0^1\frac{d}{dt}[tW(x+\mu h)+(1-t)W(x,h)]^{\frac{p-2}{2}}dt\right|\le$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\left\{W^{\frac{p-3}{2}}(x+\mu h)+W^{\frac{p-3}{2}}(x+\mu h)\right\}\times$$

$$\times\left\{|\Delta(\mu h)D^\alpha u(x)|+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_\alpha h)D^\alpha u(x)|\,dt\right\}.$$

Отсюда и из (3.26) получаем:

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[W(x,h)]^{r-1}\le C\sum_{|\alpha|=m}\left\{[W(x,h)]^{\frac{p}{2}+r-2}+\right.$$

$$+[W(x,h)]^{\frac{p}{2}+r-3}\left(|\Delta(\mu h)D^{\alpha}u(x)|^{2}+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_{\alpha}h)D^{\alpha}u(x)|^{2}\,dt\right)+$$

$$+[W(x+\mu h)]^{\frac{p-4}{2}}[W(x,h)]^{r-1}\left(|\Delta(\mu h)D^{\alpha}u(x)|^{2}+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_{\alpha}h)D^{\alpha}u(x)|^{2}\,dt\right)\Bigg\}.$$

Продолжая аналогичную оценку для последнего слагаемого фигурной скобки, придем после $\left[\frac{p}{2}\right]$ шагов к оценке:

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-3}{2}}[W(x,h)]^{r-1}\le$$

$$\le C[W(x,h)]^{\frac{p}{2}+r-2}\sum_{\substack{j=0\\|\alpha|=m}}^{\left[\frac{p}{2}\right]}\left\{|\Delta(\mu h)D^{\alpha}u(x)|^{2j}+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_{\alpha}h)D^{\alpha}u(x)|^{2j}\,dt\right\}$$

и, следовательно,

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[W(x,h)]^{r-1}\left|\frac{D^{\alpha}\Delta^{\omega}u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\omega+\alpha|-m}}\le$$

$$\le C[W(x,h)]^{\frac{p}{2}+r-2}\sum_{\substack{j=0\\|\alpha|=m}}^{\left[\frac{p}{2}\right]}\left\{\left|\frac{D^{\alpha}\Delta^{\omega}u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2(q_i+j)}{|\omega+\alpha|-m}}+|\Delta(\mu h)D^{\alpha}u(x)|^{2(q_i+j)}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{I_m}|\Delta(t_{\alpha}h)D^{\alpha}u(x)|^{2(q_i+j)}\,dt\right\}. \tag{3.27}$$

Тем самым мы получим для $\bar{J}^{(1)}$ оценку вида (3.3). Остальные оценки для $\bar{J}^{(1)}$ получаются дословным повторением оценок $J^{(1)}$. Аналогично оцениваются остальные входящие в $\bar{J}^{*}_{r,s}(H,\psi)$ члены. Можно считать, что возникающий при оценке этих членов показатель θ – тот же, что и в теореме 3.1. Тем самым установлена

Лемма 3.4. *Пусть выполняются все предположения теоремы* 3.1, *кроме* $r\ge 1$. *Тогда при* $|r|\le C_0$ *и* $4\overline{m}\le s\le C_0$ *конечна величина* $\bar{J}^{*}_{r,s}(H,\psi)$ *и имеет место оценка*

$$\bar{J}^{*}_{r,s}(H,\psi)\le CK^{\widetilde{m}}_{2\overline{m}}(I_0(\widetilde{H}))^{\widetilde{q}}\{I_{r,s}(\widetilde{H})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3.28}$$

где сохранены все обозначения теоремы 3.1.

Отметим еще, что при $r\le 1$ оценка вида (3.28) справедлива также и в случае, если не выполнено второе неравенство из (3.24). На понадобится в дальнейшем случай такого r, для которого

$$0\le\theta\left(r+\frac{p}{2}-2\right)\le\frac{1}{8\sqrt{N}}, \tag{3.29}$$

где N – число мультииндексов длины m.

Обозначим

$$\bar{I}_{r,s}(\widetilde{H}) = \sum_{|\beta|=m} \sum_{\lambda=0}^{2\bar{m}} \sum_{\nu=0}^{\bar{m}} \left\{ \widetilde{H}^{-n} \int_{\Omega} [W(x)]^{\theta(r+r_1)+1} \psi_{\lambda}^{\theta(s-2s_1)-2\nu}(x)dx + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\widetilde{H}} \frac{dh}{h^{1+n}} \int_{\Omega} [| \Delta_i^{m+m_1}(h)(D^{\beta}u(x)\psi_{\lambda}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu}(x)) |^2 +$$

$$\left. + | \Delta_i^{m+m_1}(h)([W(x)]^{\frac{\theta}{2}(r+r_1)} D^{\beta}u(x)\psi_{\lambda}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu}(x)) |^2]dx \right\}.$$

Лемма 3.5. *Пусть* $\psi(x), \psi_k(x), \theta$ *– те же, что в теореме* 3.1. *Для произвольной функции* $u(x)$ *и произвольных чисел* $r, s, \widetilde{H}$*, удовлетворяющих условиям*

$$I_0(\widetilde{H}) < +\infty,\ \bar{I}_{r,s}(\widetilde{H}) < +\infty,\ \ |r| \le C_0,\ \ 0 \le \theta\left(r + \frac{p}{2} - 2\right) < \frac{1}{8\sqrt{N}},$$

$$4\bar{m} \le s \le C_0,\ \ 0 < \widetilde{H} \le \frac{d}{2(m+m_1)},\ \ 0 < H \le \frac{d}{2(m+m_1)},$$

конечна величина $\bar{J}^*_{r,s}(H,\psi)$ *и имеет место оценка*

$$\bar{J}^*_{r,s}(H,\psi) \le CK_{2\bar{m}}^{\bar{m}} \cdot \{\bar{I}_0(\widetilde{H})\}^{\bar{q}} \{\bar{I}_{r,s}(\widetilde{H})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3.30}$$

где сохранены обозначения формулы (3.23).

Второе условие из (3.24) возникло при применении лемм 3.1, 3.2. Покажем, как нужно изменить эти леммы в нашем случае. Вместо (3.7) в (3.12) при $0 < \rho < \frac{1}{8\sqrt{N}}$ можно получить соответственно:

$$\begin{gathered}
\sum_{|\beta|=m} [W(x)]^{\rho} \cdot | \Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k) D^{\beta}u(x) | \le \\
\le C\sum_{|\beta|=m} | \Delta(l_1)\ldots\Delta(l_k)\{[W(x)]^{\rho} D^{\beta}u(x)\} | - C\bar{R}_3(\rho), \\
\sum_{|\beta|=m} [W(x)]^{\rho}\, | \Delta(l) D^{\beta}u(x) | \le \\
\le C\sum_{|\beta|=m} \{| \Delta(l)[(W(x))^{\rho} D^{\beta}u(x)] | + | \Delta(l) D^{\beta}u(x) |^2\},
\end{gathered} \tag{3.31}$$

где сохранены обозначения формул (3.7), (3.12) и $\bar{R}_3(r) \le R_3$. Проверим, например, последнее неравенство. Оно следует из соотношений:

$$\Delta(l)[(W(x))^{\rho} D^{\beta}u(x)] = \frac{1}{2}\{([W(x)]^{\rho} + [W(x-l)]^{\rho} \cdot \Delta(l) D^{\beta}u(x) +$$
$$+ \Delta(l)[(W(x)]^{\rho}[D^{\beta}u(x+l) + D^{\beta}u(x)]\}$$

и

$$| \Delta(l)[W(x)]^{\rho} = \left| \rho\int_0^1 [(1+t\Delta(l))[W(x)]^{\rho-1} dt\, \Delta(l)W(x) \right| \le$$

$$\le 2\rho([W(x)]^{\rho-\frac{1}{2}} + [W(x+l)]^{\rho-\frac{1}{2}}) \sum_{|\delta|=m} | \Delta(l) D^{\delta}u(x) |.$$

Применяя (3.31) и сохраняя дальнейшее доказательство неравенства (3.23), получим (3.30).

§ 4. Ограниченность производных m -го порядка

Мы докажем здесь ограниченность производных m-го порядка обобщенного решения $u(x)$ уравнения (0.1), предполагая выполненными условия (2.1)–(2.3) и условие (R). Основную роль в доказательстве будут играть полученные выше неравенства (2.16), (3.23).

Сначала получим из основных неравенств связь между $J^*_{r,s}(H,\psi)$ при различных значениях r, s, H, ψ, предполагая, что эти величины конечны.

Лемма 4.1. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условию* (R), *и пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3), $f_\alpha(x) \in B_2^{p_0}(R^n)$ *при* $p_0 > \frac{n}{2}$. *Пусть* $\psi(x)$ *– некоторая функция класса* $C_0^\infty(\Omega_d),\ 0 < d < 1$, *и последовательность* $\psi_k(x),\ k = 1,\ldots,2\overline{m}+1$, *такова, что выполнены условия* (3.13). *Предположим, что для некоторых чисел* $r, s, \widetilde{H}$, *удовлетворяющих условиям*

$$r \ge 1,\quad r + \frac{p}{2} - 2 > 0,\quad 4\overline{m} < s \le C_0 r,\quad 0 < \widetilde{H} \le \frac{d}{2(m+m_1)}$$

($m_1, \overline{m}$ *определены в* §§ 2, 3) *конечна величина* $J^*_{r,s}(\widetilde{H}, \psi_{2\overline{m}+1})$. *Тогда при*

$$0 < H \le \frac{d}{2(m+m_1)},\quad \rho = \frac{1}{\theta}\left[r + \left(\frac{p}{2} - 2\right)(1-\theta) + 1\right],$$
$$\sigma = \frac{1}{\theta}[s + 2(s_1\theta + m_1 + \overline{m})]$$

конечна величина $I_{\rho,\sigma}(H)$, *а следовательно, по теореме* 3.1, *и* $J^*_{\rho,\sigma}(H,\psi)$, *и имеет место оценка*

$$J^*_{\rho,\sigma}(H,\psi) \le C\widetilde{H}^{-2n}(rK_{2\overline{m}})^{\hat{m}}\{I_0(\widetilde{H})\}^{\widetilde{q}}\{J^*_{\rho,\sigma}(\widetilde{H},\psi_{2\overline{m}+1})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{4.1}$$

где $\hat{m}$ *зависит только от* m, n, s_1 *определено в* § 3, $\widetilde{q}$ *– то же, что в теореме* 3.1, *и постоянная* C *зависит только от* $m, n, p, p_1, C_0, C_1, C_2, |f_\alpha|_{B_2^{p_0}}$.

Начнем с преобразования левой части неравенства (2.16). Из равенства

$$[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r = [W(x)]^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x)]^r +$$
$$+ (W^{\frac{p-2}{2}}(x+\mu h) - W^{\frac{p-2}{2}}(x))V_\gamma^r(x) + W^{\frac{p-2}{2}}(x+\mu h)(V_\gamma^r(x,h) - V_\gamma^r(x))$$

и легко проверяемых неравенств

$$|W^{\frac{p-2}{2}}(x+\mu h) - W^{\frac{p-2}{2}}(x)| \le C\{W^{\frac{p-3}{2}}(x+\mu h) - W^{\frac{p-3}{2}}(x)\}\sum_{|\delta|=m}|\Delta(\mu h)D^\delta u(x)|,$$

$$|V_\gamma^r(x,h) - V_\gamma^r(x)| \le Cr\{V_\gamma^{r-\frac{1}{2}}(x,h) + V_\gamma^{r-\frac{1}{2}}(x)\}\int_{I_m}|\Delta(t_\gamma h)D^\gamma u(x)|dt$$

получаем:

$$[W(x)]^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x)]^r(\Delta^\beta(h)D^\alpha u)^2 \le C[W(x+\mu h)]^{\frac{p-2}{2}}[V_\gamma(x,h)]^r(\Delta^\beta(h)D^\alpha u)^2 +$$

$$+Cr^2\{[W^{\frac{p-2}{2}}(x+\mu h)+W^{\frac{p-2}{2}}(x)][V_\gamma^{r-1}(x)+V_\gamma^{r-1}(x,h)]+$$

$$+[W^{\frac{p-4}{2}}(x+\mu h)+W^{\frac{p-4}{2}}(x)][V_\gamma^r(x)+V_\gamma^r(x,h)]\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{|\delta|=m}|\Delta(\mu h)D^\delta u(x)|^{2(m+m_1)}+\int_{I_m}|\Delta(t_\gamma h)D^\gamma u(x)|^{2(m+m_1)}dt+|\Delta^\beta(h)D^\alpha u(x)|^{\frac{2(m+m_1)}{m+m_1-1}}\right\}. \tag{4.2}$$

Из (2.16) и (4.2) следует, что при выполнении условий леммы 4.1 при любом k имеет место оценка

$$\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\sum_{i=1}^n\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega [V_\gamma(x)]^{r+\frac{p-2}{2}}|\Delta_i^{m+m_1}(h)D^\alpha u(x)|^2\ \psi_k^s(x)dx \le$$

$$\le Cr^{2m+2N}K_{2\overline{m}}^{2m}J_{r,s}^*(H,\psi_k),\ k=0,1,\ldots,2\overline{m}+1. \tag{4.3}$$

При этом интеграл

$$\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega|\Delta^\beta(h)f_\alpha(x)|^2\ [V_\gamma(x,h)]^r\cdot\psi^s(\varepsilon)dx$$

оцениваем по неравенству Гельдера и (1.7). Воспользуемся теперь доказываемым аналогично (3.7) неравенством

$$|\Delta_i^{m+m_1}([V_\gamma(x)]^{\frac{r}{2}+\frac{p-2}{4}}D^\alpha u)|\le Cr\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\{[V_\gamma(x)]^{\frac{r}{2}+\frac{p-2}{4}}|\Delta_i^{m+m_1}(h)D^\alpha u(x)|+$$

$$+r^{m+m_1}\sum_{j=1}^{m+m_1-1}\sum_{k_1,k_2=0}^{m+m_1}V_\gamma^{\frac{r}{2}+\frac{p-4}{2}}(x+k_1e_ih)|\Delta_i^j(h)D^\alpha u(x+k_2e_ih)|^{\frac{m+m_1}{j}}\}. \tag{4.4}$$

Отсюда и из (4.3) следует

$$\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\sum_{i=1}^n\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega|\Delta_i^{m+m_1}(V_\gamma^{\frac{r+r_1+1}{2}}(x)D^\alpha u)\psi_k^{\frac{s}{2}}(x)|^2\ dx\le Cr^{m_2}K_k^{2m}J_{r,s}^*(H,\psi_k), \tag{4.5}$$

где $r_1=\dfrac{p}{2}-2,\ m_2=2m+2N+m_1$.

Дальнейшее преобразование левой части (4.5) вводит $\psi_k^{\frac{s}{2}}(x)$ под знак разностного оператора и проводится на основании неравенства

$$|\Delta_i^{m+m_1}\{[V_\gamma(x)]^{\frac{r+r_1+1}{2}}D^\alpha u(x)\cdot\psi_k^{\frac{s}{2}}(x)\}|\le$$

$$\le C\{|\Delta_i^{m+m_1}([V_\gamma(x)]^{\frac{r+r_1+1}{2}}D^\alpha u(x))\cdot\psi_k^{\frac{s}{2}}(x)|+$$

$$+r(rK_k)^{m+m_1}\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\sum_{k_1,k_2=0}^{m+m_1}V_\gamma^{\frac{r+r_1}{2}}(x+k_1e_ih)\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j=1}^{m+m_1-1}\sum_{k_2=0}^{m+m_1}|\Delta_i^j(h)D^\alpha u(x+k_3e_ih)|^{\frac{m+m_1}{j}}+h^{m+m_1}V_\gamma(x+k_1e_ih)\right\}\psi_k^{\frac{s}{2}-(m+m_1)}(x+k_2e_ih). \tag{4.6}$$

Последнее неравенство доказывается применением формулы (1.3). При этом

$$\Delta_i^k\{[V_\gamma(x)]^{\frac{r+r_1+1}{2}} D^\alpha u(x)\}$$

оцениваем по неравенству вида (4.4), а $\Delta_i^j\{\psi_k^{\frac{s}{2}}(x)\}$ представляем по формуле (1.5) и затем непосредственно оцениваем.

Из (4.5) и (4.6) получаем:

$$\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\sum_{i=1}^n\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega|\Delta_i^{m+m_1}\{V_\gamma^{\frac{r+r_1+1}{2}}(x)\cdot D^\alpha u\cdot\psi_k^{\frac{s}{2}}(x)\}|^2\,dx\le$$
$$\le Cr^{m_2}K_{2\overline{m}}^{2m+m_1}\cdot J^*_{r,s-2m_1}(H,\psi_{2\overline{m}+1})$$

и, следовательно, при любом $0\le k\le 2\overline{m},\ 0\le\nu\le\overline{m}$

$$\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\sum_{i=1}^n\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\int_\Omega|\Delta_i^{m+m_1}\{V_\gamma^{\frac{r+r_1+1}{2}}(x)D^\alpha u\psi_k^{\frac{s}{2}+m_1+\overline{m}-\nu}(x)\}|^2\,dx\le$$
$$\le Cr^{m_2}K_{2\overline{m}}^{2m+m_2}\cdot J^*_{r,s}(H,\psi_{2\overline{m}+1}). \tag{4.7}$$

Сравнивая (3.19) и (4.7), видим, что $I_{\rho,\sigma}(H)$ можно оценить через $J^*_{r,s}(H,\psi_{2\overline{m}+1})$, если

$$\frac{\theta}{2}(\rho+r_1)=\frac{r+r_1+1}{2},\quad \frac{\theta}{2}(\sigma-2s_1)=\frac{s}{2}+m_1+\overline{m},$$

т.е.

$$\rho=\frac{1}{\theta}[r+r_1(1-\theta)+1],\quad \sigma=\frac{1}{\theta}[s+2(s_1\theta+m_1+\overline{m})].$$

Получаем:

$$I_{\rho,\sigma}(\widetilde{H})\le Cr^{m_2}\widetilde{H}^{-n}K_{2\overline{m}}^{2m+m_1}J^*_{r,s}(\widetilde{H},\psi_{2\overline{m}+1}),$$

и, окончательно, из второго основного неравенства (4.23) следует:

$$J^*_{\rho,\sigma}(H,\psi)\le Cr^{2m_2+2\overline{m}}\widetilde{H}^{-2n}K_{2\overline{m}}^{2\overline{m}+4m+2m_1}\{I_0(\widetilde{H})\}^{\widetilde{q}}\{J^*_{r,s}(\widetilde{H},\psi_{2\overline{m}+1})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{4.8}$$

что и доказывает лемму. Отметим, что из условия (R) вытекает, что $I_0(\widetilde{H})<+\infty$.

Из леммы 4.1 можно получить ограниченность $J^*_{r,s}(H,\psi)$ при всех r,s,H и соответствующем выборе ψ, если известна ограниченность этой величины при некотором r, удовлетворяющем условиям

$$r\ge 1,\quad r+\frac{p}{2}-2>0. \tag{4.9}$$

Это легко увидеть из того, что $\rho>r$. В дальнейшем этот факт будет проверен при специальном выборе функций $\psi(x),\ \psi_k(x)$.

Итак, нам нужно доказать ограниченность $J^*_{r,s}(H,\psi)$ при некотором r, удовлетворяющем (4.9).

Отметим, что аналогично доказательству леммы 4.1, но, используя вместо основных неравенств оценки (2.22) и (3.28), можно установить следующее предложение.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены все предложения леммы* 4.1, *кроме* $r \geq 1$. *Тогда при* $|r| \leq C_0, 4\overline{m} \leq s \leq C_0$ *имеет место оценка*

$$\overline{J}_{\rho,\sigma}(H,\psi) \leq C\widetilde{H}^{-2n} K_{2\overline{m}}^{\hat{m}} \{I_0(\widetilde{H})\}^{\widetilde{q}} \{\overline{J}^*_{r,s}(\widetilde{H},\psi_{2\overline{m}+1})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{4.10}$$

где сохранены все обозначения формулы (4.1).

Точно так же из (2.22), (3.30) следует

Лемма 4.3. *Пусть* $u(x), \psi(x), \psi_k(x)$ *– те же функции, что в лемме* 4.1. *Предположим, что для некоторых чисел* $r, s, \widetilde{H}$, *удовлетворяющих условиям*

$$r \leq 1, \quad 0 \leq r + \frac{p}{2} - 1 \leq \frac{1}{8\sqrt{N}}, \quad 4\overline{m} \leq s \leq C_0, \quad 0 < \widetilde{H} \leq \frac{d}{2(m+m_1)},$$

конечна величина $\overline{J}^*_{r,s}(\widetilde{H},\psi_{2\overline{m}+1})$. *Тогда при* $0 < H \leq \dfrac{d}{2(m+m_1)}$ *конечна величина* $\overline{J}^*_{\rho,\sigma}(H,\psi)$ *и имеет место оценка*

$$\overline{J}^*_{\rho,\sigma}(H,\psi) \leq C\widetilde{H}^{-2n} K_{2\overline{m}}^{\hat{m}} \{I_0(\widetilde{H})\}^{\widetilde{q}} \{\overline{J}^*_{r,s}(\widetilde{H},\psi_{2\overline{m}+1})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{4.11}$$

где ρ, σ *определяются так же, как в лемме* 4.1.

Теперь легко установить ограниченность $J^*_{r,s}(H,\varphi)$ для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{2d})$ для r, удовлетворяющего условиям (4.9). Отметим, что для произвольного числа k_0 можно указать $\widetilde{K}$, зависящее только от k_0, и последовательность $\varphi_i^{(k)}(x)$, $k = 1,\ldots,k_0$, $i = 0,\ldots,2\overline{m}+1$, так, что $\varphi_i^{(k)} \in C_0^\infty(\Omega_d)$ и для произвольного $y \in R^n$, $|y| \leq 2^{i-1}\overline{m}^i \dfrac{d}{R}$ выполняются условия:

$$\varphi_{i-1}^{(k)}(x)\cdot\varphi_i^{(k)}(x+y) \equiv \varphi_{i-1}^{(k)}(x), \quad \varphi_0^{(k+1)}(x) \equiv \varphi_{2\overline{m}+1}^{(k)}(x), \quad \varphi_0^{(1)}(x) \equiv \varphi(x), \tag{4.12}$$

$$0 \leq \varphi_i^{(k)}(x) \leq 1, \quad |D^\alpha \varphi_i^{(k)}(x)| \leq C\left(\frac{\widetilde{K}}{d}\right)^{|\alpha|} \text{ при } |\alpha| \leq \overline{m},$$

где C – абсолютная константа.

Лемма 4.4. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условию* (R), *и пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Существуют* $\widetilde{r}$, *удовлетворяющее условиям* (4.9), *и числа* $\widetilde{K}, \widetilde{s}, \nu, \lambda$, *зависящие только от* m, n, p, *такие, что для произвольной функции* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{2d})$ *имеет место оценка*

$$I^*_{\widetilde{r},\widetilde{s}}(H,\varphi) \leq C\left(\frac{\widetilde{K}}{d}\right)^{\nu} \{I_0(H)\}^{\lambda} \tag{4.13}$$

при $H = \dfrac{d}{\widetilde{K}}$.

Доказательство. Последовательность $\varphi_i^{(k)}(x)$ выберем так, чтобы удовлетворялись условия (4.12), число k_0 укажем ниже. Выберем сначала $r^{(0)} = 1 - \frac{p}{2} + \frac{1}{8\sqrt{N}}, s^{(0)} = 4\overline{m}$. При $r = r^0, s = s^{(0)},\ \psi = \varphi_1^{(k_0)}, H = \widetilde{H} = \frac{d}{\widetilde{K}}$ выполнены все предположения леммы 4.3. Ограниченность $J^*_{r^{(0)},s^{(0)}}(H, \varphi_{2\overline{m}+1}^{(k_0)})$ следует из условия (R) и имеет место оценка

$$\overline{J}^*_{r^{(0)},s^{(0)}}(H, \varphi_{2m+1}^{(k_0)}) \le C\{I_0(H)\}^{\lambda_0} \tag{4.14}$$

с некоторой зависящей лишь от m, n постоянной λ_0. Оценка (4.14) получается из неравенства (3.27) и леммы 1.3.

Из леммы 4.3 получаем ограниченность $\overline{J}^*_{r^{(1)},s^{(1)}}(H, \varphi_{2\overline{m}+1}^{(k_0-1)})$ при

$$r^{(1)} = 2 - \frac{p}{2} + \frac{1}{8\theta\sqrt{N}},\quad s^{(1)} = \frac{1}{\theta}[s^{(0)} + 2(s_1\theta + \overline{m} + m_1)]$$

и оценку

$$\overline{J}^*_{r^{(1)},s^{(1)}}(H, \varphi_{2m+1}^{(k_0-1)}) \le C\left(\frac{\widetilde{K}}{d}\right)^{\nu_1}\{I_0(H)\}^{\lambda_1} \tag{4.15}$$

с $\nu_1 = 2n + \hat{m},\ \lambda_1 = \widetilde{q} + \frac{\lambda}{\theta}$.

Значение $r = r^{(1)}$ уже удовлетворяет второму условию (4.9), и если $r^{(1)} \ge 1$, то утверждение леммы доказано, что следует из неравенства

$$J^*_{r,s}(H,\psi) \le \overline{J}^*_{r,s}(H,\psi) \text{ при } r \ge 1. \tag{4.16}$$

Если $r^{(1)} < 1$, то применим лемму 4.2 при $r = r^{(1)},\ s = s^{(1)},\ \psi = \varphi_1^{(k_0-1)},\ \widetilde{H} = H = \frac{d}{\widetilde{K}}$. Тогда получим:

$$\overline{J}^*_{r^{(2)},s^{(2)}}(H, \varphi_{2m+1}^{(k_0-2)}) \le C\left(\frac{\widetilde{K}}{d}\right)^{\nu_2}\{I_0(H)\}^{\lambda_2}, \tag{4.17}$$

где

$$\nu_2 = \nu_1 + \frac{\nu_1}{\theta},\ \ \lambda_2 = \widetilde{q} + \frac{\lambda_1}{\theta},\ \ r^{(2)} = 2 - \frac{p}{2} + \frac{1}{\theta}\left(1 + \frac{1}{8\theta\sqrt{N}}\right),$$
$$s^{(2)} = \frac{1}{\theta}[s^{(1)} + 2(s_1\theta + \overline{m} + m_1)].$$

Если $r^{(2)}$ меньше единицы, то применяем снова лемму 4.2 и после j шагов придем к единице

$$\overline{J}^*_{r^{(j)},s^{(j)}}(H, \varphi_0^{(k_0-j+1)}) \le C\left(\frac{\widetilde{K}}{d}\right)^{\nu_j}\{I_0(H)\}^{\lambda_j}, \tag{4.18}$$

где

$$\nu_j = \nu_1 - \frac{1}{\theta}\nu_{j-1},\ \lambda_j = \tilde{q} + \frac{1}{\theta}\lambda_{j-1},$$
$$r^{(j)} = 2 - \frac{p}{2} + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} + \dots + \frac{1}{\theta^{j-1}} + \frac{1}{\theta^j 8\sqrt{N}},$$
$$s^{(j)} = \frac{1}{\theta}[s^{(j-1)} + 2(s_1\theta + \overline{m} + m_1)].$$

Теперь достаточно выбрать k_0 так, чтобы $r^{(k_0-1)} < 1,\ r^{(k_0)} \ge 1$ и неравенства (4.16) и (4.17) при $j = k_0$ завершат доказательство леммы.

Основной результат параграфа дает

Теорема 4.1. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условию* (R). *Предположим, что функции* $A_\alpha(x,\xi)$ *непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам до порядка* $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ *при* $x \in \overline{\Omega}, \xi \in R^M$ *и удовлетворяют условиям* (2.1)–(2.3), $f_\alpha(x) \in B_2^{p_0}(R^n),\ p_0 > \frac{n}{2}$. *Тогда для производной подобласти* Ω' *области* Ω *такой, что* $\overline{\Omega'} \subset \Omega$,

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega'} |D^\alpha u(x)|,\ |\alpha| = m,$$

оценивается постоянной, зависящей лишь от $C_0, C_1, C_2\ n, m, p, p_1, \|f_\alpha\|_{B_2^{p_0}}, \|u\varphi_0\|_{B_2^{m+\frac{n}{2}}}$ *и* d' *– расстояния* Ω' *до границы области* Ω. *Здесь* $\varphi_0(x)$ *– произвольная функция класса* $C_0^\infty(\Omega)$, *равная единице в* Ω_d, $d = \frac{d'}{4}$.

Доказательство. Пусть $g(t)$ – произвольная функция класса $C^\infty(R^1)$, равная единице при $t \ge 1$, нулю при $t \le 0$, и пусть $0 \le g(t) \le 1$. Определим при $k = 1,2,\dots$ последовательности:

$$\rho_k = \frac{\tilde{r}}{\theta^{k-1}} + \left[\frac{p}{2} + \frac{1}{1-\theta} - 2\right]\left(\frac{1}{\theta^{k-1}} - 1\right),$$
$$\sigma_k = \frac{\tilde{s}}{\theta^{k-1}} + \frac{2(s_1\theta + m_1 + \overline{m})}{1-\theta}\left(\frac{1}{\theta^{k-1}} - 1\right),$$
$$H_k = \frac{\theta^{k-2}}{M_1}d(1-\theta),\quad \varphi_k(x) = g\left(\frac{d_k - |x - x_0|}{\theta^{k-1}\cdot d(1-\theta)M_2}\right),$$

где

$$M_1 = \sum_{j=0}^{2\overline{m}+1}[(2\overline{m})^i + \tilde{K}],\quad d_k = d(1-\theta+\theta^k),\ M_2 = \frac{2^{2\overline{m}}\cdot \overline{m}^{2\overline{m}+1}}{M_1},$$

числа $\tilde{r}, \tilde{s}$, $\tilde{K}$ указаны в лемме 4.4, θ – в теореме 3.1, $m_1, \overline{m}$ определены в §§ 2, 3, $x_0 \in \Omega'$.

Мы получим рекуррентное соотношение для

$$L_k = J^*_{\rho_k,\sigma_k}(H_k, \varphi_k), \tag{4.19}$$

откуда выведем оценку для L_k и утверждение теоремы. Ограниченность L_1 и оценка для L_1 доказаны в лемме 4.4, причем $\tilde{r}$ удовлетворяет условиям (4.9). Установим ограниченность всех L_k и оценку

$$L_k \le C\theta^{-kM_0}[I_0(H_1)]^{\tilde{q}} L_{k-1}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4.20}$$

Здесь $\tilde{q}$ – то же, что в теореме 3.1, $M_0 = 2n + 2\hat{m} + n\tilde{q}$, C – постоянная, зависящая только от $m, n, p, p_1, C_0, C_1, C_2, \| f_\alpha \|_{B_2^{p0}}$.

Определим для $i = 0,1,\ldots,2\overline{m}+1$ функцию

$$\varphi_{k,i}(x) = g\left(\frac{d_{k,i} - |x - x_0|}{\theta^{k-1} d(1-\theta) M_{2,i}}\right),$$

где

$$d_{k,i} = d\left(1 - \theta + \theta^k + 2\sum_{j=0}^{i} [(2\overline{m})^j + \tilde{K}](1-\theta)\frac{\theta^{k-1}}{M_1}\right), \quad M_{2,i} = \frac{2^{i-1}\overline{m}^i}{M_1}.$$

Проверим, что для $|y| \le 2^{i-1}\overline{m}^i H_k$

$$\varphi_{k,i-1}(x) \cdot \varphi_{k,i}(x+y) = \varphi_{k,i-1}(x). \tag{4.21}$$

В самом деле, если $\varphi_{k,i-1}(x) \ne 0$, то $|x - x_0| \le d_{k,i-1}$. Следовательно,

$$|x + y - x_0| \le d_{k,i-1} + 2^{i-1}\overline{m}^i \frac{\theta^{k-2} d(1-\theta)}{M_1} <$$
$$< d_{k,i} - \frac{2^{i-1}\overline{m}^i}{M_1}\theta^{k-2} d(1-\theta) = d_{k,i} - M_{2,i}\theta^{k-2} d(1-\theta).$$

Таким образом, $\varphi_{k,i}(x+y) = 1$, откуда следует (4.21).

Отметим еще, что

$$\varphi_k(x) \le \varphi_{k,0}(x), \quad \varphi_{k,2\overline{m}+1}(x) = \varphi_{k-1}(x), \quad 0 \le \varphi_{k,i}(x) \le 1,$$
$$|D^\alpha \varphi_{k,i}(x)| \le \left(\frac{K}{d}\theta^{-k}\right)^{|\alpha|}$$

с некоторой постоянной K, зависящей только от m, n, p. Мы получили, что при фиксированном k и $i = 0,1,\ldots,2\overline{m}+1$ последовательность $\varphi_{k,i}(x)$ удовлетворяет условиям (3.13).

Предполагая L_{k-1} ограниченным, мы видим, что выполнены все предположения леммы 4.1 и рекуррентное соотношение (4.20) непосредственно следует из (4.1). Отметим только, что $I_0(H_k) \le H_k^{-n} I_0(H_1)$.

Индукцией по k из (4.20) устанавливается оценка

$$L_k \le C^{\frac{\theta}{1-\theta}(\theta^{-k}-1)} d^{-\nu\theta^{-(k-1)}} \{I_0(H_1)\}^{\tilde{q}\frac{\theta}{1-\theta}(\theta^{-k+1}-1)+\lambda\theta^{-(k-1)}} \theta^{-M_0\frac{\theta^{-k+1}}{(1-\theta)^2}\{k\theta^{(k+1)}-(k+1)\theta^k+1\}}, \tag{4.22}$$

где ν, λ – те же, что в лемме 4.4. При $k = 1$ оценка (4.22) следует из (4.13).

Из (4.22) получаем при всех $k = 1,2,\ldots$:

$$\{L_k\}^{\frac{1}{\rho_k}} \le C^k,$$

откуда, вспоминая выбор L_k и замечая, что все функции $\varphi_k(x)$ равны единице в $B_{d(1-\theta)}(x_0)$ – шаре радиуса $d(1-\theta)$ с центром в x_0 – имеем:

$$\left\{ \int\limits_{B_{d(1-\theta)}(x_0)} [V_\gamma(x)]^{\rho_k}\, dx \right\}^{\frac{1}{\rho_k}} \le C^*, \quad |\gamma| = m. \tag{4.23}$$

где C^* зависит только от $C_0, C_1, C_2, m, n, p, p_1, d, \| f_\alpha \|_{B_2^{p_0}}, I_0(H_1)$.

Утверждение теоремы следует теперь из (4.23) и легко проверяемой оценки

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x \in B_{d(1-\theta)}(x_0)} |D^\gamma u(x)| \le \varlimsup_{k\to\infty} \left\{ \int\limits_{B_{d(1-\theta)}(x_0)} [V_\gamma(x)]^{\rho_k}\, dx \right\}^{\frac{1}{\rho_k}}.$$

§ 5. Непрерывность производных m-го порядка

В настоящем параграфе мы докажем непрерывность в Ω производных m-го порядка обобщенного решения $u(x)$ уравнения (0.1), предполагая выполненными условия (2.1)–(2.3) и условие (R). Пусть x_0 – произвольная точка Ω, d_0 – расстояние от x_0 до границы Ω, и пусть

$$d = \min\left\{\frac{d_0}{2}, 1\right\}.$$

Согласно теореме 4.1 можно считать выполненной оценку

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x \in B_d(x_0)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)| \le M^* \tag{5.1}$$

с некоторой постоянной M^*. Здесь и далее через $B_R(x_0)$ обозначен шар радиуса R с центром в x_0. Обозначим для произвольного R, $R \le \dfrac{d}{2}$, $|\alpha| = m$:

$$\omega_{1,\alpha} = \omega_{1,\alpha}(\mathrm{R}) = \operatorname*{vrai\,min}_{x \in B_R(x_0)} D^\alpha u(x),$$
$$\omega_{2,\alpha} = \omega_{2,\alpha}(\mathrm{R}) = \operatorname*{vrai\,max}_{x \in B_R(x_0)} D^\alpha u(x),$$
$$\omega_\alpha = \omega_\alpha(\mathrm{R}) = \omega_{2,\alpha} - \omega_{1,\alpha}, \ \omega = \omega(R) = \sup_{|\alpha|=m} \omega_\alpha.$$

Исключая тривиальный случай, считаем, что $\omega \ne 0$. Без ограничения общности можем предполагать также, что

$$\inf_{|\alpha|=m} \omega_{1,\alpha}(R) \ge 1 + \omega(d). \tag{5.2}$$

Этого всегда можем добиться, переходя от $u(x)$ к новой функции $v(x)$ по формуле

$$u(x) = v(x) + \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha x^\alpha$$

при надлежащем выборе постоянных c_α.

Непрерывность функций $D^\alpha u(x)$ в точке x, будет следовать из неравенства вида

$$\omega(R(1-\theta)) \le \tau\omega(R) + \eta(R), \tag{5.3}$$

справедливого при всех достаточно малых R с единой постоянной $\tau < 1$, θ – то же, что и в §3, $\eta(R)$ – некоторая функция, стремящаяся к нулю при $R \to 0$, $\eta(R) \le 1$.

Для доказательства (5.3) сначала получим оценку для функций

$$\widetilde{V}_\gamma(x) = \frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2 - \Omega_\gamma^2(x) + \eta(R)}, \tag{5.4}$$

где

$$\Omega_\gamma(x) = F_\gamma(D^\gamma u(x)),$$

$$F_\gamma(t) = \begin{cases} t, \text{ если } \operatorname{mes} G_R^{(\gamma)} > \dfrac{R^n \kappa_n}{2}, \\ -2\omega_{2,\gamma} + \omega + t, \text{ если } \operatorname{mes} G_R^{(\gamma)} \le \dfrac{R^n \kappa_n}{2}, \end{cases}$$

$$G_R^{(\gamma)} = \left\{ x \in B_R(x_0) \colon D^\gamma u(x) < \omega_{2,\gamma} - \frac{\omega}{2} \right\},$$

κ_n – мера шара радиуса 1 в R^n.

Идея введения подобных вспомогательных функций принадлежит Мозеру [21]. Метод оценки функций $\widetilde{V}_\tau(x)$ аналогичен развитому выше методу оценки производных m-го порядка обобщенного решения уравнения (0.1). Снова будут получены соотношения, подобные первому и второму основным неравенствам.

Начнем с вывода аналога первого основного неравенства. В интегральное тождество (2.4) подставим

$$v = \Delta^\beta(-h)\{[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^r \Delta^\beta(h) u \cdot \varphi^s(x)\} \tag{5.5}$$

при $|\beta| = m + m_1 + 1$, $|\gamma| = m$, $0 < h < \dfrac{R}{m + m_1 + 1}$. Здесь

$$\widetilde{V}_\gamma(x,h) = \frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2 - \Omega_\gamma^2(x,h) + \eta(R)}, \quad \Omega_\gamma(x,h) = F_\gamma\left(\frac{\Delta^\gamma(h)u}{h^m}\right),$$

$\eta(R)$ – произвольная положительная функция, не превосходящая единицы, $\varphi(x)$ – некоторая функция класса $C_0^\infty(B_R(x_0))$, для которой

$$|D^\alpha \varphi| \le \left(\frac{L}{R}\right)^{|\alpha|}, \quad |\alpha| \le m, \ 0 \le \varphi(x) \le 1, \tag{5.6}$$

r, s – произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям $r \ge 1$, $4\overline{m} \le s \le C_0 r$. Используя (1.2), получим из интегрального тождества суммированием по β, γ:

$$\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1+1 \\ |\gamma|=m}} \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega \{\Delta^\beta(h)\{A_\alpha(x,u,\ldots,D^m u(x)) - f_\alpha(x)\} \times$$

$$\times D^\alpha\{[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^r \Delta^\beta(h) u \cdot \varphi^s(x)\}\} dx = 0. \tag{5.7}$$

Аналогично § 2, займемся оценкой левой части (5.7). Первый множитель под знаком интеграла оценен в леммах 2.2, 2.3. Для второго имеет место

Лемма 5.1. *При* $|\alpha| \le m$ *выполнено равенство*

$$D^{\alpha}\{[\widetilde{V}_{\gamma}(x,h)]^{r}\Delta^{\beta}(h)u\cdot\varphi^{s}(x)\} = [\widetilde{V}_{\gamma}(x,h)]^{r} D^{\alpha}\Delta^{\beta}(h)u\cdot\varphi^{s}(x) +$$

$$+\frac{2r}{\omega h^{m}}[\widetilde{V}_{\gamma}(x,h)]^{r+1}\Omega_{\gamma}(x,h)\cdot D^{\alpha}\Delta^{\gamma}(h)u\cdot\Delta^{\beta}(h)u\cdot\varphi^{s}(x)+Q_1, \tag{5.8}$$

где для Q_1 *имеет место оценка*

$$|Q_1| \le C\left(\frac{r}{\omega}\right)^{m}[\widetilde{V}_{\gamma}(x,h)]^{r+m}\varphi^{s-m}(x)\sum_{i=0}^{m}\sum_{\substack{\alpha^{(0)}+\ldots+\alpha^{(i)}\le\alpha\\ \alpha^{(0)},\ldots,\alpha^{(i-1)}<\alpha}}\left|\frac{D^{\alpha^{(1)}}\Delta u}{h^{m}}\right|\cdots\left|\frac{D^{\alpha^{(i-1)}}\Delta^{\gamma}u}{h^{m}}\right|\times$$

$$\times|D^{\alpha^{(0)}}\Delta^{\beta}(h)u|\left(\frac{L}{R}\right)^{|\alpha^{(i)}|} \tag{5.9}$$

с постоянной C*, зависящей только от* m, n, M^{*}.

Лемма проверяется непосредственным подсчетом левой части (5.8) с последующей оценкой слагаемых, объединенных в Q_1.

Все постоянные, которые будут встречаться дальше в оценках настоящего параграфа и зависящие только от $m, n, p, p_1, \|f\|_{B_2^{p0}}, C_0, C_1, C_2, M^{*}$, будем обозначать буквой C без всяких индексов.

Лемма 5.2. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условиям* (R) *и* (5.1), *и пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Для произвольных* r, s, *удовлетворяющих условиям* $r \ge 1,\ 4\overline{m} \le s \le C_0 r$, *и произвольной функции* $\varphi \in C_0^{\infty}(B_R(x_0))$, *удовлетворяющей условию* (5.6), *при* $0 < h < \dfrac{R}{m+m_1+1}$ *имеет место оценка*

$$\sum_{|\beta|=m+m_1+1}\sum_{|\gamma|=|\alpha|=m}\int_{\Omega}[\widetilde{V}_{\gamma}(x,h)]^{r}|\Delta^{\beta}(h)D^{\alpha}u|^{2}\varphi^{s}(x)dx \le$$

$$\le C\left(\frac{Lr}{\omega}\right)^{2m}\left\{\widetilde{J}_{r,s}(h,\varphi)+\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1+1\\|\alpha|\le m,|\gamma|=m}}\int_{\Omega}\widetilde{V}_{\gamma}^{r}(x,h)|\Delta^{\beta}f_{\alpha}|^{2}\varphi^{s}(x)dx\right\}, \tag{5.10}$$

где

$$\widetilde{J}_{r,s}(h,\varphi) \equiv \sum_{i=1}^{I}\sum_{|\gamma|=m}\int_{\Omega}[\widetilde{V}_{\gamma}(x,h)]^{r+2m}\varphi^{s-2m}(x)\times$$

$$\times\left\{\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ 1\le|\alpha-\delta|-m<q_i}}\left|\frac{D^{\alpha}\Delta^{\delta}u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\alpha-\delta|-m}}+\left(\frac{h}{R}\right)^{n-1}\right\}dx,$$

q_i *– те же числа, что и в теореме* 2.1.

Неравенство (5.10) получим, оценивая левую часть (5.7) и на основании лемм 2.2, 2.3, 5.1. Оценка проводится аналогично доказательству теоремы 2.1, и мы покажем только, как оценивать несколько типичных членов.

Член, стоящий в левой части (5.10), возникает из неравенства

$$\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1+1\\ \mu\le\widetilde{\beta}}}\int_0^1\sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\alpha|=m}}C_\mu^\beta A_{\alpha\delta}(x+the_{i_0}+\mu h,\ldots,(1+t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))dt\times$$

$$\times\Delta^\beta D^\delta u\cdot[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^r\cdot D^\alpha\Delta^\beta u\cdot\varphi^s(x)\ge$$

$$\ge C\sum_{|\beta|=m+m_1+1}\left\{[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^r\cdot\sum_{|\alpha|=m}|\Delta^\beta(h)D^\alpha u|^2\ \varphi^s(x)-\right.$$

$$\left.-C'[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^r\sum_{|\delta|<m}|\Delta^\beta(h)D^\delta u|^2\ \varphi^s(x)\right\}. \qquad (5.11)$$

Остальные члены оцениваем по абсолютной величине. Например,

$$\left|\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1+1\\ \mu\le\widetilde{\beta}}}\int_0^1\sum_{\substack{|\delta|\le m\\ |\alpha|=m}}C_\mu^\beta A_{\alpha\delta}(x+the_{i_0}+\mu h,\ldots,(1+t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))dt\times\right.$$

$$\left.\times\Delta^\beta D^\delta u\cdot\frac{2r}{\omega h^m}[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^{r+1}\Omega_\gamma(x,h)D^\alpha\Delta^\gamma u\cdot\Delta^\beta u\cdot\varphi^s(x)\right|\le$$

$$\le C\sum_{|\beta|=m+m_1+1}\left\{\varepsilon[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^r\sum_{|\delta|\le m}|\Delta^\beta(h)D^\delta u|^2\ \varphi^s(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{r}{\omega}\right)^2[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^{r+2}\left[\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\Delta^\gamma u|^{\frac{2(m+m_1+1)}{m}}+\left|\frac{\Delta^\beta u}{h^m}\right|^{\frac{2(m+m_1+1)}{m_1+1}}\right]\varphi^s(x)\right\}. \qquad (5.12)$$

Из (5.9), (2.2), (2.3), применяя неравенство Юнга, получаем

$$\left|\sum_{\substack{|\beta|=m+m_1+1\\ \mu\le\widetilde{\beta}}}\sum_{\substack{|\alpha|=m\\ |\delta|\le m}}C_\mu^\beta A_{\alpha\delta}(x+the_{i_0}+\mu h,\ldots,(1+t\Delta_{i_0})D^m u(x+\mu h))\Delta^\beta D^\delta u\cdot Q_1\right|\le$$

$$\le C\sum_{|\beta|=m+m_1+1}\left\{\varepsilon[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^r\sum_{|\delta|=m}|\Delta^\beta(h)D^\delta u|^2\cdot\varphi^s(x)+\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Lr}{\omega}\right)^{2m}[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^{r+2m}\varphi^{s-2m}(x)\sum_{0<|\alpha|<m}\left[\sum_{|\gamma|=m}\left|\frac{D^\alpha\Delta^\gamma u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2(m+m_1+1)}{|\alpha|}}+\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{D^\alpha\Delta^\beta u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2(m+m_1+1)}{m_1+1+|\alpha|}}+\left(\frac{h}{R}\right)^{m+m_1+1}\right]\right\}. \qquad (5.13)$$

Подобным образом оцениваются остальные члены, возникающие при перемножении правых частей формул (2.11), (2.14), (5.8). Оценка (5.10) следует при соответствующем выборе ε из (5.11)–(5.13) и аналогичных оценок для остальных членов.

Обозначим при $r\ge 1,\ 4\overline{m}\le s\le C_0 r, H\le C_0 R$

$$J^*_{r,s}(H,\varphi)=\int_0^H \frac{\widetilde{J}_{r,s}(h,\varphi)}{h^{1+n}}dh+\sum_{|\gamma|=m}\frac{1}{R^n}\int_\Omega [\widetilde{V}_\gamma(x)]^{r+2m}\times$$

$$\times\varphi^{s-2m}(x)dx+\sum_{\substack{|\delta|=|\gamma|=m\\|\mu|\le m+m_1+1}}\sum_{\substack{|\omega|=1\\|\nu|\le m+m_1+1}}^{m+m_1}\int_0^H\frac{dh}{h^{1+n}}\times$$

$$\times\int_\Omega(\widetilde{V}_\gamma^{r+2m}(x+\mu h)+\widetilde{V}_\gamma^{r+2m}(x,h))\varphi^{s-2m}(x)\left[|\Delta^\omega(h)D^\delta u(x+\nu h)|^{\frac{2(m+m_1+1)}{|\omega|}}+\right.$$

$$\left.+\int_{I_m}|\Delta(t_\delta h)D^\delta u(x)|^{2(m+m_1+1)}\,dt\right]dx. \tag{5.14}$$

Отметим, что из положительности функции η и выполнения для $u(x)$ условия (R) следует ограниченность $\widetilde{J}^*_{r,s}(H,\varphi)$ при всех значениях r,s. Сейчас мы получим оценку для $\widetilde{J}^*_{r,s}(H,\varphi)$ аналогичную второму основному неравенству.

Покажем, как оценивать отдельные слагаемые, входящие в $\widetilde{J}^*_{r,s}(H,\varphi)$. При преобразовании $\widetilde{V}_\gamma(x,h)$ воспользуемся интегральным неравенством Иенсена [20]

$$F\left\{\frac{\int_G f(t)dt}{\operatorname{mes}G}\right\}\le\frac{\int_G Ff(t)dt}{\operatorname{mes}G}, \tag{5.15}$$

справедливым при произвольной измеримой функции f, заданной на измеримом множестве $G\subset R^n$, и непрерывной выпуклой функции F. Применяя (1.5) и (5.15), получим

$$\widetilde{V}_\gamma(x,h)=\frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2-F_\gamma^2\left(\frac{\Delta^\gamma u}{h^m}\right)+\eta(R)}=$$

$$=\frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2-\left[\int_{I_m}F_\gamma(D^\gamma u(x+t_\gamma h))dt\right]^2+\eta(R)}\le$$

$$\le\int_{I_m}\frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2-F_\gamma^2(D^\gamma u(x+t_\gamma h))+\eta(R)}dt=\int_{I_m}V_\gamma(x+t_\gamma h)dt. \tag{5.16}$$

Предположим, что существует последовательность $\varphi_k(x), k=1,\ldots,2\overline{m}+1$, такая, что $\varphi_k(x)\in C_0^\infty(B_R(x_0))$, и пусть для произвольного $y\in R^n$, $|y|\le 2^{k-1}\overline{m}^kH$, имеем:

$$\begin{gathered}\varphi_{k-1}(x)\varphi_k(x+y)=\varphi_{k-1}(x),\quad \varphi_0(x)=\varphi(x),\\ 0\le\varphi_k(x)\le 1,\quad |D^\alpha\varphi_k(x)|\le\left(\frac{L}{R}\right)^{|\alpha|}\text{ при }|\alpha|\le\overline{m},\end{gathered} \tag{5.17}$$

Здесь $\overline{m}=m+\max\limits_i q_i$, q_i – те же, что в (5.10). Тогда для

$$\widetilde{J}_1=\int_\Omega[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^{r+2m}\left|\frac{D^\alpha\Delta^\delta u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\alpha+\delta|-m}}\varphi^{s-2m}(x)dx$$

при $|\alpha|\le m,\ 1\le|\alpha+\delta|-m<q_i$, используя (1.5), (5.16), (5.17) и заменяя в интеграле по Ω аргумент, получим:

$$\widetilde{J}_1\le\sum_{j=1}\int_\Omega[\widetilde{V}_\gamma(x,h)]^{r+2m}\,|\Delta(l_1^{(j)})\dots\Delta(l_{|\delta''|}^{(j)})D^{\alpha+\delta'}u(x)|^{\frac{2q_i}{|\delta''|}}\,\varphi_1^{s-2m}(x)dx,$$

где $\delta=\delta'+\delta''$, $|\delta'|=m-|\alpha|$, $l_k^{(j)}\in R^n$, $|l_k^{(j)}|\le 2mh$. По неравенству Гельдера имеем:

$$\widetilde{J}_1\le\sum_{j=1}\left\{\int_\Omega|\Delta(l_1^{(j)})\dots\Delta(l_{|\delta''|}^{(j)})D^{\alpha+\delta'}u(x)\varphi_1^{\overline{m}}(x)|^{\frac{2q_i}{|\delta''|}}\,dx\right\}^{1-\frac{|\delta''|}{q_i\theta}}\{\widetilde{J}_j^{(2)}\}^{\frac{|\delta''|}{q_i\theta}},\tag{5.18}$$

где

$$\widetilde{J}_j^{(2)}=\int_\Omega|[\widetilde{V}_\gamma(x)]^{\frac{\theta(r+2m)}{2}}\Delta(l_1^{(j)})\dots\Delta(l_{|\delta''|}^{(j)})D^{\alpha+\delta'}u(x)\varphi_1^{\frac{\theta(s-s_1)}{2}}(x)|^{\frac{2q_i}{|\delta''|}}\,dx,$$

$s_1=2\overline{m}(1+\max_i q_i),\ \overline{m}=m+\max_i q_i$. Дальнейшие оценки $\widetilde{J}_j^{(2)}$ проводятся с помощью доказываемых аналогично (5.7), (5.12) неравенств:

$$\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}[\widetilde{V}_\gamma(x)]^r\,|\Delta(l_1)\dots\Delta(l_k)D^\beta u(x)|\le$$

$$\le C\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}\{|\Delta(l_1)\dots\Delta(l_k)[\widetilde{V}_\gamma(x)]^r D^\beta u(x)\}|+$$

$$+\frac{r}{\omega}\cdot|\Delta(l_1)\dots\Delta(l_k)\{[\widetilde{V}_\gamma(x)]^{r+1}D^\gamma u(x)\}|+Q_2\},\tag{5.19}$$

где

$$Q_2=\sum_{j<k}\sum_{\nu,\mu,I_j}\frac{r^{k-j+2}}{\omega^{k+1}}[\widetilde{V}_\gamma(x+\mu h)]^{r+1+k}\,|\Delta(l_{i_1})\dots\Delta(l_{i_j})D^\beta u(x-\nu)|^{\frac{k}{j}},$$

$$\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}[\widetilde{V}_\gamma(x)]^r\,|\Delta(l)D^\beta u(x)|\le C\sum_{|\beta|=|\gamma|=m}\Big\{\Delta(l)([\widetilde{V}_\gamma(x)]^r D^\beta u(x))|+$$

$$+\frac{r}{\omega}|\Delta(l)([\widetilde{V}_\gamma(x)]^{r+1}D^\gamma u(x))|\Big\}.\tag{5.20}$$

Здесь в (5.19) $k>1,\ l_1,\dots,l_k$ – произвольные n-мерные векторы. В формуле для Q_2 суммирование по μ,ν,I_j распространяется по всем таким индексам, что $\mu=\varepsilon_1 l_1+\dots+\varepsilon_k l_k$, $\nu=\sum_{i\in I_j}\varepsilon_i l_i$, ε_i принимают значения 0 или 1 и $I_j=(i_1,\dots,i_j)$ – некоторая последовательность из $1,\dots,k$.

Применяя (5.19), (5.20) к оценке $\widetilde{J}_j^{(2)}$, получим, что $\widetilde{J}_j^{(2)}$ оценивается суммой слагаемых вида

$$\frac{r^{6q_i}}{\omega^{2q_i(1+|\delta''|)}}\left\{\int_\Omega|\Delta(l_1)\dots\Delta(l_{k_1})D^\beta u(x)\varphi_{|\delta''|}^{\overline{m}}(x)|^{\frac{2q_i}{k_1}}\,dx\right\}^{1-\frac{k}{|\delta''|}}\times$$

$$\times\left\{\int_\Omega|\Delta(l_1)\dots\Delta(l_k)[\widetilde{V}_\gamma^{\frac{\theta}{2}(r+2m)+\bar{r}}(x)D^\beta u(x)]\varphi_{|\delta''|}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)}(x)|^{\frac{2q_i}{k}}\,dx\right\}^{\frac{k}{|\delta''|}},$$

где l_i – некоторые n-мерные векторы, $|l_i| \le (2\overline{m})^{|\delta''|} h,\ |\beta| = |\gamma| = m,\ 1 \le k \le k_1 \le |\delta''|,\ 0 \le \bar{r} \le |\delta''|^2$.

Дальнейшие преобразования (5.20) проводятся с помощью леммы 3.3.

Из (5.18) следует, что

$$\int_0^H \frac{\widetilde{J}^{(1)}}{h^{1+n}} dh$$

оценивается суммой членов вида

$$J^{(3)} = \frac{rL^{8\overline{m}}}{\omega^{2\bar{q}(1-|\delta''|)}} \left\{ \int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega \left| \left(\frac{h}{R}\right)^{j_1} \Delta(\bar{l}_1)\ldots\Delta(\bar{l}_{i_1}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \{D^\beta u(x) \varphi_{\lambda_1}^{\overline{m}-\nu_1}(x)\} \right|^{\frac{2q}{k_1}} dx \right\}^{1-\frac{k_2}{q\theta}} \left\{ \int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega \left| \left(\frac{h}{R}\right)^{j_2} \Delta(\widetilde{l}_1)\ldots\Delta(\widetilde{l}_{i_2}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \{\widetilde{V}_\gamma^{\frac{\theta}{2}(r+2m)+\bar{r}}(x) D^\beta u(x) \varphi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2^1}(x)\} \right|^{\frac{2q}{k_2}} dx \right\}^{\frac{k_2}{q\theta}}, \tag{5.21}$$

где $|\beta| = |\gamma| = m,\ i_1 + j_1 = k_1 \ge k_2;\ k_1 < q,\ i_2 + j_2 = k_2,\ \lambda_1, \lambda_2 \le 2\overline{m},\ \nu_1, \nu_2 \le \overline{m},\ \bar{l}_i, \widetilde{l}_i$ – n-мерные векторы, $|\bar{l}_i|, |\widetilde{l}_i| \le 2^{\overline{m}-1} m^{\overline{m}} h, 0 \le \bar{r} \le |\delta''|^2$.

Дальше оцениваем второй множитель в (5.21) по неравенству Гельдера, если $0 < j_2 < k_2$, и оценке (1.8) при $l = \frac{n}{2},\ p = 2$. В § 3 проверено, что в этом случае выполнены все условия леммы 1.3. Получим при $H \le C_0 R$

$$\widetilde{J}^{(4)} = \int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega \left| \left(\frac{h}{R}\right)^{j_2} \Delta(\widetilde{l}_1)\ldots\Delta(\widetilde{l}_{i_2}) \times \right.$$

$$\left. \times \{\widetilde{V}_\gamma^{\frac{\theta}{2}(r+2m)+\bar{r}}(x) D^\beta u(x) \varphi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\} \right|^{\frac{2q_i}{k_2}} dx \le$$

$$\le CR^{\frac{(n-2q_i)j_2}{k_2}} \left\{ \int_0^H \frac{h^{2q_i}}{h^{1+n}} dh \right\}^{\frac{j_2}{k_2}} \left\{ \int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega |\Delta(\widetilde{l}_1)\ldots\Delta(\widetilde{l}_{i_2}) \{\widetilde{V}_\gamma^{\frac{\theta}{2}(r+2m)+\bar{r}}(x) \times \right.$$

$$\left. \times D^\beta u(x) \varphi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)\}|^{\frac{2q_i}{i_2}} dx \right\}^{\frac{i_2}{k_2}} \le C\{R^{-n} \int_\Omega \widetilde{V}_\gamma^{\theta(r+2m)+2\bar{r}}(x) |D^\beta u(x)|^2 \times$$

$$\times \varphi_{\lambda_2}^{\theta(s-2s_1)-2\nu_2}(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{\widetilde{H}} \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega |\Delta_i^{m-m_1}(h) \times$$

$$\times \{\widetilde{V}_\gamma^{\frac{\theta}{2}(r+2m)+\bar{r}}(x) D^\beta u(x) \varphi_{\lambda_2}^{\theta(s-2s_1)-\nu_2}(x)\}|^2 dx\}^{\frac{q_i}{k_2}}. \tag{5.22}$$

Такая же оценка справедлива для $\widetilde{J}^{(4)}$ при $j_2 = 0$, что опять следует из леммы 1.3 только без применения неравенства Гельдера. При $j_2 = k_2$ имеем:

$$\widetilde{J}^{(4)} \le \frac{C}{R^n} \int_\Omega |\widetilde{V}_\gamma^{\frac{\theta}{2}(r+2m)+\bar{r}}(x) D^\beta u(x) \varphi_{\lambda_2}^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu_2}(x)|^{\frac{2q_i}{k_2}} dx.$$

Применяя к правой части оценку (1.7) при $\lambda = R^{\frac{n}{2}}$, $\alpha = 0$, мы снова получим для $\widetilde{J}^{(4)}$ оценку вида (5.22).

Аналогично оценится и первый множитель в (5.12). Для него получим оценку:

$$\int_0^H \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega \left| \left(\frac{h}{R}\right)^{j_1} \Delta(\bar{l}_1)\ldots\Delta(\bar{l}_{i_1}) \times \right.$$

$$\left. \times \{D^\beta u(x)\varphi_{\lambda_1}^{\overline{m}-\nu_1}(x)\} \right|^{\frac{2q_i}{k_1}} dx \le C(L^{2\overline{m}} I_0(H_0))^{\frac{q_i}{k_1}}, \tag{5.23}$$

где $I_0(H)$ определено в формуле (3.18), $H_0 = \dfrac{d}{2(m+m_1)}$:

Из (5.22) и (5.23) получим оценку:

$$\int_0^H \frac{\widetilde{J}^{(1)}}{h^{1+n}} dh \le C \frac{r^{8\overline{m}} L^{8\overline{m}+2\overline{q}\overline{m}}}{\omega^{2\overline{q}(1+\overline{m})}} \{I_0(H_0)\}^{2\overline{q}-\frac{1}{\theta}} \{\widetilde{J}_{r,s}(\widetilde{H})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{5.24}$$

где $\overline{q} = \max\limits_i q_i$,

$$\widetilde{I}_{r,s}(\widetilde{H}) = \sum_{|\beta|=|\gamma|=m} \sum_{\lambda=0}^{2\overline{m}} \sum_{\nu=0}^{\overline{m}} \sum_{r=0}^{\overline{m}^2} \left\{ R^{-n} \int_\Omega \widetilde{V}_\gamma^{\theta(r+2\overline{m})+2\bar{r}}(x) \times \right.$$

$$\times \varphi_\lambda^{\theta(s-2s_1)-2\nu}(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{\widetilde{H}} \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega |\Delta_i^{m+m_1}(h) \times$$

$$\left. \times \{\widetilde{V}_\gamma^{\frac{\theta}{2}(r+2m)+\bar{r}}(x) D^\beta u(x) \varphi_\lambda^{\frac{\theta}{2}(s-2s_1)-\nu}(x)\}|^2 \, dx \right\}.$$

Аналогичная (5.24) получается оценка и для остальных слагаемых $\widetilde{J}^*_{r,s}(H,\varphi)$. Отсюда следует

Лемма 5.3. *Пусть* $\varphi(x)$ *– некоторая функция класса* $C_0^\infty(B_R(x_0))$ *и последовательность* $\varphi_k(x)$ *такова, что выполнены условия* (5.17). *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условиям* (R) *и* (5.1). *Тогда для произвольных чисел* $r, s, H, \widetilde{H}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$r \ge 1, \;\; 4\overline{m} \le s \le C_0 r, \;\; 0 < H, \;\; \widetilde{H} < \frac{R}{m+m_1+1}, \tag{5.25}$$

имеет место оценка

$$\widetilde{J}^*_{r,s}(H,\varphi) \le C\left(\frac{rL}{\omega}\right)^{\widetilde{m}} \cdot \{I_0(H_0)\}^{\widetilde{q}} \{\widetilde{I}_{r,s}(\widetilde{H})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{5.26}$$

где числа $\widetilde{m}, \widetilde{q}, \theta$ *такие же, как и в теореме* 3.1.

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 4.1.

Лемма 5.4. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условиям* (R) *и* (5.1), *и предположим, что выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Пусть функции* $\varphi(x), \varphi_k(x)$ *такие же, как в лемме* 5.3, *и числа* $r, s, H, \widetilde{H}$ *удовлетворяют неравенствам* (5.25). *Тогда при*

$$\widetilde{\rho}=\frac{1}{\theta}[r+2m(1-\theta)-r_*],\ \widetilde{\sigma}=\frac{1}{\theta}[s+2(\theta s_1+m_1+\overline{m})]$$

имеет место оценка

$$\widetilde{J}^*_{\widetilde{\rho},\widetilde{\sigma}}(H,\varphi)\le C\left(\frac{r\cdot L}{\omega}\right)^{m_*}\{I_0(H_0)\}^{\widetilde{q}}\{\widetilde{J}^*_{r,s}(\widetilde{H},\varphi_{2\overline{m}+1})\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{5.27}$$

где m *зависит только от* $m, n, r=2(\overline{m}^2+2+m+m_1)$.

Пусть $g(x)$ – произвольная функция класса $C^\infty(R_1)$, равная единице при $t\ge 1$, нулю при $t\le 0$, и пусть $0\le g(t)\le 1$. Определим при $k=0,1,\ldots;\ i=0,1,\ldots,2\overline{m}+1$ последовательности

$$\widetilde{\rho}_k=\frac{2m}{\theta^k}-2m+\frac{r_*}{1-\theta},\ \ \widetilde{\sigma}_k=\frac{2m+1}{\theta^k}+\frac{2(\theta s_1+m_1+\overline{m})}{1-\theta}\left(\frac{1}{\theta^k}-1\right),$$

$$H_k=\frac{\theta^k}{M_1}R(1-\theta),\ \ \chi_{k,i}(x)=g\left(\frac{R_{k,i}-|x-x_0|}{\theta^k\cdot R(1-\theta)M_{2,i}}\right),$$

где

$$M_1=\sum_{i=0}^{2\overline{m}+1}[(2\overline{m})^i+\widetilde{K}],\ \ M_{2,i}=\frac{2^{i-1}\overline{m}^i}{M_1},$$

$$R_{k,i}=R\left\{1-\theta+\theta^{k+1}+\sum_{j=0}^{i}[(2\overline{m})^j+\widetilde{K}](1-\theta)\frac{\theta^k}{M_1}\right\},$$

и пусть $\chi_{k+1}(x)=\chi_{k+1,2\overline{m}+1}(x)$. Отметим, что для $|y|\le 2^{i-1}\overline{m}^iH_k$

$$\chi_{k,i-1}(x)\cdot\chi_{k,i}(x+y)=\chi_{k,i-1}(x),$$

$$|D^\alpha\chi_{k,i}(x)|\le\left(\frac{C}{\theta^k\cdot R}\right)^{|\alpha|},\ \ |\alpha|\le m,$$

с некоторой постоянной C, зависящей лишь от m,n. Непосредственно из (5.27) следует оценка

$$\widetilde{L}_k\le C\left(\frac{\theta^{-2k}}{\omega}\right)^{m_*}\{I_0(H_0)\}^{\widetilde{q}}\{\widetilde{L}_{k-1}\}^{\frac{1}{\theta}}, \tag{5.28}$$

где

$$\widetilde{L}_k=\widetilde{J}^*_{\widetilde{\rho}_k,\widetilde{\sigma}_k}(H_k,\chi_k).$$

Индукцией по k из (5.28) получим:

$$\widetilde{L}_k\le\left(\frac{C}{\omega^{m_*}}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}(\theta^{-k+1}-1)}\theta^{-2m_*\frac{\theta^{-k+1}}{(1-\theta)^2}\{k\theta^{k+1}-(k+1)\theta^k+1\}}\{I_0(H_0)\}^{\frac{\theta}{1-\theta}(\theta^{-k+1}-1)}\{\widetilde{L}_1\}^{\theta^{-(k+1)}}$$

и, следовательно, при всех k

$$\{\widetilde{L}_k\}^{\frac{1}{\widetilde{\rho}_k}}\le\frac{\widetilde{C}}{\omega^{\nu_0}}\{\widetilde{L}_1\}^{\mu_0} \tag{5.29}$$

где ν_0, μ_0 – некоторые, зависящие только от m, n, числа, постоянная $\widetilde{C}$, зависит только от $C_0, C_1, C_2, n, m, p, p_1, \| f_\alpha \|_{B_2^{p0}}, \| u\varphi_0 \|_{B_2^{m+\frac{n}{2}}}$, $\varphi_0(x)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$, равная единице в Ω_d.

Покажем теперь, как оценивать $\widetilde{L}_1$ и как выбрать $\eta(R)$ для того, чтобы правая часть (5.29) была ограниченной. Имеем:

$$\widetilde{L}_1 = \widetilde{J}^*_{\widetilde{\rho}_1, \widetilde{\sigma}_1}(H, \chi_1) \le C\left[\sum_{|\gamma|=m} \frac{1}{R^n} \int_{B_R(x_0)} \widetilde{V}_\gamma^{\frac{r_*}{1-\theta}+2m}(x)dx + \right.$$

$$+ \sum_{\substack{|\gamma|=m \\ |\mu| \le m+m_1+1}} \int_0^{H_1} \frac{dh}{h^{1+n}} \int_\Omega \left\{ \widetilde{V}_\gamma^{\frac{r_*}{1-\theta}+2m}(x,h) + \widetilde{V}_\gamma^{\frac{r_*}{1-\theta}+2m}(x,h) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{I} \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ 1 \le |\alpha+\delta|-m < q_i}} \left| \frac{D^\alpha \Delta^\delta u}{h^{m-|\alpha|}} \right|^{\frac{2q_i}{|\alpha+\delta|-m}} + \sum_{\substack{1 \le |\omega| \le m+m_1 \\ |\gamma| \le m+m_1+1, |\beta|=m}} |\Delta^\omega(h) D^\beta u(x+\nu h)|^{\frac{2(m+m_1+1)}{|\omega|}} + \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{|\beta|=m} \int_{I_m} |\Delta(t_\beta h) D^\beta u(x)|^{2(m+m_1+1)} \, dt \right\} \chi_1(x)dx \right]. \tag{5.30}$$

Применим к первому интегралу в правой части (5.30) лемму 1.4. В качестве множества G, фигурирующего в условии леммы, возьмем $G_R^{(\gamma)}$, если $\mathrm{mes} G_R^{(\gamma)} > \frac{R^n \cdot \kappa_n}{2}$, и $B_R(x_0) \setminus G_R^{(\gamma)}$, если $\mathrm{mes} G_R^{(\gamma)} \le \frac{R^n \cdot \kappa_n}{2}$. В обоих случаях будет выполнено первое условие леммы 1.4 относительно $G: \mathrm{mes} G \ge C' \cdot R^n$ с некоторой зависящей лишь от n постоянной C'. Если $G = G_R^{(\gamma)}$, то из (5.4) имеем для $x \in G_R^{(\gamma)}$:

$$\widetilde{V}_\gamma(x) = \frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2 - (D^\gamma u(x))^2 + \eta(R)} \le \frac{1}{\omega_{1,\gamma} - \frac{\omega}{4}}.$$

Из (5.2) получим:

$$\underset{x \in G_R^{(\gamma)}}{\mathrm{vrai\,max}}\, \widetilde{V}_\gamma(x) \le \frac{1}{1 + \frac{3\omega}{4}} \le 1,$$

так что в этом случае выполнено и второе условие леммы с $C'' = 1$.

Если $G = B_R(x_0) \setminus G_R^{(\gamma)}$, то для $x \in G$ имеем:

$$\widetilde{V}_\gamma(x) = \frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2 - [2\omega_{2,\gamma} - \omega - D^\gamma u(x)]^2 + \eta(R)} \le$$

$$\le \frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2 - \left(\omega_{2,\gamma} - \frac{\omega}{2}\right)^2} = \frac{1}{\omega_{2,\gamma} - \frac{\omega}{4}},$$

и снова из (5.2) получим: $\operatorname{vraimax}_{x\in G} \widetilde{V}_\gamma(x) \le 1$. Все условия леммы 1.4 для первого интеграла в правой части (5.30) выполнены и, применяя лемму, находим:

$$\frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R(x_0)} \widetilde{V}_\gamma^{\frac{r_*}{1-\theta}+2m}(x)dx \le C\left\{\frac{1}{\omega^n}\int\limits_{B_R(x_0)} \widetilde{V}_\gamma^{\frac{r_*}{1-\theta}+2m+n}(x)\,|\nabla D^\gamma u|^n\,dx+1\right\}\le$$

$$\le C\left\{\frac{1}{[\eta(R)]^{\frac{r_*}{1-\theta}+2m+n}}\int\limits_{B_R(x_0)}|\nabla D^\gamma u|^n\,dx+1\right\}$$

и из (5.30) получим:

$$L_1\le C\sum_{|\gamma|=m}\left\{[\eta(R)]^{-\left(\frac{r_*}{1-\theta}+2m+n\right)}\left[\int\limits_{B_R(x_0)}|\nabla D^\gamma u|^n\,dx+\right.\right.$$

$$+\int\limits_0^R\frac{dh}{h^{1+n}}\int\limits_{B_R(x_0)}\left\{\sum_{i=1}^{I}\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ 1\le|\alpha+\delta|-m<q_i}}\left|\frac{D^\alpha\Delta^\delta u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\alpha+\delta|-m}}+\right.$$

$$+\sum_{\substack{1\le|\omega|\le m+m_1\\ |\nu|\le m+m_1+1,|\beta|=m}}|\Delta^\omega(h)D^\beta u(x+\nu h)|^{\frac{2(m+m_1+1)}{|\omega|}}+$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{|\beta|=m}\int\limits_{I_m}|\Delta(t_\beta h)D^\beta u(x)|^{2(m+m_1+1)}\,dt\right\}dx\right]+1\right\}$$

и для $\widetilde{L}_1$ выводим оценку

$$\widetilde{L}_1\le\overline{C}\tag{5.31}$$

с некоторой постоянной $\overline{C}$, зависящей лишь от $m,n,d,\|u\varphi_0\|_{B_2^{m+\frac{n}{2}}}$, где φ_0 – функция класса $C_0^\infty(\Omega)$, равная единице в Ω_d, если выбрать

$$\eta(R)=\min\left\{1,\left[\sum_{|\gamma|=m}\left(\int\limits_{B_R(x_0)}|\nabla D^\gamma u|^n\,dx+\right.\right.\right.$$

$$+\int\limits_0^R\frac{dh}{h^{1+n}}\int\limits_{B_R(x_0)}\left\{\sum_{i=1}^{I}\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ 1\le|\alpha+\delta|-m<q_i}}\left|\frac{D^\alpha\Delta^\delta u}{h^{m-|\alpha|}}\right|^{\frac{2q_i}{|\alpha+\delta|-m}}+\right.$$

$$+\sum_{\substack{1\le|\omega|\le m+m_1\\ |\nu|\le m+m_1+1}}\sum_{|\beta|=m}|\Delta^\omega(h)D^\beta u(x+\nu h)|^{\frac{2(m+m_1+1)}{|\omega|}}+$$

$$\left.\left.\left.\left.+\sum_{|\beta|=m}\int\limits_{I_m}|\Delta(t_\beta h)D^\beta u(x)|^{2(m+m_1+1)}\,dt\right\}dx\right)\right]^{\left(\frac{r_*}{1-\theta}+2m+n\right)^{-1}}\right\}.\tag{5.32}$$

Из свойства абсолютной непрерывности интеграла следует, что определяемая формулой (5.32) функция $\eta(R)$ стремится к нулю при R, стремящемся к нулю. Отметим еще, что $\eta(R)$ – монотонно возрастающая функция.

Теперь из (5.29) и (5.32) имеем:

$$\{\widetilde{L}_k\}^{\frac{1}{\widetilde{\rho}_k}} \le \frac{C_*}{\omega^{\nu_0}}, \tag{5.33}$$

где C_* зависит от тех же параметров, что и $\widetilde{C}$ в (5.29). Из (5.33) и (5.14) получим при $|\gamma| = m$:

$$\left\{\int\limits_{\Omega} [\widetilde{V}_\gamma(x)]^{\widetilde{\rho}_k+2m} \chi_k^{\widetilde{\sigma}_k-2m}(x)dx\right\}^{\frac{1}{\widetilde{\rho}_k}} \le \frac{C_*}{\omega^{\nu_0}}.$$

Так как при всех $k = 1,2,\ldots$ $\chi_k(x) \equiv 1$ в $B_{R(1-\theta)}(x_0)$, то из последнего неравенства при $k \to \infty$ следует:

$$\operatorname*{vraimax}_{x \in B_{R(1-\theta)}(x_0)} \widetilde{V}_\gamma(x) \le \frac{C}{\omega^\gamma} \tag{5.34}$$

с некоторыми постоянными C, ν. Отсюда получим при $x \in B_{R(1-\theta)}(x_0)$:

a) Если $\operatorname{mes} G_R^{(\gamma)} > \frac{R^n \cdot \kappa_n}{2}$, то

$$\frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2 - (D^\gamma u(x))^2 + \eta(R)} \le \frac{C}{\omega^\gamma}, \tag{5.35}$$

и так как $\omega_{2,\gamma} + D^\gamma u(x) \le 2M^*$, то из (5.35) выводим:

$$\operatorname*{vraimax}_{x \in B_{R(1-\theta)}(x_0)} D^\gamma u(x) \le \omega_{2,\gamma} - \frac{\omega^{1+\nu}}{2CM^*} - \eta(R),$$

откуда получаем:

$$\omega_\gamma(R(1-\theta)) \le \omega(R) - \frac{\omega^{1+\nu}(R)}{2CM^*} + \eta(R). \tag{5.36}$$

b) Если $\operatorname{mes} G_R^{(\gamma)} \le \frac{R^n \cdot \kappa_n}{2}$, то

$$\frac{\omega}{\omega_{2,\gamma}^2 - (-2\omega_{2,\gamma} + \omega + D^\gamma u(x))^2 + \eta(R)} \le \frac{C}{\omega^\nu}$$

и, следовательно,

$$\operatorname*{vraimin}_{x \in B_{R(1-\theta)}(x_0)} D^\gamma u(x) \ge \omega_{2,\gamma} - \omega - \frac{\omega^{1+\nu}(R)}{5CM^*} - \eta(R).$$

Таким образом, мы снова получим аналогичное (5.36) неравенство

$$\omega_\gamma(R(1-\theta)) \le \omega(R) - \frac{\omega^{1+\nu}(R)}{5CM^*}. \tag{5.37}$$

Из неравенств (5.36), (5.37) следует, что $\omega_0 = 0$, где $\omega_0 = \lim\limits_{R \to 0} \omega(R)$. В самом деле, если предположить, что $\omega_0 > 0$, то из (5.36), (5.37) получим:

$$\omega(R(1-\theta)) \le \tau\omega(R) + \eta(R) \tag{5.38}$$

с некоторой постоянной τ, меньшей единицы и не зависящей от R. Тогда при любом натуральном n имеем:

$$\omega\left(\frac{d}{2}(1-\theta)^{2n}\right) \le \tau^n \omega\left(\frac{d}{2}(1-\theta)^n\right) +$$
$$+\eta\left(\frac{d}{2}(1-\theta)^{2n-1}\right) + \tau\eta\left(\frac{d}{2}(1-\theta)^{2n-2}\right) + \cdots + \tau^{n-1}\eta\left(\frac{d}{2}(1-\theta)^n\right) \le$$
$$\le \tau^n \omega\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{1}{1-\tau}\eta\left(\frac{d}{2}(1-\theta)^n\right),$$

откуда следует, что предположение $\omega_0 > 0$ неверно. Тем самым доказано, что

$$\lim_{R\to 0}\omega(R) = 0,$$

а следовательно, справедлива

Теорема 5.1. *Пусть* $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения* (0.1), *удовлетворяющее условию* (R). *Предположим, что функции* $A_\alpha(x,\xi)$ *непрерывно дифференцируемы по всем аргументам до порядка* $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ *при* $x \in \overline{\Omega}, \xi \in R^M$ *и удовлетворяют условиям* (2.1)–(2.3), $f_\alpha(x) \in B_2^{p_0}(R^n),\ p_0 > \frac{n}{2}$. *Тогда производные порядка* m *функции* $u(x)$ *непрерывны в* Ω.

Непрерывность производных более высокого порядка получается из теоремы 11.4 книги [4].

1. Проблемы Гильберта, М., «Наука», 1969.
2. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., «Наука», 1964.
3. *Петровский И.Г.*, Об аналитичности решений уравнений с частными производными, Матем. сб., **5** № 1 (1939), 3–68.
4. *Агмон С, Дуглис А., Ниренберг Л.*, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
5. *Мазья В.Г.*, Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами, Функц. анализ, **2**, вып. 3 (1968), 53–57.
6. *De Giorgi E.*, Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo elliptico, Bolletino della Unione Matematica Italiana, ser. IV, №1 (1968), 135–137.
7. *Giusti E., Miranda M.*, Un esempio di soluziono discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni, Bollettino della Unione Matematica Italiana, ser. IV, № 2 (1968), 219–226.
8. *Moгrey C. B.*, Partial regularity results for non-linear elliptic systems, J. Math. and Mech, **17**, № 7 (1968), 649–670.

9. *Giusti E. and Miranda M.*, Sulla regolarita delle soluzioni deboli di una class di sistemi ellittici quasi-lineari, Archive Rat'l. Mech. Anal., **31** (1968), 173–184.

10. *Nečas I.*, Sur la regularite des solutions faibles des equation elliptiques non lineaires, Comm. Math. Univ. Carol., **9**, 3 (1968), 365–413.

11. *Фохт А.С.*, О дифференциальных свойствах решений одного класса квазилинейных уравнений эллиптического типа, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, **269**, вып. 14 (1969), 241–249.

12. *Nečas I.*, On the demiregularity of weak solutions of non-linear elliptic equations, Bull. Amer. Math. Soc., **77**, № 1 (1971), 151–156.

13. *Frehse I.*, On the boundedness of weak solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations , Boll. Unione Mat. Italiana, **3**, № 4 (1970), 407–427.

14. *Widmann K.*, Hölder continuity of solutions of elliptic systems, Manuscripta mathematica, vol. 5, Fasc. 4 (1971), 299–308.

15. *Никольский С. М.*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969.

16. *Скрыпник И.В.*, О регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка, Докл. АН СССР, **203**, № 1 (1972), 36–38.

17. *Скрыпник И.В.*, Квазилинейные эллиптические уравнения высшего порядка, Изд. Дон. Гос. ун-та, 1971.

18. *Вишик М.И.*, Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Тр. Моск. матем. об-ва, **12** (1963), 125–184.

19. *Ильин В.П., Солонников В.А.*, О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных, Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, **66** (1962), 205–226.

20. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.,* Неравенства, М., ИЛ, 1965.

21. *Moser I.*, A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problems for elliptic differential equations, Comm. Pure and Appl. Math., **13**, № 3 (1960), 457–468.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З МОНОТОННИМИ ОПЕРАТОРАМИ

(*Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 1*)

В останні роки одержано істотні результати в питанні про розв'язність нелінійних рівнянь з монотонними операторами [1], цікавість до яких підвищується в зв'язку з застосуванням до нелінійних диференціальних рівнянь [2-5]. В даній статті для вивчення подібних операторів застосовується обертання поля, яке узагальнює поняття обертання цілком неперервного векторного поля М.А.Красносельського [6]. Можна було б використати еквівалентне поняття ступеня відображення [7].

Нехай X – сепарабельний рефлексивний банахів простір, X^* – його спряжений. Позначимо норму елемента $u \in X$ через $\|u\|$, норму елемента $h \in X^*$ через $\|h\|_*$ і через $\langle h,u \rangle$ значення функціоналу h на елементі u.

Оператор A (лінійний або нелінійний), діючий з X в X^*, називається монотонним, якщо для довільних $x, y \in X$:

$$\langle A(x) - A(y),\ x - y \rangle \geq 0. \tag{1}$$

Надалі будемо припускати, що оператор A неперервний і задовольняє умову: для довільної обмеженої послідовності $\{x_i\} \in X$ з

$$\langle Ax_i - Ax_j, x_i - x_j \rangle \to 0 \qquad i, j \to \infty \tag{2}$$

випливає сильна збіжність послідовності $\{x_i\}$.

Цю умову задовольняють, наприклад, сильно монотонні оператори [1]. Нехай T – цілком неперервний оператор з X в X^* і D – обмежена область в X з границею S. Припустимо, що границя перетину S довільними скінченновимірними підпросторами є поліедром, хоч від цього припущення легко позбутися (порівн. [6]) і наступні результати справедливі без цього обмеження.

Припустимо, що рівняння $Au + Tu = 0$ не має розв'язку $u \in S$, і визначимо обертання поля $Au + Tu$ на S.

Легко перевірити, що із зроблених припущень випливає існування числа $c > 0$ такого, що

$$\|Au + Tu\|_* > c \quad \text{при} \quad u \in S. \tag{3}$$

Аналогічно Лєре і Шаудеру [7] можна вибрати скінченновимірний підпростір $F_m^* \subset X^*$ і неперервний оператор $\Pi_m^* : TS \to F_m^*$ так, щоб для $u \in S$

$$\left\| \Pi_m^* Tu - Tu \right\|_* < \frac{c}{2} . \qquad (4)$$

Нехай $P_m^* : X^* \to F_m^*$ – проектуючий оператор, P_m до нього спряжений і F_m – множина значень оператора P_m. Побудуємо довільно щільну в X послідовність підпросторів $F_j \subset X,\ j > m$ таку, що $\dim F_j = j,\ F_{j+1} \supset F_j,\ j \ge m$. Позначимо через $u_1,...,u_n$ базис підпростору F_n і визначимо на $S \cap F_n$ векторне поле

$$\Phi_n(u) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle Au + \Pi_m^* Tu,\ u_i \right\rangle u_i \ . \qquad (5)$$

Використовуючи формули (1) – (4), встановлюється існування такого числа N, що при $n \ge N$, поле Φ_n не має нульових векторів на $S \cap F_n$ і обертання полів Φ_n [6] на $S \cap F_n$ не залежить від n.

Доводиться незалежність обертання поля Φ_n при досить великих n від вибору F_m^*, оператора Π_m^*, послідовності $\{F_k\}$ і вибору базисів F_k. Все це робить натуральним

Визначення 1. Обертання поля $Au + Tu$ на S буде називатися обертання векторного поля $\Phi_N(u)$ на $S \cap F_N$.

2. **Визначення 2.** Поля $A_1u + T_1u,\ A_2u + T_2u$, які задовольняють умови п.1 і не обертаються в нуль на S будемо називати гомотопними на S, якщо існує оператор $A(u,t) + T(u,t) : X \times [0,1] \to X^*$, такий що $A(u,t)$ рівномірно неперервний по t при $u \in S$ і задовольняє при кожному t умови п.1, оператор $T(u,t)$ діє цілком неперервно з $X \times [0,1]$ в X^*, $A(u,t) + T(u,t)$ не обертається в нуль на $S \times [0,1]$ і для $u \in S$:

$$A(u,0) + T(u,0) = A_1u + T_1u, \quad A(u,1) + T(u,1) = A_2u + T_2u \ .$$

Безпосередньо перевіряється, що обертання гомотопних полів однакові. Звідси, зокрема, випливає

Зауваження 1. Якщо поля $A_1u + T_1u,\ A_2u + T_2u$ задовольняють для $u \in S$ нерівності $\| A_1u + T_1u - A_2u - T_2u \|_* < \| A_1u + T_1u \|_*$, то їх обертання однакові. Справедлива класифікаційна теорема, яка доводиться на основі теореми Хопфа [6]:

Теорема 1. *Поля* $A_1u + T_1u$ і $A_2u + T_2u$, *які задовольняють умови п.*1 *і не обертаються в нуль на* S, *гомотопні на* S, *якщо їх обертання однакові*.

Подібно доводиться

Теорема 2. *Припустимо, що поле* A_1u+T_1u *задовольняє умови п.*1*, не обертається в нуль на* S *і має на* S *нульове обертання. Тоді існує поле* A_2u+T_2u, *яке задовольняє умови п.*1*, не обертається в нуль у* D *і таке, що при* $u\in S$ $A_1u+T_1u=A_2u+T_2u$.

3. Нехай $Au+Tu$ поле, яке задовольняє умови п.1. Точка u_0, в якій $Au_0+Tu_0=0$, буде називатися нерухомою точкою поля. Індексом ізольованої нерухомої точки u_0 буде називатися обертання поля $Au+Tu$ на сфері радіуса ε з центром в u_0 при ε досить малому.

Теорема 3. *Припустимо, що поле* $Au+Tu$ *не обертається в нуль на* S *і має в* D *лише ізольовані нерухомі точки. Тоді нерухомих точок скінчена кількість і обертання поля* $Au+Tu$ *на* S *дорівнює сумі індексів всіх нерухомих точок у* D .

Зокрема, для того щоб поле $Au+Tu$ мало в D нерухомі точки, достатньо, щоб обертання цього поля на S було відмінним від нуля. Це дає загальний принцип існування розв'язку рівняння $Au+Tu=0$, узагальнюючий принцип Лєре–Шаудера.

4. Однією з ознак відмінності від нуля обертання поля може служити таке узагальнення теореми Л.А.Люстерніка–Л.Г.Шнірельмана–К.Борсука [6].

Теорема 4. *Припустимо, що поле* $Au+Tu$, *яке задовольняє умови п.*1*, не обертається в нуль на сфері* $S=\{u:\|u\|=r\}$ *і задовольняє для* $u\in S$ *умову*

$$\frac{Au+Tu}{\|Au+Tu\|_*}\neq\frac{A(-u)+T(-u)}{\|A(-u)+T(-u)\|_*}\,. \tag{6}$$

Тоді обертання на S *поля* $Au+Tu$ *є непарним числом*.

Оператор A буде називатися однорідним порядку однорідності α, якщо $A(tu)=t^{\alpha}Au$, для $t\geq 0$.

З теореми 4 і зауваження 1 маємо

Наслідок 1. Нехай A,T – однорідні оператори порядку $\alpha>0$, які задовольняють умови п.1. Припустимо, що поле $Au+Tu$ не обертається в нуль і задовольняє умову (6) на одиничній сфері простору X. Тоді рівняння

$$Au+Tu=h \tag{7}$$

має розв'язок при довільному елементі $h\in X^*$.

Подібне твердження довів С.І. Похожаєв [8]. Багато авторів [1 – 5] вивчали рівняння (7) при виконанні умови

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\langle Au+Tu,u\rangle}{\|u\|}=\infty\,. \tag{8}$$

Легко перевірити, що для довільного $h\in X^*$ при достатньо великому R обертання поля $Au+Tu-h$ на сфері $\|u\|=R$ дорівнює 1, тобто рівняння (7) має розв'язок при всіх $h\in X^*$. В цьому випадку для розв'язності рівняння досить від A вимагати лише монотонності і хемінеперервності [1]. Для доведення досить розглянути рівняння $\varepsilon A_1 u + Au + Tu = h$, де A_1 задовольняє умови п.1, і перейти до границі при $\varepsilon \to +0$.

5. На доцільність розгляду асимптотичних операторів вказує Я.Б.Лопатинський у [9].

Вважатимемо, що оператор A асимптотично однорідний, якщо він може бути поданий у вигляді $A = A_0 + A_1$, де A_0 – однорідний оператор порядку $\alpha > 0$ і $\|A_1 u\|_* \cdot \|u\|^{-\alpha} \to 0$ при $\|u\| \to \infty$.

Нехай оператори A, T асимптотично однорідні порядку α. Будемо говорити, що оператор $Au + Tu$ – регулярний на безмежності, якщо рівняння $A_0 u + T_0 u = 0$ має лише нульовий розв'язок.

Теорема 5. *Нехай A, T – асимптотично однорідні оператори і оператор $A + T$ – регулярний на безмежності. Припустимо, що поля $Au + Tu$, $A_0 u + T_0 u$ задовольняють умови п.*1 *і індекс точки 0 поля $A_0 u + T_0 u$ відмінний від нуля. Тоді рівняння* (7) *має розв'язок при всіх $h \in X^*$.*

6. Тут вкажемо на збіжність методу Гальоркіна при розв'язуванні рівняння (7).

Нехай $\{F_n\}$ – послідовність підпросторів простору X таких, що

$$\dim F_n = n, \quad F_n \subset F_{n+1}, \quad \overline{\bigcup_n F_n} = X$$

і $\{P_n\}$ – послідовність проекційних операторів з рівномірно обмеженими нормами таких, що $P_n X = F_n$. Припустимо, що поле $Au + Tu$ задовольняє умови п.1 і в деякій кулі $D \subset X$ має єдиний розв'язок ненульового індексу.

Наближеним розв'язком u_n рівняння (7) будемо називати розв'язок рівняння $P_n^* Au + P_n^* Tu = P_n^* h, \ \ u \in F_n \cap D$ де P_n^* – спряжений з P_n оператор.

Теорема 6. *Наближені розв'язки u_n існують при n більших від деякого N і збігаються при $n \to \infty$ до розв'язку рівняння* (7).

7. Попередні результати подібно як в [1–5] застосовуються до нелінійних еліптичних рівнянь.

8. **Зауваження 2.** Результати статті зберігаються при заміні умови неперервності оператора A умовами хемінеперервності і обмеженості. Так що, наприклад, оператор $*: X \to X^*$, який ставить у відповідність елементу $u \in X$ елемент $*u \in X^*$ такий, що $\|\bullet u\|_* = \|u\|, \ \langle *u, u \rangle = \|u\|^2$ в випадку рівномірно-опуклих X, X^* задовольняє всі вимоги, накладені на A.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Р.И.Качуровский,* УМН, **23.** в. 2, 121 (1968). 2. *М.И.Вишик,* Тр. Моск. матем. о-ва, 12, 125 (1963). 3. *F.E.Browder,* Vull. Amer.Math. Soc, **69,** 861 (1963). 4. *F.E.Browder,* Trans. Amer. Math. Soc., **117,** 530 (1965). 5. *Ю.А.Дубинський,* УМН, 1968, **23,** в. 1, 45 (1968). 6. *М.А.Красносельский,* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956, стр. 87. 7. *Ж. Лере* и *Ю. Шаудер*, УМН, **1,** 3–4, 71 (1946). 8. *С.И.Похожаев,* Функц. анализ, **1:3,** 66 (1967). 9. *Я.Б.Лопатинський,* ДАН УРСР, сер. А., 515 (1968).

ПРО СПЕКТР ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

(*Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1970, №1*)

1. Нехай X – сепарабельний дійсний рефлексивний банахів простір, X^* до нього спряжений. Норми елементів $u \in X$, $h \in X^*$ будемо позначати відповідно через $\|u\|$, $\|h\|$ і через $\langle h, u \rangle$ позначаємо значення функціоналу h на елементі u.

Вивчається задача на власні значення

$$\lambda Au - Tu = 0, \tag{1}$$

де A – сильно монотонний [1], неперервний, а T – цілком неперервний нелінійні оператори з X в X^*. Обмеження на A можна послабити аналогічно [2]. Припускається, що $A0 = T0 = 0$. Будемо називати число λ_0 власним значенням рівняння (1), а $u_0 \neq 0$ власним вектором, який відповідає цьому власному значенню, якщо $\lambda_0 Au_0 - Tu_0 = 0$. Спектром Λ рівняння (1) називаємо сукупність всіх власних значень.

До поставленої задачі зводиться, як відомо з [3], задача на власні значення для нелінійних еліптичних рівнянь. Ф.Е.Браудер [3] одержав варіаційними методами деякі ознаки існування власних векторів для таких операторів. В даній роботі, використовуючи обертання поля $Au - Tu$ [2], встановлюється ряд результатів про структуру спектра і існування власних векторів рівняння (1), аналогічних відомим результатам для цілком неперервних операторів [4 – 6].

2. **Теорема 1.** *Спектр рівняння* (1) *являє собою множину типу* F_σ. *При доведенні цього твердження використовується*

Лема 1. *Нехай* $\Lambda[a,b]$ – *множина власних значень рівняння* (1), *яким відповідають власні вектори* u *такі, що*

$$0 < a \leq \|u\| \leq b < +\infty .$$

Тоді $\Lambda[a,b] \cup \{0\}$ – *замкнена множина*.

Звідси, зокрема, одержуємо: нехай $\lambda \neq 0$ гранична точка спектра рівняння (1) і нехай $\lambda \notin \Lambda$; тоді для довільного N можна вказати $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\Lambda\left[N^{-1}, N\right] \cap \left[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon\right] = \varnothing.$$

3. Ознаки існування власних векторів, які вказуються в цьому пункті, узагальнюють відомі результати М.О.Красносельського [4].

Теорема 2. *Нехай простір* X *має базис і* D *обмежена область в* X, *яка містить в собі нуль простору* X. *Припустимо, що з деякою постійною* C *на границі* S *області* D *виконується нерівність* $\|Au\|_* \leq C\|Tu\|_*$. *Тоді рівняння* (1) *має на* S *власний вектор.*

Використовуючи припущення, будується послідовність рівномірно обмежених проекційних операторів $P_n : X \to X$ таких, що $P_n X$ – n-мірний підпростір X, $P_i P_j = P_j P_i = P_i$ при $i \le j$, $\bigcup_n P_n X$ щільна в X множина. Якщо поле $Au - Tu$ на S не обертається в нуль, то при досить великих непарних n поле $P_n^*(Au - Tu)$ негомотопне з одним з полів $P_n^* Aui - P_n^* Au$ на $S \cap P_n X$ (тут P_n^* спряжений до P_n оператор). Звідси одержується існування λ_n, $u_n \in S \cap P_n X$ таких, що $\lambda_n P_n^* Au_n - P_n^* Tu_n = 0$. Перевіряється, що з $\{\lambda_n\}$ можна вибрати підпослідовність збіжну до деякого $\lambda_0 \ne 0$. Звичайними міркуваннями теорії монотонних операторів встановлюється, що $\{u_n\}$ містить в собі підпослідовність збіжну до власного вектора рівняння (1), який відповідає числу λ_0.

З негомотопності на границі S обмеженої області $D \subset X$ полів $Au - Tu$ і Au безпосередньо випливає існування на S власного вектора рівняння (1) при виконанні однієї з наступних умов:

а) $0 \in D$ і обертання поля $Au - Tu$ на S відмінне від одиниці;

б) $0 \notin D \cup S$ і обертання поля $Au - Tu$ на S відмінне від нуля.

Вважатимемо, що власні вектори рівняння (1) утворюють в $D \subset X$ неперервну вітку, яка проходить через u_0, якщо границя довільної обмеженої області G такої, що $u_0 \in G \subset D$ має з множиною власних векторів непустий перетин.

Теорема 3. *Нехай* $\lambda_0 \ne 0$ *і* $u_0 \ne 0$ *– ізольована нерухома точка поля* $Au - \frac{1}{\lambda_0} Tu$ *ненульового індексу. Тоді в деякій області* D *власні вектори рівняння* (1) *утворюють неперервну вітку, яка проходить через* u_0, λ_0 *внутрішня точка спектра рівняння* (1).

Перше твердження одержується з виконання умови б), якщо за D взяти довільну обмежену область X, яка не містить нуля і відмінних від u_0 нерухомих точок поля $Au - \frac{1}{\lambda_0} Tu$. Друге твердження одержуємо із гомотопності на границі D полів $Au - \frac{1}{\lambda_0} Tu$ і $Au - \frac{1}{\lambda} Tu$ при λ близьких до λ_0.

4. Надалі від оператора T досить вимагати лише неперервності.

Теорема 4. *Нехай* u_0 *власний вектор рівняння* (1), *який відповідає власному числу* $\lambda_0 \ne 0$. *Припустимо, що з деякими* $r, \delta > 0$ *має місце нерівність*

$$\|Tu - Tv\|_* \le (|\lambda_0| - \delta)\|Au - Av\|_*$$

для $u, v \in K = \{u \in X : \|u - u_0\| \le r\}$.

Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \subset \Lambda$ і кожному $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ відповідає в K лише один власний вектор u_λ рівняння (1); цьому u_λ неперервно залежить від λ.

Доведення базується на наступному аналозі принципу стислих відображень.

Теорема 5. *Нехай оператор A задовольняє умови п.*1, T *– неперервний оператор із X в X^* і в деякій кулі $K = \{u \in X : \|u - u_0\| \le R\}$ з границею S виконані нерівності з $q < 1$:*

а) $\|Tu - Tv\|_* \le q\|Au - Av\|_*, \quad u, v \in K$;

б) $\inf\limits_{u \in K} \|Tu\|_* \le (1 - q) \inf\limits_{u \in S} \|Au\|_*$.

Тоді рівняння $Au - Tu = 0$ має в K єдиний розв'язок.

Перевіряється, що при відповідному виборі u_1 можна побудувати послідовність $\{u_n\}$ таку, що $Au_n = Tu_{n-1}$ (всі поля $Au - Tu_n$ гомотопні на S Au). Як звичайно перевіряємо збіжність $\{Au_n\}$. Звідси в силу сильної монотонності оператора A одержується збіжність $\{u_n\}$ до шуканого розв'язку.

1. *Р.И. Качуровский,* УМН, **23,** в. 2, 121 (1968). 2. *І.В. Скрипник, ДАН* УРСР, сер. А, 32 (1970). 3. *F.E. Browder,* Bull. Amer.Math. Soc., **71,** 176 (1965). 4. *М.А. Красносельский,* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956, стор. 184. 5. *В.В. Немыцкий,* Матем. сб., **33,** 545 (1953). 6. *М.П. Семенов,* Тр. семинара по функц. анализу, Воронеж. ун-т, в.1, 77 (1955).

ДО ЗАДАЧІ ПРО ТОЧКИ БІФУРКАЦІЇ

(*Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1971, № 2*)

1. Розглядається задача про точки біфуркації рівняння

$$Au = \mu Tu, \tag{1}$$

де A – сильно монотонний, неперервний, а T – цілком неперервний нелінійні оператори в сепарабельному дійсному гільбертовому просторі H. Припускається, що $A0 = T0 = 0$. Число μ_0 називаємо точкою біфуркації рівняння (1), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують u, μ такі, що $Au = \mu Tu$ і $|\mu - \mu_0| < \varepsilon,\ 0 < \|u\| < \varepsilon$. Тут $\|\cdot\|$ означає норму в H.

Ряд результатів про спектр рівняння (1) одержано в [1, 2]. До поставленої задачі безпосередньо зводиться задача про точки біфуркації для нелінійних еліптичних рівнянь.

Використовуючи обертання поля $Au - Tu$ [3], узагальнюються на випадок рівняння (1) відомі результати М.О.Красносельського [4] про існування точок біфуркації цілком неперервних операторів. Дається повний розв'язок задачі у випадку потенціальних операторів A, T.

2. Нехай оператор T має в нулі похідну Фреше, яку позначимо через T_0'. Припускаємо, що оператор A має в кожній точці u деякого околу нуля похідну Гато A_u' і що із збіжності послідовності $\{u_n\}$ до нуля випливає сильна збіжність $\{A_{u_n}'^{*}h\}$ до $A_{u_0}'^{*}h$ для довільного елемента $h \in H$. Тут $A_u'^{*}$ спряжений до A_u' оператор. Припускається ще, що з деякою додатною сталою ν в околі нуля має місце нерівність

$$\langle Au, u\rangle \ge \nu\|u\|^2,$$

де через $\langle\ ,\ \rangle$ позначено скалярний добуток в H.

Зауваження. Оператор A не припускається диференційовним за Фреше тому, що цей випадок мало цікавий з точки зору нелінійних еліптичних операторів.

Міркуванням від супротивного встановлюється твердження: для того, щоб число μ_0 було точкою біфуркації рівняння (1) необхідно, щоб воно було характеристичним числом оператора $L = (A_0')^{-1} T_0'$.

Нехай μ_0 – характеристичне число оператора L. Якщо нуль неізольована нерухома точка поля $Au - \mu_0 Tu$, то μ_0 – точка біфуркації рівняння (1). В протилежному випадку є визначеним індекс нуля поля $Au - \mu_0 Tu$, який позначимо через $\gamma(\mu_0)$. Для досить малого додатного ε нуль є ізольованою нерухомою точкою полів $Au - (\mu_0 - \varepsilon)Tu,\ Au - (\mu_0 + \varepsilon)Tu$. Так що визначені індекси нуля цих полів, які позначаємо відповідно через $\gamma(\mu_0 - \varepsilon),\ \gamma(\mu_0 + \varepsilon)$. Нехай

$$\gamma(\mu_0 \pm 0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \gamma(\mu_0 \pm \varepsilon).$$

Теорема 1. *Якщо серед чисел*

$$\gamma(\mu_0 - 0), \quad \gamma(\mu_0), \quad \gamma(\mu_0 + 0)$$

хоч би два різних, то μ_0 *є точкою біфуркації рівняння* (1).

Обчислення індекса нерухомої точки можна одержати на основі наступного узагальнення теореми Лєре–Шаудера.

Теорема 2. *Нехай* μ *не є характеристичним числом оператора* L. *Тоді нуль-ізольована нерухома точка поля* $Au - \mu Tu$ *і її індекс дорівнює* $(-1)^{\beta}$, *де* β *сума кратностей характеристичних чисел оператора* L, *які лежать на проміжку* $(0, \mu)$.

З теорем 1, 2 безпосередньо одержуємо

Наслідок. Будь-яке характеристичне число непарної кратності оператора L є точкою біфуркації рівняння (1).

3. Тут розглядається випадок потенціальних операторів A, T. Нехай в деякому околі нуля простору H визначені нелінійні функціонали F, G такі, що функціонал G слабко неперервний і рівномірно диференційовний, функціонал F диференційовний. Позначимо через A, T відповідно градієнти функціоналів F, G і припускаємо, що оператори A, T задовольняють умови п.1, 2.

Використовуючи ідеї [4] і деформації аналогічні використаним у [5, 6], доводиться

Теорема 3. *Для того, щоб число* μ_0 *було точкою біфуркації рівняння* (1) *у випадку потенціальних операторів* A, T, *необхідно і досить, щоб воно було характеристичним числом оператора* L.

4. Вкажемо на можливість застосування одержаних результатів до нелінійних еліптичних операторів.

Нехай Ω – гладка обмежена область в n-вимірному евклідовому просторі R^n і оператори A, T визначаються в просторі $H = \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ рівностями

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \le m} a_{\alpha}\left(x, u, \ldots, D^m u\right) D^{\alpha} v \, dx,$$

$$\langle Tu, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\beta| \le m-1} b_{\beta}\left(x, u, \ldots, D^{m-1} u\right) D^{\beta} v \, dx$$

$u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$. Тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$, $D^j u = \{D^{\alpha} u : |\alpha| = j\}$ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_i – цілі, $D^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Оператори A, T будуть задовольняти всі вимоги п.1, 2, якщо припустити, що $A0=T0=0$ і при всіх $x\in\Omega$, $\xi=(\xi_0,...,\xi_m)$, $\xi'=(\xi_0,...,\xi_{m-1})$, $\xi_j=\{\xi_n:|\alpha|=j\}$ виконуються умови:

1) $a_\alpha(x,\xi)$, $b_\beta(x,\xi')$ неперервні по x і два рази неперервно диференційовані по ξ;

2) існує додатна стала C така, що

$$\left|\frac{\partial a_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\right|\le C \quad \text{при} \quad |\alpha|=|\beta|=m,$$

$$\left|\frac{\partial a_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\right|\le C\left\{1+\sum_{|\gamma|\le m}|\xi_\gamma|^{\frac{p_\gamma}{p_{\alpha,\beta}}}\right\} \quad \text{при} \quad |\alpha|+|\beta|<2m,$$

$$\left|\frac{\partial b_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\right|\le C\left\{1+\sum_{|\gamma|\le m-1}|\xi_\gamma|^{\frac{p_\gamma}{q_{\alpha,\beta}}}\right\} \quad \text{при} \ |\alpha|,\ |\beta|\le m-1,$$

де

$$p_\alpha=\frac{2n}{n-2(m-|\alpha|)},\quad \frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_{\alpha,\beta}}=1,\quad q_{\alpha,\beta}>p_{\alpha,\beta}$$

3)

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}\frac{\partial a_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}\cdot\eta_\alpha\eta_\beta\ge\nu\sum_\gamma\eta_\gamma^2,$$

де ν деяка додатна стала і підсумовування справа ведеться по індексах γ вигляду $(0,...,0,m,0,...,0)$.

В поставлених умовах на вказані оператори переносяться результати п.2–4. Застосовуючи, наприклад, наслідок п.2, одержуємо поширення на диференціальні оператори високого порядку одного результату А.Лангенбаха [7]. Застосовуючи теорему 3, одержуємо повний розв’язок задачі про точки біфуркації у випадку варіаційних задач.

Зауваження. Додаткові міркування дозволяють замінити умову 3 умовою еліптичності.

1. *F.E. Browder,* Bull. Amer. Math. Soc., **71,** 176 (1963). 2. *І.В. Скрипник,* ДАН УРСР, сер. А, 998 (1970). 3. *І.В. Скрипник,* ДАН УРСР, сер. А, 32 (1970). 4. *М.А. Красносельский*, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956. стор. 194. 5. *S. Smale,* Ann. of Math., **80,** 382 (1964). 6. *F.E. Browder,* Ann. of Math., 82, 457 (1965). 7. *A. Langenbach,* Math. Nachr., **34,** 3 (1967).

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

(*Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1971, № 11*)

При певних припущеннях вивчається розв'язність задачі

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$B(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)\gamma_i(x) + \varphi(x, u)|_S = 0, \tag{2}$$

де $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з границею S, $x = (x_1, ..., x_n)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $(\gamma_1(x), ..., \gamma_n(x))$ – орт зовнішньої нормалі до S в точці x.

Задача (1) – (2) вивчалась О.А.Ладиженською і Н.Н.Уральцевою [1 – 2]. Про більш ранні роботи відомо з [3]. Як відзначається в [2], у випадку нелінійної залежності a_i від $\frac{\partial u}{\partial x}$ до задачі (1) – (2) не можна застосувати метод Лєре–Шаудера. Для доведення розв'язності задача включається в однопараметричну сім'ю задач того ж вигляду і при цьому, крім природних умов, припускається, що на кожному розв'язку параметричної задачі відповідна задача в варіаціях необмежено розв'язувана.

У даній роботі розв'язність вивчається без цієї додаткової умови. Методи, які використовуються в п.2, допускають застосування у випадку рівнянь і систем вищого порядку. Для рівнянь вищого порядку при додатковій умові "коерцитивності" задача розглядалась Браудером в [4].

1. Розв'язність поставленої задачі будемо одержувати з розв'язності деякого операторного рівняння. В [5] поняття обертання поля застосовується до вивчення розв'язності рівняння

$$Au + Tu = 0,$$

де A, T – нелінійні оператори з сепарабельного рефлексивного банахового простору X у спряжений до нього простір X^* такі, що A неперервний і монотонний, T цілком неперервний, і для довільної обмеженої послідовності $\{x_i\} \in X$ з

$$\left\langle Ax_i - Ax_j,\, x_i - x_j \right\rangle \to 0, \quad i, j \to \infty$$

випливає сильна збіжність послідовності $\{x_i\}$.

З метою більш широких застосувань до диференціальних рівнянь відзначимо, що всі результати роботи [5] залишаються вірними, якщо замінити умову монотонності оператора A наступною умовою напівобмеженості варіації: для довільних $u, v \in X$ таких, що $\|u\| \le R$, $\|v\| \le R$ має місце нерівність

$$\left\langle Au - Av,\ u - v\right\rangle \geq -c\left(R, \|u - v\|'\right),$$

де $\|u\|$ – норма u в $X, \langle h,u\rangle$ – значення функціоналу $h \in X^*$ на елементі $u \in X$, $\|\cdot\|'$ – норма, компактна в порівнянні з $\|\cdot\|$, функція $c(R,t) \geq 0$ така, що $\frac{1}{t}c(R,t) \to 0$ при $t \to +0$ для довільного R.

2. Припускаємо, що задача (1) – (2) включена в однопараметричну сім'ю задач того ж вигляду

$$L_\tau(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau\right) + a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau\right) = 0, \tag{3}$$

$$B_\tau(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau\right) \cdot \gamma_i(x) + \varphi(x, u, \tau)|_S = 0, \tag{4}$$

де $\tau \in [0,1]$ і функції $a_i(x,u,p,\tau)$, $a(x,u,p,\tau)$, $\varphi(x,u,\tau)$, $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ при $\tau = 1$ збігаються відповідно з $a_i(x,u,p)$, $a(x,u,p)$, $\varphi(x,u)$.

Надалі через m позначаємо число, яке задовольняє нерівності $1 < m \leq n$. При $m > n$ в умовах треба зробити невеликі зміни.

Припускаємо, що при $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$, $\tau \in [0,1]$ виконуються умови:

1) функції $a_i(x,u,p,\tau)$ неперервно диференційовані по u, p; функції $a_i(x,u,p,\tau)$, $a(x,u,p,\tau)$, $\varphi(x,u,\tau)$ – неперервні функції своїх аргументів:

2) для $\xi \in R^n$ $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i(x,u,p,\tau)}{\partial p_j} \cdot \xi_i \xi_j \geq \nu(1 + |p|)^{m-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$;

3) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right| \cdot w^{1+\varepsilon} + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right| \cdot w + |a| \leq \mu \cdot w^{m-1+\varepsilon}$, $\varepsilon < \dfrac{m}{n}$; $w = 1 + |u|^{\frac{n}{n-m}} + |p|$, $|\varphi| \leq \mu\left(1 + |u|^{\frac{n}{n-m}}\right)^{m_1}$,

$m_1 < m - 1$, де ν, μ – додатні сталі.

У цих припущеннях будемо розв'язувати задачу в W_m^1. Функцію $u(x,\tau) \in W_m^1(\Omega)$ називаємо розв'язком задачі (3) – (4), якщо при всіх $v \in W_m^1(\Omega)$ виконується рівність

$$\int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} - a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau\right)v\right\}dx + \int_S \varphi(x,u,\tau)v\, ds = 0.$$

Неважко перевірити, що оператори $A_\tau, T_\tau : W_m^1 \to \left(W_m^1\right)^*$, які визначаються формулами

$$\left\langle A_\tau u, v\right\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

$$\left\langle T_\tau u, v\right\rangle = -\int_\Omega a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau\right) v\, dx + \int_S \varphi(x,u,\tau) v\, ds,$$

задовольняють припущення п.1, якщо виконані умови 1) – 3) і гладкість області Ω допускає застосування теорем вкладення С.Л.Соболєва.

З результатів роботи [5] одержується

Теорема 1. *Нехай виконані умови* 1) – 3). *Припустимо, що існує стала* $M>0$ *така, що для всіх можливих розв'язків* $u(x,\tau)$ *задачі* (3) – (4) *при* $\tau\in[0,1]$ *виконується оцінка* $\|u(x,\tau)\|_{W_m^1}<M$ *і нехай обертання поля* A_0u+T_0u *на сфері* $\|u\|_{W_1^m}=M$ *відмінне від нуля. Тоді задача* (3) – (4) *має хоч би один розв'язок при кожному* $\tau\in[0,1]$.

Можна вказати прості припущення, при яких теорема 1 забезпечує існування розв'язку задачі (1) – (2). Наприклад, це буде, якщо

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u,p)\,p_i-a(x,u,p)u\ge\nu|p|^m-f(x)\cdot|u|^{\alpha}-g(x),$$

$$u\cdot\varphi(x,u)\ge\nu\cdot|u|^m-h(x),$$

де $\alpha<m,\quad f(x)\in L_r(\Omega),\quad r=\dfrac{nm}{m\cdot n-\alpha(n-m)},\quad g(x)\in L_1(\Omega),\quad h(x)\in L_1(S)$.

Оператори L_τ, B_τ можна взяти у вигляді

$$L_\tau(u)\equiv\tau L(u)+(1-\tau)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\left[\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]-u\right\},\tag{5}$$

$$B_\tau(u)\equiv\tau B(u)+(1-\tau)\sum_{i=1}^{n}\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\gamma_i(x).\tag{6}$$

Відмінність від нуля обертання поля A_0u+T_0u на сфері $\|u\|_{W_m^1}=M$ випливає з теореми 4 роботи [5].

3. Тут вказуються умови існування класичного розв'язку задачі (1) – (2).

Припустимо, що виконуються умови:

а) існують похідні другого порядку функцій $a_i(x,u,p)$, $\varphi(x,u)$ і похідні першого порядку функції $a(x,u,p)$ по всіх аргументах і ці похідні задовольняють умову Гельдера по x і умову Ліпшиця по u,p у кожній компактній області зміни аргументів x,u,p;

б) виконуються нерівності при $1\le i,\quad j\le n$

$$\left(\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|+\left|\frac{\partial a}{\partial p_i}\right|\right)(1+|p|)+\left|\frac{\partial a}{\partial u}\right|+\left|\frac{\partial a}{\partial x_i}\right|\le\mu(|u|)(1+|p|)^m,$$

де $\mu(t)$ – додатна неспадна неперервна функція;

в) існує R таке, що при $|u|>R$ виконуються нерівності

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 a_i(x,u,0)}{\partial x_i\partial u}+\frac{\partial a(x,u,0)}{\partial u}\right)\ge c>0,\quad x\in\Omega,$$

$$u\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u,0)\,\gamma_i(x)+\varphi(x,u)\right]>0,\quad x\in S.$$

Теорема 2. *Нехай* S *– поверхня класу* $C_{2,\alpha}$ *і нехай виконуються умови* 1) – 3), а) – в). *Тоді задача* (1) – (2) *має розв'язок, який належить* $C_{2,\beta}(\Omega)$ *з деяким* $\beta > 0$.

При доведенні користуємося міркуваннями п.2 і вибираємо параметричну сім'ю задач у вигляді (5) – (6).

1. *Н.Н. Уральцева,* ДАН СССР, **147,** 313 (1962). 2. *О.А. Ладыженская, Н.Н.Уральцева,* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., вид-во "Наука", 1964, стор. 505. 3. *К. Миранда,* Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957, стор.196. 4. *F.E. Browder,* Trans. Amer. Math. Soc., **117,** 530 (1965). 5. *I.В. Скрипник,* ДАН УРСР, сер. А, 32 (1970).

ЗАСТОСУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ МЕТОДІВ
ДО РІВНЯНЬ З МОНОТОННИМИ ОПЕРАТОРАМИ

*(Украинский математический журнал. – 1972. – **24**, №1)*

Топологічний степінь відображення $I+T$, де I – оператор тотожного перетворення, а T – цілком неперервний оператор в банаховому просторі, запроваджено Лере-Шаудером [1]. Він став важливим методом дослідження різних задач нелінійного аналізу – одержання теорем існування, доведення існування власних векторів, дослідження спектра і т. д.

Проте, в багатьох задачах з'являються відображення, відмінні від розглянутих Лере-Шаудером. Важливим прикладом такого відображення, яке відіграє велику роль в першу чергу при вивченні нелінійних диференціальних задач, є відображення $A+T$, де A – монотонний, а T – цілком неперервний оператори із банахового простору в його спряжене. Вказаний клас відображень вивчали багато авторів [2–6].

В даній роботі запроваджується для відображення $A+T$ поняття обертання і вказуються деякі застосування. Поняття обертання у випадку відображення $I+T$ запровадив М.А.Красносельський [7], воно аналогічне поняттю степеня відображення Лере-Шаудера. Частина результатів автора анонсувалась в [8].

§ 1. Обертання поля $Ax+Tx$

Нехай X – дійсний сепарабельний рефлексивний банаховий простір, X^* – його спряжений. Позначатимемо норму елемента $u \in X$ через $\|u\|$, норму функціоналу $h \in X^*$ через $\|h\|_*$ і через $\langle h, u \rangle$ значення функціоналу h на елементі u.

Оператор A (взагалі кажучи, нелінійний), що діє з X в X^*, називається монотонним, якщо для довільних $x, y \in X$:

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 .$$

Умову монотонності тут можна замінити умовою напівобмеженості варіації: для довільних $x, y \in X$:

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq -c(\| x - y \|'), \tag{1}$$

де $\|\cdot\|'$ – норма компактна порівняно з $\|\cdot\|$, функція $c(t)$ невід'ємна і $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{c(t)}{t} = 0$.

Надалі припустимо, що оператор A має напівобмежену варіацію, обмежений, хемінеперервний [6] і задовольняє умову: для довільної послідовності $\{x_i\} \in X$ із слабої збіжності x_i до x_0 і $\langle Ax_i - Ax_0, x_i - x_0 \rangle \to 0$ при $i \to \infty$ випливає сильна збіжність x_i.

Останню умову, наприклад, задовольняють сильно монотонні оператори [6].

Нехай D – обмежена область в X з границею S. Вважатимемо, що границя перетину S довільним скінченновимірним підпростором простору X є поліедром, хоч від цього припущення легко позбавитися [7], і наступні результати справедливі без обмеження. Нехай на S задано, взагалі кажучи, нелінійний оператор T, що діє з S в X^*, і припускаємо, що рівняння $Ax + Tx = 0$ не має розв'язку на S.

Нехай система $u_i \in X$ $(i = 1,2,...)$ утворює повну систему простору X. Можемо вважати u_i лінійно незалежними. Через F_n позначимо лінійну оболочку елементів $u_1,...,u_n$. Визначимо на $S_n = S \cap F_n$ векторне поле

$$\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ax + Tx, u_i \rangle u_i \ . \tag{2}$$

Лема 1. *Існує N_1 таке, що при $n \geq N_1$ поле $\Phi_n(x)$ не дорівнює нулю на S_n.*

Доводимо від супротивного: нехай існує послідовність $x_k \in S_{n_k}$ така, що $\Phi_{n_k}(x_k) = 0$, $n_k \to \infty$. Можемо вважати, що послідовність x_k слабо збіжна до деякого елемента x_0 і що T збігається сильно до h_0. Для довільного $y \in F_j$ при $j < n_k$ маємо

$$\langle Ax_k - Ay, x_k - y \rangle = -\langle Tx_k + Ay, x_k - y \rangle.$$

Переходячи до границі, одержуємо в силу (1)

$$c(\| x_0 - y \|') \geq \langle h_0 + Ay, x_0 - y \rangle. \tag{3}$$

З довільності j і демінеперервності [6] оператора A робимо висновок, що нерівність (3) справедлива для довільних $y \in X$. Візьмемо $y = x_0 + tz, t > 0$, z – довільний елемент *X.* Маємо

$$\langle Ax_k - Ay, x_k - y \rangle = -\langle Tx_k + Ay, x_k - y \rangle.$$

Переходячи до границі, одержимо при $t \to +0$ $\langle h_0 + Ax_0, z \rangle \leq 0$, звідки в силу довільності z випливає $h_0 + Ax_0 = 0$. Покажемо тепер, що збіжність послідовності $x_к$ сильна.

Нехай $y_к$ – сильно збіжна до x_0 послідовність, $y_k \in F_{n_k}$. Тоді

$$\langle Ax_k - Ax_0, x_k - x_0 \rangle = \langle Ax_k - Ax_0, y_k - x_0 \rangle - \langle Tx_k + Ax_0, x_k - y_k \rangle$$

і права частина прямує до нуля при $k \to \infty$. Звідси випливає сильна збіжність $x_к$, і, отже, $h_0 = Tx_0$, $x_0 \in S$, $Ax_0 + Tx_0 = 0$, що суперечить припущенням.

З леми випливає, що при $n \geq N_1$, визначено обертання поля $\Phi_n(x)$ на S_n.

Лема 2. *Існує N таке, що при $n \geq N$ обертання векторного поля $\Phi_n(x)$ на S_n не залежить від n.*

Розглянемо на S_n векторне поле

$$\widetilde{\Phi}_n(x) = \Phi_{n-1}(x) + \langle h_n, x \rangle u_n, \quad n > N_1 .$$

Тут h_n визначаються умовою

$$\langle h_n, u_k \rangle = \delta_{k,n}, \quad k \le n .$$

Із леми Лере-Шаудера [1] випливає, що обертання полів $\widetilde{\Phi}_n$ на S_n і Φ_{n-1} на S_{n-1} однакові. Твердження леми 2 буде доведено, якщо перевіримо, що при досить великих n поле

$$H_n(x,t) = t\Phi_n(x) + (1-t)\widetilde{\Phi}_n(x)$$

не дорівнює нулю при $x \in S_n$, $t \in [0,1]$.

Припустимо протилежне: існують послідовності $x_k \in S_{n_k}$, $t_k \in [0,1]$ такі, що $H_{n_k}(x_k, t_k) = 0$, $n_k \to \infty$. Маємо

$$\begin{gathered} \langle Ax_k + Tx_k, u_i \rangle = 0, \quad 1 \le i \le n_k - 1, \\ t_k \langle Ax_k + Tx_k, u_{n_k} \rangle + (1-t_k)\langle h_{n_k}, x_k \rangle = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

З леми 1 випливає, що $0 < t_k < 1$. Можемо вважати послідовність $x_к$ слабо збіжною до x_0, послідовність Tx_k сильно збіжною до h_0. Для $y \in F_j$ при $j < n_k$ маємо в силу (4)

$$\langle Ax_k - Ay, x_k - y \rangle = -\frac{1-t_k}{t_k}\langle h_{n_k}, x_k \rangle^2 - \langle Tx_k + Ay, x_k - y \rangle .$$

Оцінюючи і переходячи до границі, одержимо

$$c(\| x_0 - y \|') \ge \langle h_0 + Ay, x_0 - y \rangle .$$

Дальше доведення проводиться аналогічно доведенню леми 1.

Нехай тепер $v_i \in X$ – інша повна система в X. Через E_n позначимо лінійну оболонку елементів $v_1,...,v_n$ і визначимо на $\widetilde{S}_n = S \cap E_n$ поле

$$\Psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ax + Tx, v_i \rangle v_i .$$

Лема 3. *Існує N_2 таке, що при $n \ge N_2$ обертання полів Φ_n на S_n і Ψ_n на S_n однакові.*

Можемо вважати, що при довільному n $E_n \cap F_n = \varnothing$. В противному випадку будується ще одна допоміжна повна система.

Як і при доведенні леми 2, досить перевірити, що при великих n поля

$$H_n^{(1)}(x, t) = \Phi_n(x) + (1-t)\Psi_n(x) + t\sum_{i=1}^{n} \langle g_i^{(n)}, x \rangle v_i ,$$

$$H_n^{(2)}(x, t) = (1-t)\Phi_n(x) + \Psi_n(x) + t\sum_{i=1}^{n} \langle f_i^{(n)}, x \rangle u_i ,$$

не дорівнюють нулю при $x \in S \cap \{F_n \cup E_n\}$, $t \in [0,1]$; тут $g_i^{(n)}$, $f_i^{(n)} \in X^*$ визначаються умовами:

$$\langle g_i^{(n)}, u_k \rangle = \langle f_i^{(n)}, v_k \rangle = 0, \quad \langle g_i^{(n)}, v_k \rangle = \langle f_i^{(n)}, u_k \rangle = \delta_{i,k}, \ 1 \le i, \quad k \le n .$$

Доведемо це твердження для $H_n^{(1)}$, міркуючи від супротивного. Нехай існують послідовності $x_k \in S \cap \{F_{n_k} \cup E_{n_k}\}$, $t_k \in [0,1]$ такі, що $H_{n_k}^{(1)}(x_k, t_k) = 0$, $n_k \to \infty$. Одержуємо

$$\langle Ax_k + Tx_k, u_i\rangle = 0, \quad 1 \le i \le n_k,$$
$$(1-t_k)\langle Ax_k + Tx_k, v_i\rangle + t_k\langle g_i^{(n_k)}, x_k\rangle = 0, \quad 1 \le i \le n_k.$$

Звідси для $y \in F_j$ при $j \le n_k$ маємо

$$\langle Ax_k - Ay, x_k - y\rangle = -\langle Tx_k + Ay, x_k - y\rangle - \frac{t_k}{1-t_k}\sum_{i=1}^{n_k}\langle g_i^{(n_k)}, x_k\rangle^2 .$$

Зауважимо, що $t_k < 1$ при $n_k \ge N$. Як і раніше, звідси одержимо для довільного $y \in X : c(\| x_0 - y \|') \ge \langle h_0 + Ay, x_0 - y\rangle$, де x_0 – слаба границя x_k, h_0 – сильна границя Tx_k. Дальші міркування ті ж, що в лемі 1.

Все сказане робить природним таке означення.

Означення 1. Обертанням поля $Ax + Tx$ на S будемо називати обертання векторного поля $\Phi_N(x)$ на S_N.

Нижче наводяться приклади операторів, які задовольняють всі вимоги до оператора A.

1. Такі оператори існують у випадку рівномірно випуклих просторів X і X^*, тобто, якщо для довільних $x_n, y_n \in X$, $\| x_n \| \le 1$, $\| y_n \| \le 1$ із $\| x_n + y_n \| \to 2$ випливає, що $\| x_n - y_n \| \to 0$, і аналогічно для X^*.

Розглянемо оператор $*$, який зіставляє елементу $x \in X$ функціонал $*x \in X^*$ такий, що $\langle *x, x\rangle = \| x \|^2$, $\| *x \|_* = \| x \|$.

Однозначність і неперервність цього оператора випливає з [5].

Нерівність (1) виконується з $c = 0$:

$$\langle *x - *y, x - y\rangle = \| x \|^2 + \| y \|^2 - \langle *x, y\rangle - \langle *y, x\rangle \ge 0 .$$

Нехай тепер послідовність x_i слабо збіжна до x_0 і $\langle *x_i - *x_0, x_i - x_0\rangle \to 0$. Вважатимемо, що $*x_i$ слабо збігається до h_0, $\| x_i \|$ збігається до c_0. Тоді

$$\langle *x_i, x_i\rangle = \langle *x_i, x_i - x_0\rangle + \langle *x_i, x_0\rangle \to \langle h_0, x_0\rangle .$$

Звідси випливає $\| x_0 \| = \| h_0 \|_* = c_0$ і сильна збіжність x_i, якщо $x_0 = 0$. Якщо $x_0 \ne 0$, то

$$\left\langle \frac{*x_i}{\| x_i \|}, \frac{x_i}{c_0} + \frac{x_0}{c_0}\right\rangle \to 2$$

і сильна збіжність x_i випливає із рівномірної випуклості X.

2. Важливими для застосування є поля, зв'язані з нелінійними еліптичними рівняннями. Нехай G – обмежена область в евклідовому n-вимірному просторі R^n. Припускається, що гладкість G забезпечує застосування теорем вкладення С.Л.Соболєва. Нехай $X = \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G)$ і оператор A визначається рівністю

$$\langle Au, v\rangle = \int_G \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x, D^m u) D^\alpha v\, dx, \quad u, v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G) .$$

Тут $x=(x_1,...,x_n)$, $dx=dx_1...dx_n$, $D^j u=\{D^\alpha u:|\alpha|\le j\}$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $D^\alpha u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}...\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}u$, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$, α_i – цілі.

Оператор A задовольняє всі поставлені вимоги, якщо виконані такі умови з додатними сталими C_1, C_2:

а) функції $a_\alpha(x,\xi)$, $x\in\overline{G}$, $\xi=\{\xi_\alpha:|\alpha|\le m\}\in R^M$ неперервні по x при всіх ξ і неперервно диференційовні по ξ при всіх x;

в) для довільних $x\in\overline{G}$, $\xi\in R^M$

$$C_2\left(1+\sum_{|\gamma|\le m}|\xi_\gamma|^{p_\gamma}\right)^{1-\frac{2}{p}}\sum_{|\alpha|=m}\eta_\alpha^2\ge\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x,\xi)\eta_\alpha\eta_\beta\ge C_1\left(1+\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|\right)^{p-2}\sum_{|\alpha|=m}\eta_\alpha^2,$$

$$|a_{\alpha\beta}(x,\xi)|\le C_2\left(1+\sum_{|\gamma|\le m}|\xi_\gamma|^{p_\gamma}\right)^{q_{\alpha\beta}} \text{ при } |\alpha|+|\beta|<2m,$$

де $a_{\alpha\beta}(x,\xi)=\dfrac{\partial a_\alpha(x,\xi)}{\partial\xi_\beta}$, $p_\alpha=\dfrac{pn}{n-p(m-|\alpha|)}$, $q_{\alpha\beta}<1-\dfrac{1}{p_\alpha}-\dfrac{1}{p_\beta}$.

Легко перевірити, що оператор A не сильно монотонний.

§ 2. Властивості обертання

Означення 2. Поля A_1x+T_1x, A_2x+T_2x, які задовольняють умови § 1 і не дорівнюють нулю на S називатимемо гомотопними на S, якщо існує оператор $A+T:S\times[0,1]\to X^*$ такий, що $A(x,t)$ рівномірно неперервний по t при $x\in S$ і задовольняє при кожному t умови § 1, оператор T діє цілком неперервно із $S\times[0,1]$ в X^*, $A(x,t)+T(x,t)$ не дорівнює нулю на $S\times[0,1]$ і для $x\in S$:

$$A(x,0)+T(x,0)=A_1x+T_1x,\;\; A(x,1)+T(x,1)=A_2x+T_2x.$$

Аналогічно лемі 1 доводиться, що при досить великих n поле $\sum_{i=1}^{n}\langle A(x,t)+T(x,t),u_i\rangle u_i$ не дорівнює нулю на $S\times[0,1]$. Звідси випливає, що обертання гомотопних полів однакові.

При доведенні наступної теореми буде додатково припускатися, що в просторі X існує оператор A_0, який задовольняє умови § 1 і такий, що $\langle A_0x,x\rangle>0$ при $x\ne 0$. Як видно з прикладу 1, такі оператори існують у випадку рівномірно випуклих X, X^*.

Теорема 1. *Поля* A_1x+T_1x і A_2x+T_2x*, які задовольняють умови* § *1, не дорівнюють нулю на* S*, гомотопні на* S*, якщо їх обертання однакові.*

Побудуємо аналогічно § 1 розширену послідовність просторів F_n. Існують проектори $P_n:X\to X$ такі, що

$$P_iP_j = P_jP_i = P_i \text{ при } i < j,\ P_iX = F_i.$$

Через P_i^* позначимо спряжений до P_i оператор.

Доведемо існування N такого, що при $n \ge N$ поля

$$\chi_n^{(1)}(x,t) = t[(I - P_n^*)A_0(I - P_n)x + P_n^*(A_ix + T_ix)] + (1-t)[A_ix + T_ix],\ i = 1,2,$$

не перетворюються в нуль при $x \in S,\ t \in [0,1]$.

Припустимо протилежне: існують послідовності $x_k \in S,\ t_k \in [0,1]$ такі, що $\chi_{n_k}^{(1)}(x_k,t_k) = 0$, $n_k \to \infty$. Можемо вважати послідовність x_k слабо збіжною до x_0, t_k збіжною до t_0, T_1x_k збіжною сильно до h_0. Зауважимо, що $t_k < 1$. Для $x \in F_j$ при $j < n_k$ маємо

$$\left\langle A_1x_k - A_1y, x_k - y\right\rangle = -\frac{t_k}{1-t_k}\left\langle (I - P_{n_k}^*)A_0(I - P_{n_k})x_k, x_k - y\right\rangle -$$
$$-\left\langle T_1x_k + A_1y, x_k - y\right\rangle \le -\left\langle T_1x_k + A_1y, x_k - y\right\rangle.$$

Користуючись міркуваннями, застосованими при доведенні леми § 1, одержимо $A_1x_0 + T_1x_0 = 0$, $x_0 \in S$, що неможливо.

Таким чином, доведено, що вихідні поля $A_ix + T_ix$ гомотопні на S відповідно полям

$$\chi_N^{(i)}(x,1) = (I - P_N^*)A_0(I - P_N)x + P_N^*[A_ix + T_ix],\quad i = 1,2.$$

Із вищесказаного також ясно, що обертання полів

$$\Phi_N^{(i)}(x) = \sum_{i=1}^{N}\left\langle A_ix + T_ix, u_j\right\rangle u_j,\ i = 1,2.$$

на S_N збігаються, відповідно, з обертаннями полів $A_ix + T_ix$ і, отже, рівні між собою. За теоремою Хопфа, існує поле

$$H_N(x,t) = \sum_{i=1}^{N} c_i(x,t)u_i,$$

визначене, не дорівнює нулю на $S_N \times [0,1]$ і таке, що

$$c_i(x,0) = \left\langle A_1x + T_1x, u_i\right\rangle,\quad c_1(x,1) = \left\langle A_2x + T_2x, u_i\right\rangle. \tag{5}$$

Застосовуючи теорему Урисона, продовжимо $c_i(x,t)$ на $S \times [0,1]$ неперервно так, щоб (5) виконувалося при $x \in S$.

Нехай ще оператор P_N^* визначається рівністю

$$P_N^*(\omega) = \sum_{i=1}^{N}\left\langle \omega, u_i\right\rangle h_i,\ \omega \in X^*.$$

Тоді гомотопію полів $\chi_N^{(i)}(x,1)$, $i = 1,2$, можна зобразити у такому вигляді:

$$H(x,t) = (I - P_N^*)A_0(I - P_N)x + \sum_{i=1}^{N} c_i(x,t)h_i.$$

Легко перевіряється, що виконані всі умови означення 2.

Нехай цілком неперервний оператор T визначено на всій області D і діє в X^*.

Означення 3. Точку $x_0 \in D$ будемо називати критичною точкою поля $Ax + Tx$, якщо $Ax_0 + Tx_0 = 0$.

Нехай x_0 ізольована критична точка поля $Ax + Tx$, тобто існує r_0 таке, що в кулі $B_{r_0}(x_0)$ радіуса r_0 з центром в точці x_0 поле $Ax + Tx$ має тільки одну критичну точку.

Аналогічно доведенню леми 1 перевіряється, що обертання поля $Ax + Tx$ на сферах $S_\varepsilon(x_0)$ радіуса ε з центром в x_0 не залежить від ε при $0 < \varepsilon \le r_0$.

Означення 4. Індексом ізольованої критичної точки x_0 називаємо обертання поля $Ax + Tx$ на $S_{r_0}(x_0)$.

Теорема 2. *Припустимо, що поле $Ax + Tx$ не дорівнює нулю на S і має в D лише ізольовані критичні точки. Тоді критичних точок скінченне число і обертання поля $Ax + Tx$ на S дорівнює сумі індексів всіх критичних точок в D.*

Припустимо спочатку від супротивного, що критичних точок безмежна кількість x_i, $i = 1,2,\ldots$. Можемо вважати, що x_i слабо збігається до x_0, а Tx_i сильно збігається до h_0. Тоді

$$\left\langle Ax_i - Ax_0, x_i - x_0 \right\rangle = -\left\langle Tx_i + Ax_0, x_i - x_0 \right\rangle \to 0$$

і одержуємо сильну збіжність x_i до x_0. Звідси випливає, що x_0 – неізольована критична точка, що суперечить припущенню.

Позначимо критичні точки через $x_1,\ldots,x_k$ і виберемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб кулі $B_\varepsilon(x_1),\ldots,B_\varepsilon(x_k)$ попарно не перетинались. В області $D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(x_i)$ поле $Ax + Tx$ в нуль не перетворюється, і аналогічно доведенню леми 1 перевіряємо, що при досить великих n поле $\Phi_n(x)$ не перетворюється в нуль на $D_\varepsilon \cap F_n$. Твердження теореми тепер випливає із теореми про алгебраїчне число нерухомих точок скінченновимірного векторного поля [7].

Із теореми випливає ознака існування розв'язку рівняння $Ax + Tx = 0$, яка узагальнює ознаку Лере-Шаудера:

Для того, щоб рівняння $Ax + Tx = 0$ було розв'язне в D досить, щоб обертання поля $Ax + Tx$ на S було відмінне від нуля.

Зауваження. Легко перевірити, що обертання поля $Ax + Tx$ на S дорівнює одиниці, якщо на $S{:}\left\langle Ax + Tx, x \right\rangle \ge 0$. Звідси одержуємо розв'язність рівняння $Ax + Tx = h$ з довільним $h \in X^*$ в кулі $\| x \| \le R$ при досить великому R, якщо

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\left\langle Ax + Tx, x \right\rangle}{\| x \|} = +\infty .$$

Остання умова припускається в роботах багатьох авторів [2–6].

Одною з ознак відмінності від нуля обертання поля може служити така теорема.

Теорема 3. *Припустимо, що поле* $Ax+Tx$ *задовольняє умови § 1, не перетворюється в нуль на сфері* $S_r(0)=\{x:\|x\|=r\}$ *і для* $x\in S_r(0)$

$$\frac{Ax+Tx}{\|Ax+Tx\|_*}\neq\frac{A(-x)+T(-x)}{\|A(-x)+T(-x)\|_*}.$$

Тоді обертання на $S_r(0)$ *поля* $Ax+Tx$ *– непарне число.*

Розглянемо гомотопію $\frac{1}{1+t}[Ax+Tx]-\frac{t}{1+t}[A(-x)+T(-x)]$. Очевидно, виконані всі вимоги визначення 2 і, отже, обертання $Ax+Tx$ на $S_r(0)$ збігається з обертанням на $S_r(0)$ непарного поля

$$A_1x=\frac{1}{2}[Ax-A(-x)],\quad T_1x=\frac{1}{2}[Tx-T(-x)].$$

В цьому випадку поле

$$\Phi_n^{(1)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_1x+T_1x,u_i\right\rangle u_i,\ \ x\in S_n$$

також непарне і його обертання непарне за теоремою Л.А.Люстерника – Л.Г.Шнірельмана – К.Борсука. [7].

§ 3. Обчислення індексу критичної точки

Збережемо припущення § 1 відносно операторів A, T, і нехай нуль – критична точка поля $Ax+Tx$, причому можемо вважати $A0=T0=0$.

Припустимо, що існують похідні Фреше операторів A,T в нулі (які позначимо через A',T') і виконуються умови:

1) $\left\langle A'x,x\right\rangle>0$ при $x\neq 0$;

2) оператор $L=-(A')^{-1}T':X\to X$ визначений і цілком неперервний;

3) оператор T підпорядкований оператору A в такому сенсі: при досить малому ε слабе замикання множини

$$\sigma_\varepsilon=\left\{x=\frac{y}{\|y\|}:t(Ay+Ty)+(1-t)(A'y+T'y)=0,\quad \begin{matrix}0<\|y\|\le\varepsilon\\ 0\le t\le 1\end{matrix}\right\}$$

не містить нуля. Ця умова виконується для певних класів еліптичних операторів.

При цих умовах справедлива така теорема.

Теорема 4. *Якщо рівняння* $A'x+T'x=0$ *має лише нульовий розв'язок, то нуль є ізольованою критичною точкою поля* $Ax+Tx$ *і індекс нуля дорівнює* $(-1)^\nu$, *де* ν *– сума кратностей характеристичних чисел оператора* L, *які лежать на інтервалі* (0, 1).

Перевіримо спочатку, що нуль – ізольована критична точка. Припустимо протилежне:

існує послідовність $x_n \to 0$ така, що $Ax_n + Tx_n = 0$. З умови 3) випливає, що слаба границя z_0 послідовності $z_n = \| x_n \|^{-1} x_n$ відмінна від нуля. Переходячи до границі в рівності $\| x_n \|^{-1} [Ax_n + Tx_n] = 0$, маємо $A'z_n \to -T'z_0$. Нехай y – довільний елемент X і $t > 0$. Тоді

$$0 < \frac{1}{t}\left\langle A'(z_n - z_0 + ty), z_n - z_0 + ty \right\rangle \to \left\langle -A'z_0 - T'z_0 + tA'y, y \right\rangle .$$

Нехай t прямує до нуля, одержимо в силу довільності $y: A'z_0 + T'z_0 = 0$, що суперечить умовам теореми.

Позначимо через F пряму суму всіх інваріантних підпросторів оператора L, які відповідають характеристичним числам цього оператора, які лежать на інтервалі (0,1). Через R позначимо замикання прямої суми всіх тих інваріантних підпросторів оператора L, які не ввійшли в F. R також інваріантний підпростір L, і має місце розклад $X = F + R$.

Позначимо через P^* проектор X^* на $F^* = A'F$, який визначається рівністю

$$P^*[A'f + A'r] = A'f, \quad f \in F, \quad r \in R .$$

Нехай P – спряжений до P^* оператор. Виберемо довільно послідовність підпросторів $F_i \subset X$, $i \geq \nu$ так, щоб

$$F_\nu = PX,\ F \subset F_{2\nu},\ \dim F_i = i,\ F_i \subset F_{i+1},\ \bigcup_{i \geq \nu} F_i = X$$

і позначимо через $u_1,...,u_i$ базис в F_i.

Через $\delta(x)$ надалі позначається функція

$$\delta(x) = \max\left\{ 0, C \cdot \min_{0 \leq t \leq 1} \left\langle (I - P^*)(Ax + Tx), (I - tL)x \right\rangle \right\}, \tag{6}$$

де стала C додатна і визначена нижче.

Доведення формули індексу спирається на леми 4–7.

Лема 4. *Існує* $r > 0$ *таке, що*

$$\psi(x,t) = (\delta(x) + t)(Ax + Tx) + (1 - t)(A'x + T'x) = 0$$

при $t \in [0,1]$, $0 < \| x \| \leq r$.

Доведення леми проводиться аналогічно доведенню того, що нуль – ізольована критична точка поля $Ax + Tx$.

Лема 5. *Існує* N_1, *таке, що при* $n \geq N_1$ *поле*

$$\varphi_n^{(1)}(x,t) = \frac{1}{1 + \delta(x)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\delta(x) + t)(Ax + Tx) + (1 - t)(A'x + T'x), u_i \right\rangle u_i$$

не перетворюються в нуль при $x \in S_{n,r} = F_n \cap \{\| x \| = r\},\ t \in [0,1]$.

Припускаємо протилежне: нехай існують послідовності $x_k \in S_{n_k,r}$, $t_k \in [0,1]$ такі, що $\varphi_{n_k}^{(1)}(x_k, t_k) = 0$, $n_k \to \infty$ і нехай $\delta(x_k),\ t_k$ збігаються відповідно до $\delta_0,\ t_0$. x_k слабо збігається до x_0. Розглянемо окремо два випадки: а) $\delta_0 + t_0 > 0$, б) $\delta_0 + t_0 = 0$.

В першому випадку аналогічно доведенню леми 1 одержимо, що збіжність x_k до x_0 сильна і $\psi(x_0, t_0) = 0$. Це суперечить лемі 4.

В другому випадку покажемо спочатку що $x_0 \neq 0$. Із (6) випливає існування послідовності $\tau_n \in [0,1]$ такої, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n \leq 0, \ \alpha_n = \left\langle (I - P^*)(Ax_n + Tx_n), x_n - \tau_n L x_n \right\rangle .$$

Якщо $x_0 = 0$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ax_n, x_n \rangle \leq 0$. Звідси і з припущень § 1 відносно оператора A одержуємо сильну збіжність x_n до нуля, що неможливо.

Для довільного $y \in F_j$ при $j < n_k$ маємо

$$0 < \left\langle A' x_k - A' y, x_k - y \right\rangle \to - \left\langle T' x_0 + A' y, x_0 - y \right\rangle$$

і далі звичайними міркуваннями одержимо $A' x_0 + T' x_0 = 0$, що суперечить припущенням теореми, бо $x_0 \neq 0$.

Нехай Π оператор проектування X на F, який визначається рівністю

$$\Pi(f + r) = f, \ f \in F, \ r \in R .$$

Лема 6. *Існує N_2 таке, що при $n \geq N_2$ поле*

$$\varphi_n^{(2)}(x,t) = \frac{1}{1 + \delta(x)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\langle \delta(x)(Ax + Tx) + t(A'x + T'x) + (1-t)[-A'\Pi x + A'(I - \Pi)x], u_i \right\rangle u_i$$

не перетворюється в нуль при $x \in S_{n,r}$, $t \in [0,1]$.

Припускаємо протилежне: існують послідовності $t_k \in [0,1]$, $x_k \in S_{n_k, r}$, такі, що $\varphi_{n_k}^{(2)}(x_k, t_k) = 0$, $n_k \to \infty$ і нехай t_k, $\delta(x_k)$ збігаються відповідно до δ_0, t_0 і x_k слабо збігається до x_0. Позначимо $f_0 = \Pi x_0$, $r_0 = (I - \Pi) x_0$.

Якщо $\delta_0 = 0$, то, як і вище, одержимо $x_0 \neq 0$ і

$$t_0(A' x_0 + T' x_0) + (1 - t_0)[-A' f_0 + A' r_0] = 0 . \tag{7}$$

Застосувавши до (7) оператор P^*, одержимо

$$t_0(A' f_0 + T' f_0) - (1 - t_0) A' f_0 = 0 .$$

Це дає $f_0 = 0$ в силу визначення простору F. Діючи на (7) оператором $I - P^*$, одержимо

$$t_0(A' r_0 + T' r_0) - (1 - t_0) A' r_0 = 0 ,$$

звідки випливає $r_0 = 0$. Це суперечить нерівності $x_0 \neq 0$.

Нехай тепер $\delta_0 > 0$. Звичайно встановлюється сильна збіжність x_k до x_0 і рівність

$$\delta(x_0)(Ax_0 + Tx_0) + t_0(A' x_0 + T' x_0) + (1 - t_0)[-A' f_0 + A' r_0] = 0 . \tag{8}$$

Покажемо, що вона неможлива. Застосовуючи до (8) оператор P^*, маємо:

$$\delta(x_0) P^*(Ax_0 + Tx_0) + t_0(A' f_0 + T' f_0) - (1 - t_0) A' f_0 = 0 . \tag{9}$$

Легко перевірити, що з деякою додатною сталою C_1 для $f \in F$ виконується нерівність

$$\| f \| \le C_1 \min_{0 \le t \le 1} \| t(A' f + T' f) - (1-t) A' f \|_* . \tag{10}$$

З (9) одержуємо

$$\| f_0 \| \le C_1 C_2 \| P^* \| \cdot \delta(x_0) , \tag{11}$$

де

$$C_2 = \sup_{\|x\| \le 1} \| Ax + Tx \|_* . \tag{12}$$

Застосовуючи до (8) оператор $I - P^*$, маємо

$$\delta(x_0)(I - P^*)(Ax_0 + Tx_0) + t_0 (A' r_0 + T' r_0) + (1 - t_0) A' r_0 = 0 .$$

Звідси випливає

$$\left\langle (I - P^*)(Ax_0 + Tx_0), (I - t_0 L) r_0 \right\rangle \le 0 .$$

Використовуючи (11), одержимо

$$\left\langle (I - P^*)(Ax_0 + Tx_0), (I - t_0 L) x_0 \right\rangle \le C_1 C_2^2 C_3 \cdot \| P^* \| \cdot \| I - P^* \| \cdot \delta(x_0) , \tag{13}$$

де

$$\tilde{N}_3 = \max_{0 \le t \le 1} \| I - tL \| . \tag{14}$$

Суперечність одержується із (13), якщо сталу C в формулі (6) визначити рівністю

$$C = (2 C_1 C_2^2 C_3 \| P^* \| \cdot \| I - P^* \|)^{-1} .$$

Тут C_1, C_2, C_3 визначаються із (10), (12), (14). Цим закінчується доведення леми 6.

Лема 7. $N = \max\{N_2, 2\nu\}$. *Поле* $\varphi_N^{(2)}(x,0)$ *не перетворюється в нуль при* $x \in F_N \cap \{0 < \| x \| \le r\}$.

Доведення аналогічне доведенню неможливості рівності (8).

Закінчимо тепер доведення теореми 4. Із визначення 4 і лем 4–7 випливає, що індекс нуля поля $Ax + Tx$ дорівнює обертанню поля $\varphi_N^{(2)}(x, 0)$ на сферах $S_{N,\varepsilon} = F_N \cap \{\| x \| = \varepsilon\}$ при $0 < \varepsilon \le r$. Легко перевірити, що при досить малому ε поле $\varphi_N^{(2)}(x,0)$ на $S_{N,\varepsilon}$ гомотопне до поля

$$\varphi_N^{(3)}(x) = \sum_{i=1}^{N} \left\langle - A' \Pi x + A'(I - \Pi) x, u_i \right\rangle u_i .$$

Обертання на $S_{N,\varepsilon}$ поля $\varphi_N^{(3)}$ дорівнює $(-1)^{\nu}$, в чому можна переконатися, підраховуючи знак відповідного детермінанта. Це закінчує доведення теореми.

Зауважимо на закінчення, що аналогічно М.А.Красносельському [7] поняття обертання поля можна застосувати до вивчення спектра і точок біфуркації рівняння $Ax = \lambda Tx$.

1. *Лере Ж., Шаудер Ю.,* Топология и функциональные уравнения, т.1, № 3–4, 1946.
2. *Вишик М.И.* Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Труды Моск. Матем. об-ва, вып. 12, 1963.

3. *Browder F.E.* Nonlinear elliptic boundary value problems, Bull. Amer. Math. Soc., **69**, № 6, 1963, 862–674.
4. *Browder F.E.* Nonlinear elliptic boundary value problems, 2, Trans. Amer. Math. Soc., **117**, № 2, 1965, 530–550.
5. *Дубинский Ю.А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка, УМН, т. 23, № 1, 1968.
6. *Качуровский Р.Н.* Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах, УМН, т. 23, № 2, 1968.
7. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, М, 1956.
8. *Скрипник І.В.* Про розв'язність нелінійних рівнянь з монотонними операторами, ДАН УРСР, серія А, № 1, 1970.

ОБЧИСЛЕННЯ ІНДЕКСУ КРИТИЧНОЇ ТОЧКИ

(*Доповіді АН УРСР.Сер. А. – 1972, № 6*)

1. Нехай X – дійсний сепарабельний рефлексивний банаховий простір, X^* – до нього спряжений простір. В [1 – 2] визначається обертання поля $Au+Tu$, де A,T – нелінійні оператори з X в X^* такі, що T – цілком неперервний, A – неперервний, має напівобмежену варіацію, і для довільної послідовності $u_i \in X$ із слабкої збіжності u_i до u_0 і рівності

$$\lim_{i\to\infty}\langle Au_i - Au_0,\ u_i - u_0\rangle = 0$$

випливає сильна збіжність u_i. Через $\langle h,u\rangle$ для $h \in X^*$, $u \in X$ позначимо дію функціоналу h на елемент u.

У даній роботі для поля $Au+Tu$ вказується формула індексу критичної точки, яка узагальнює формулу Лере–Шаудера індексу нерухомої точки цілком неперервного векторного поля [3]. Даються застосування до нелінійних еліптичних задач.

2. Точку $u_0 \in X$ називаємо критичною точкою поля $Au+Tu$, якщо $Au_0 + Tu_0 = 0$. Індексом ізольованої критичної точки u_0 поля $Au+Tu$ називаємо границю обертань цього поля на сферах радіуса ε з центром в u_0, коли ε прямує до нуля.

Нехай u_0 – критична точка поля $Au+Tu$. Можемо вважати, що $u_0 = 0$ і що $A0 = T0 = 0$.

Припустимо, що існують похідні Фреше операторів A, T в нулі, які позначимо відповідно A', T', і припустимо, що виконуються такі умови:

1) $\langle A'u,u\rangle > 0$ при $u \neq 0$;

2) оператор $L = -(A')^{-1}\ T' : X \to X$ є визначений і цілком неперервний;

3) оператор T підпорядкований оператору A в такому сенсі: при досить малому ε слабке замикання множини

$$\sigma_\varepsilon = \left\{ v = \frac{u}{\|u\|} : t\big(Au+Tu\big) + (1-t)\,(A'u + T'u) = 0,\quad 0 < \|u\| \le \varepsilon,\quad 0 \le t \le 1 \right\}$$

не містить нуля. Тут $\|\cdot\|$ – норма в X.

Число μ_0 називаємо характеристичним числом рівняння

$$A'u + \mu T'u = 0\,, \tag{1}$$

якщо при $\mu = \mu_0$ рівняння (1) має ненульовий розв’язок. Кратністю цього числа називаємо кратність характеристичного числа μ_0 оператора L.

При виконанні умов 1) – 3) має місце

Теорема 1. *Нехай одиниця – нехарактеристичне число рівняння* (1). *Тоді нуль – ізольована критична точка поля* $Au+Tu$ *і її індекс дорівнює* $(-1)^{\nu}$, *де* ν *-- сума кратностей характеристичних чисел рівняння* (1), *які лежать на проміжку* (0,1).

3. Аналогічно [4 – 5] формулу індексу можна застосувати до задачі про точки біфуркації рівняння

$$Au+\mu Tu=0\,. \tag{2}$$

Число μ_0 називаємо точкою біфуркації рівняння (2), якщо для довільного $\varepsilon>0$ можна вказати $u_\varepsilon,\mu_\varepsilon$ такі, що

$$Au_\varepsilon+\mu_\varepsilon Tu_\varepsilon=0,\qquad 0<\|u_\varepsilon\|<\varepsilon,\qquad |\mu_\varepsilon-\mu_0|<\varepsilon.$$

Теорема 2. *Для того, щоб число* μ_0 *було точкою біфуркації рівняння* (2), *необхідно, щоб воно було характеристичним числом рівняння* (1). *Всяке характеристичне число непарної кратності рівняння* (1) *є точкою біфуркації рівняння* (2).

4. Тут вкажемо на можливі застосування теорем 1, 2. Нехай Ω – гладка обмежена область в n-вимірному евклідовому просторі R^n, і оператори A,T визначаються на просторі $X=\overset{\circ}{W}{}^{1}_{m}(\Omega),\ \ m\ge 2$ рівністю

$$\langle Au,v\rangle=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,,$$

$$\langle Tu,v\rangle=\int_\Omega a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)v\,dx,\qquad u,v\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{m}(\Omega)\,, \tag{3}$$

де

$$x=(x_1,\dots,x_n),\qquad dx=dx_1,\dots,dx_n\,.$$

Припускаємо, що для $x\in\overline{\Omega},\ \ u\in R^1,\ \ p=(p_1,\dots,p_n)\in R^n$ виконуються такі умови:

а) функції $a_i(x,u,p)$, $i=1,\dots,n$ неперервно диференційовані за x,u,p, функція $a(x,u,p)$ неперервно диференційована за u,p;

б) мають місце оцінки

$$C_1(1+|p|)^{m-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial p_i}\xi_i\xi_j\le$$

$$\le C_2\left(1+|u|^{\frac{n}{n-m}}+|p|\right)^{m-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial u}\right|+\left|\frac{\partial a(x,u,p)}{\partial p_i}\right|\right]\le C_2(1+|u|^{\alpha_1}+|p|^{m_1})\,,$$

$$\left|\frac{\partial a(x,u,p)}{\partial u}\right|\le C_2(1+|u|^{\alpha_2}+|p|^{m_2})\,,$$

$$\left|\frac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial x_j}\right| \le \mu(|u|)(1+|p|)^{m-1},$$

де C_1, C_2 – додатні числа, μ – додатна неперервна функція і

$$\max\left\{(\alpha_1+1)\frac{m}{m-1},\ \frac{m}{m-m_1-1},\ \frac{2m}{m-m_2},\ \alpha_2+2\right\} \le \frac{n(m+2)}{2(n-m)}.$$

У цих умовах поле $Au+Tu$ задовольняє умови п. 1, і оператори A, T диференційовані за Фреше в кожній точці X.

Можемо вважати, що $\frac{\partial a_i}{\partial u}(x,0,0)=0$. В противному випадку запишемо поле $Au+Tu$ у вигляді A_1u+T_1u, де

$$\langle A_1u,v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left[a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial a_i(x,0,0)}{\partial u}\cdot u\right]\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.$$

Теорема 3. *Нехай* $A0=T0=0$, *виконуються умови* а), б), *і рівняння* $A'u+T'u=0$ *має лише нульовий розв'язок. Тоді для поля* $Au+Tu$, *що визначається згідно з формулами* (3), *виконуються умови* 1) – 3) *п.* 2, *і індекс нуля цього поля можна обчислити за теоремою* 1.

При доведенні умови 2) використовуються теореми про регулярність розв'язків лінійних еліптичних рівнянь [6]. Доведення підпорядкованості оператора T оператору A базується на оцінках в $W_p^1(\Omega)$ з досить великими p розв'язків рівняння

$$t(Au+Tu)+(1-t)(A'u+T'u)=0, \qquad t\in[0,1].$$

Переформулювавши теорему 2 для випадку операторів A, T, які зараз розглядаються, одержуємо достатню умову існування точок біфуркації рівняння

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mu\cdot a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

1. *І.В. Скрипник*, ДАН УРСР, сер. А, 32 (1970). 2. *І.В. Скрипник,* ДАН УРСР, сер. А, 989 (1971). 3. *Ж. Лерэ и Ю. Шаудер,* УМН, **1,** 3 – 4, 75 (1946). 4. *М.А. Красносельский.,* Топологические методы в теории нелинейных интеграль-ных уравнений, М., Гостехиздат, 1956, стор. 194. 5. *І.В. Скрипник,* ДАН УРСР, сер. А, 126 (1971). 6. *А.И. Кошелев,* УМН, **13**, 4, 29 (1958).

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОБЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(*Доклады Академии наук СССР. – 1978. –* ***239****, №3*)

В работе развиваются топологические методы исследования разрешимости задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений. Основываясь на полученном в [1] неравенстве коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов и на введенном в [2] вращении векторных полей, связанных с обобщенными монотонными отображениями, в статье определена топологическая характеристика для общих нелинейных эллиптических операторов. В отличие от [3, 4] развиваемые методы позволяют исследовать разрешимость задачи Дирихле для произвольных эллиптических уравнений при более общих предположениях и без предварительного сведения граничной задачи к операторному уравнению вида $u+Tu=0$ с вполне непрерывным оператором T.

1. Далее Ω – ограниченная область в R^n с бесконечно дифференцируемой границей, $n_0=[n/2]+1,$ m – произвольное натуральное число, M – число различных мультииндексов с n компонентами длины не большей чем m.

Пусть функция $\mathcal{F}:\overline{\Omega}\times R^M\to R^1$ принадлежит пространству $C^l, l\ge n_0,$ и удовлетворяет условию

1) существует положительная непрерывная функция $C:R^M\to R^1$ такая, что при $x\in\overline{\Omega},\quad \xi=\{\xi_\alpha:\ |\alpha|\le m\}\in R^M,\quad \eta=(\eta_1,...,\eta_n)\in R^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{|\alpha|=2m}\mathcal{F}_\alpha(x,\xi)\eta^\alpha\ge C(\xi)\cdot|\eta|^{2m},$$

где

$$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n),\quad \eta^\alpha=\eta_1^{\alpha_1}...\eta_n^{\alpha_n},\quad \mathcal{F}_\alpha(x,\xi)=\frac{\partial\mathcal{F}(x,\xi)}{\partial\xi_\alpha}.$$

Обозначим через X банахово пространство $W_2^{2m+l}(\Omega)\cap\dot{W}_2^m(\Omega)$ и пусть D – произвольная ограниченная область в X. Определим постоянные k_1,k_2,k_3,C равенствами

$$k_1=\sup_{u\in D}\|u\|_{2m+l},\quad {k_2}^2=\sup_{u\in D}\left\{\max_{x\in\overline{\Omega}}\sum_{|\alpha|\le 2m}\left|D^\alpha u(x)\right|^2\right\},$$

$$k_3=\|\mathcal{F}(x,\xi)\|_{C^l(\overline{\Omega}\times B)},\quad C=\min_{\xi\in B}C(\xi);$$

здесь $\|\cdot\|_{2m+l}$ – норма в $W_2^{2m+l}(\Omega),\quad B=\{\xi\in R^M:|\xi|\le k_2\}.$

Будет введено понятие вращения векторного поля $F(u)$ на границе ∂D области D в случае нелинейного оператора $F:X\to W_2^l(\Omega)$, определяемого равенством

$$F(u)=\mathcal{F}(x,u,...,D^{2m}u),$$

$D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$. При этом предполагается, что задача Дирихле

$$\mathcal{F}\left(x, u, \dots, D^{2m} u\right) = 0, \quad D^\alpha u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \le m-1, \tag{1}$$

не имеет решений, принадлежащих ∂D.

Рассмотрим семейство равномерно эллиптических операторов

$$\boldsymbol{L} = \left\{ L_v = \sum_{|\alpha| \le 2m} F_\alpha(x, v, \dots, D^{2m} v) D^\alpha \; : \; v \in \overline{D} \right\}.$$

Из работы [1] следует существование вещественных бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций $b_\alpha(x),\ |\alpha| \le 2m,\ C_{\beta\gamma}(x),\ |\beta|,\ |\gamma| \le l,$ и постоянной c, зависящих лишь от k_1, k_2, k_3, C, Ω таких, что $C_{\beta\gamma}(x) = C_{\gamma\beta}(x)$ и при $u \in X,\ f(x) \in W_2^l(\Omega),\ L_v \in \boldsymbol{L}$ выполнены неравенства

$$\left[L_\nu u, Mu\right]_l \ge c^{-1}\|u\|_{2m+l}^2 - c\|u\|_0^2, \quad c^{-1}\|f\|_l^2 \le \left[f, f\right]_l \le c\|f\|_l^2; \tag{2}$$

здесь

$$\left[f, f\right]_l = \sum_{|\beta|,|\gamma| \le l} \int_\Omega C_{\beta\gamma}(x) D^\beta f \cdot D^\gamma f dx, \quad M = \sum_{|\alpha| \le 2m} b_\alpha(x) D^\alpha \tag{3}$$

и оператор M равномерно эллиптичен. Просто проверяется, что оператор M можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$(-1)^m \int_\Omega Mu \cdot u\, dx \ge c^{-1}\|u\|_m^2, \quad u \in X. \tag{4}$$

Определим теперь нелинейный оператор $A : \overline{D} \to X^*$ равенством

$$< Au, \varphi > = \left[\mathcal{F}(x, u, \dots, D^{2m} u),\ M\varphi\right]_l, \tag{5}$$

где при $h \in X^*,\ \varphi \in X$ через $< h, \varphi >$ обозначено действие функционала h на элементе φ.

Теорема 1. *Определяемый равенством* (5) *оператор* $A : \overline{D} \to X^*$ *непрерывен, ограничен и удовлетворяет условию*

α) *для произвольной последовательности* $u_n \in \overline{D}$, *слабо сходящейся к* u_0, *из* $\varliminf_{n\to\infty} < Au_n,\ u_n - u_0 > \le 0$ *следует сильная сходимость* u_n *к* u_0.

Ограниченность и непрерывность оператора A просто устанавливаются, проверка условия α) основана на неравенстве (2).

Из теоремы 1 и работы [2] следует, что для векторного поля Au определено вращение на ∂D, если $F(u) \ne 0$ при $u \in \partial D$. Независимость этого вращения от выбора функций $b_\alpha(x), C_{\beta\gamma}(x)$ обеспечивает

Теорема 2. *Пусть* $b_\alpha^{(i)}(x),\ |\alpha| \le 2m,\ C_{\beta\gamma}^{(i)}(x),\ |\beta|,\ |\gamma| \le l,\ i = 1,2,$ *– бесконечно дифференцируемые в* $\overline{\Omega}$ *функции,* $C_{\beta\gamma}^{(i)}(x) = C_{\gamma\beta}^{(i)}(x)$ *и пусть скалярные произведения* $[\cdot,\cdot]_l^{(i)}$, *операторы* $M^{(i)}$, $A^{(i)}$ *при* $i = 1,2$ *определены равенствами* (3), (5) *с заменой* $b_\alpha(x), C_{\beta\gamma}(x)$ *на* $b_\alpha^{(i)}(x), C_{\beta\gamma}^{(i)}(x)$.

Предположим, что $F(u) \neq 0$ *при* $u \in \partial D$ *и выполнены неравенства* (2), (4) *при замене* $M, [\cdot,\cdot]_l$ *на* $M^{(i)}, [\cdot,\cdot]_l^{(i)}$.

Тогда вращения полей $A^{(1)}u$ *и* $A^{(2)}u$ *на* ∂D *совпадают.*

Теорема 2 делает естественным

Определение. Вращением векторного поля $F(u)$ на ∂D называется вращение на ∂D векторного поля Au с оператором A, определяемым формулой (5).

2. Вращение поля $F(u)$ является гомотопическим инвариантом и обладает всеми обычными свойствами вращения, что непосредственно следует из [2]. В частности, справедлив

Принцип ненулевого вращения. *Для того чтобы задача* (1) *имела решение в области* D*, достаточно, чтобы вращение поля* $F(u)$ *на* ∂D *было отличным от нуля.*

Просто переносятся на $F(u)$ достаточные признаки отличия от нуля вращения, формула индекса критической точки, признаки существования критической точки. Укажем только одно из возможных применений.

Теорема 3. *Пусть функция* $\mathcal{F}(x,\xi)$ *удовлетворяет предположениям п.*1. D – *произвольная ограниченная область в* X, $0 \in D$.

Тогда при $k \geq c^2$ *задача*

$$\mathcal{F}(x,u,\ldots,D^{2m}u) + (-1)^m ku = 0, \quad D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leq m-1,$$

имеет, по крайней мере, одно решение в D. *Здесь* c – *постоянная из неравенств* (2), (4).

3. Вращение поля $F(u)$ на границе выпуклой области D можно определить и в том случае, если условие 1) заменить условием

1’) существует постоянная c такая, что для $v \in N_D$ выполнено неравенство

$$\sum_{|\alpha|=2m} \mathcal{F}_\alpha(x,v,\ldots,D^{2m}v)\eta^\alpha \geq c|\eta|^{2m};$$

здесь N_D – множество принадлежащих D решений задачи (1).

При этом оператор M строится по семейству

$$\mathcal{L}' = {}'L_v = \left\{ \sum_{|\alpha|\leq 2m} \mathcal{F}_\alpha(x,v,\ldots,D^{2m}v)\, D^\alpha; \quad v \in N_D \right\}.$$

Определяемый равенством (5) оператор A удовлетворяет в этом случае условию

α_0) для произвольной последовательности $u_n \in \overline{D}$, слабо сходящейся к u_0, из $Au_n \square 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} < Au_n, u_n - u_0 > \leq 0$ следует сильная сходимость u_n к u_0.

Проверяется, что определенное в работе [2] вращение векторного поля Au для операторов A, удовлетворяющих условию α), можно распространить дословным повторением рассуждений на операторы, удовлетворяющие условию α_0). Тем самым определено вращение Au на ∂D, а значит, и вращение поля $F(u)$. И в этом случае просто проверяется для поля $F(u)$ выполнение основных свойств вращения.

4. Из сказанного в предыдущем пункте и результатов работы [2] просто получается

Теорема 4. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* R^n *с границей* $\partial\Omega$ *класса* C^∞, $A:[0,1]\times\overline{\Omega}\times R^M \to R^1$ *– функция класса* $C^l, l \geq n_0$ *и выполнены условия:*

а) *существует положительная постоянная* K *такая, что для* $t\in[0,1]$, $v\in X$ *из* $A(t,x,v,...,D^{2m}v)=0$ *следует* $\|v\|_{2m+l}\leq K$ *и*

$$\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(t,x,v,...,D^{2m}v)\eta^\alpha \geq K^{-1}\,|\,\eta\,|^{2m}, \quad A_\alpha(t,x,\xi)=\frac{\partial A(t,x,\xi)}{\partial\xi_\alpha};$$

б) $A(0,x,-\xi)=-A(0,x,\xi)$ при $x\in\overline{\Omega},\ \xi\in R^M$.

Тогда задача

$$A(1,x,u,...,D^{2m}u)=0, \quad D^\alpha u\,|_{\partial\Omega}=0, \quad |\,\alpha\,|\leq m-1.$$

имеет, по крайней мере, одно решение в X.

5. Используя вращение векторного поля для операторов, рассмотренных в п.3, получено усиление результатов А.И.Бакельмана [5] о существовании гладкого в замкнутой области решения задачи Дирихле для уравнения Монжа-Ампера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\varphi\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad u\,|_{\partial\Omega}=g(x,y). \tag{6}$$

Автором совместно с А.Е.Шишковым доказана классическая разрешимость задачи (6) без предположения $\partial\varphi/\partial u\geq 0$.

1. *И.В.Скрыпник,* ДАН, 239, №2 (1978).
2. *И.В.Скрыпник*, Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, Киев, «Наукова думка», 1973.
3. Жлере, Ю.Шаудер, УМН, т. 1, 3–4, 71 (1946).
4. *F.E.Browder,* Pacif. J. Math., v. 17, №1, 17 (1966).
5. *И.Я.Бакельман,* Геометрические методы решения эллиптических уравнений, М., «Наука», 1965.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В УЗКОЙ ПОЛОСЕ

(*Доклады Академии наук СССР. – 1980. –* ***250****, № 3*)

В данном сообщении устанавливается существование классического решения задачи Дирихле для общего нелинейного эллиптического уравнения в узкой полосе. В линейном случае соответствующий результат известен [1]. Отметим, что условие узости полосы не предполагает малости меры этой полосы, так что мера полосы может быть произвольной.

1. Через $\{\Omega_h,\ 0<h\le 1\}$ будем обозначать семейство областей в R^n с бесконечно дифференцируемой границей таких, что:

а) $\Omega_{h_1}\subset\Omega_{h_2}$ при $h_1<h_2$;

б) существуют открытые покрытия $\{U_i,\ i=1,...,I\}$ множества $\overline{\Omega}_1$ и диффеоморфизмы $\varphi_i: U_i\cap\overline{\Omega}_1\to R^n$ класса C^∞, при которых

$$\varphi_i(U_i\cap\overline{\Omega}_h)=S_h=\left\{x\in R^n: |x'|<1,\ 0\le x_n\le h\right\},\ x'=\left(x_1,...,x_{n-1}\right).$$

Пусть $\{\psi_i(x)\},\ i=1,...,I,$ – подчиненное покрытию $\{U_i\}$ разбиение единицы.

Обозначим при целых неотрицательных m,l,k и произвольном $p>1$ через $W_p^{2m,l,k}(\Omega_h)$ замыкание множества бесконечно дифференцируемых в Ω_h функций по норме

$$\|u\|^p_{W_p^{2m,l,k}(\Omega_h)}=\sum_{i=1}^{I}\left\|\psi_i(\varphi_i^{-1}(y))\,u(\varphi_i^{-1}(y))\right\|^p_{W_p^{2m,l,k}(S_h)},$$

где

$$\|v(y)\|^p_{W_p^{2m,l,k}(S_h)}=\sum_{|\alpha|\le 2m}\int_{S_h}\left\{\sum_{j=0}^{k}|D_n^jD^\alpha v(y)|^p+{\sum_{|\beta|\le l}}'|D^\beta D^\alpha v(y)|^p\right\}dy.$$

Здесь использованы обычные мультииндексные обозначения, через $\sum{}'$ обозначено суммирование по всем тем мультииндексам, последняя координата которых равна нулю.

Пространство $C^{s,r,\lambda}(\Omega_h)$ при неотрицательных целых s,r и при λ, принадлежащем отрезку [0, 1], образуется замыканием множества бесконечно дифференцируемых в Ω_h функций по норме

$$\|u(x)\|_{C^{s,r,\lambda}(\Omega_h)}=\max\left\|\psi_i(\varphi_i^{-1}(y))\ u(\varphi_i^{-1}(y))\right\|_{C^{s,r,\lambda}(S_h)},$$

где

$$\|v(y)\|_{C^{s,r,\lambda}(S_h)}=\sum_{|\beta|\le s}{\sum_{|\alpha|\le r}}'\left\|D^\beta D^\alpha v(y)\right\|_{C^{o,\lambda}(S_h)}$$

и $\|\cdot\|_{C^{o,\lambda}}$ – обычная норма в пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем λ.

2. Здесь формулируется ряд вспомогательных оценок для функций, принадлежащих определенным в предыдущем пункте пространствам. Зависимость оценок от h указывается явным образом. В дальнейшем буквой K без индекса будем обозначать постоянную, зависящую лишь от n,m,l и постоянных, характеризующих дифференциальные свойства функций φ_i,ψ_i, которые предполагаются фиксированными.

Лемма 1. *Для произвольной функции* $u(x)\in W_2^{2m,l,0}(\Omega_h)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega_h)$ *при* $l\geq n+1,\ 0\leq\lambda<1/2$ *справедлива оценка*

$$\|u(x)\|_{C^{2m-1,2,\lambda}(\Omega_h)}\leq Kh^{1/2-\lambda}\|u(x)\|_{W_2^{2m,l,0}(\Omega_h)}. \tag{1}$$

Лемма 2. *Для произвольной функции* $u(x)\in W_2^{2m,l,0}(\Omega_h)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega_h)\cap W_{2l}^{2m,1,0}(\Omega_h)$ *при произвольном положительном* ε *и* $1\leq k\leq l-1$ *справедлива оценка*

$$\|u(x)\|^{2l/k}_{W^{2m,k,0}_{(2l)/k(\Omega_h)}}\leq\varepsilon\|u(x)\|^2_{W_2^{2m,l,0}(\Omega_h)}+C_\varepsilon^{(1)}\|u(x)\|^{2l}_{W_{2l}^{2m,1,0}(\Omega_h)} \tag{2}$$

с постоянной $C_\varepsilon^{(1)}$*, зависящей от тех же параметров, что* K*, и от* ε.

Лемма 3. *Для произвольной функции* $u(x)\in W_2^{2m,l,0}(S_h)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(S_h)$*, равной нулю при* $|x'|$*, близком к единице, при* $m<j<2m,\ 2m-j\leq k\leq 2m+l-j$*, произвольном положительном числе* ε*, выполнена оценка*

$$\sum_{|\alpha|=k}{}'\int_{S_h}\left|D_n^jD^\alpha u\right|^2dx\leq\varepsilon\sum_{|\alpha|=k-1}{}'\int_{S_h}\left|D_n^{j+1}D^\alpha u\right|^2dx+C_\varepsilon^{(2)}\sum_{|\alpha|=k+1}{}'\int_{S_h}\left|D_n^{j-1}D^\alpha u\right|^2dx \tag{3}$$

с постоянной $C_\varepsilon^{(2)}$*, зависящей от тех же параметров, что и* $C_\varepsilon^{(1)}$ *в* (2).

Лемма 4. *Для произвольной функции* $u(x)$*, удовлетворяющей условиям леммы* 3, *выполнена оценка*

$$\sum_{|\alpha|=r}{}'\int_{S_h}\left|D_n^sD^\alpha u\right|^2dx\leq\varepsilon\sum_{|\alpha|=r+1}{}'\int_{S_h}\left|D_n^sD^\alpha u\right|^2dx+C_\varepsilon^{(3)}\sum_{|\alpha|=r-1}{}'\int_{S_h}\left|D_n^sD^\alpha u\right|^2dx. \tag{4}$$

Здесь $r\leq l-1,\ \ s\leq 2m$ *и* $\varepsilon, C_\varepsilon^{(3)}$ *аналогичны соответствующим постоянным в* (3).

3. В данном пункте указывается коэрцитивная оценка для пар линейных эллиптических операторов в S_h. Отличием этой оценки от полученных ранее автором в [2] является, с одной стороны, равномерность по $h\in(0,1]$ и, с другой стороны, специфический выбор функционального пространства, для элементов которого устанавливается оценка. Результаты настоящего пункта служат основными как для получения оценок решения нелинейной задачи, так и для доказательства теоремы существования.

Через $£_{2m}^{1,\lambda}(A,B,S_h)$ обозначим при $\lambda\in(0,1],\ A,B>0$ семейство правильно эллиптических операторов $L(x,D)=\sum\limits_{|\alpha|\leq 2m}a_\alpha(x)D^\alpha$ с коэффициентами $a_\alpha(x)\in C^{1,\lambda}(S_h)$, для которых

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq A|\xi|^{2m} \quad при \quad x \in S_h,\ \xi \in R^n,$$

$$\|a_\alpha(x)\|_{C^{1,\lambda}(S_h)} \leq B\ .$$

Теорема 1. *Существуют постоянные* C_1, C_2, *зависящие лишь от* A, B, m, n, λ, l *такие, что при* $q > C_1$, $\rho > qC_1$, *произвольном операторе* $L(x, D) \in £^{1,\lambda}_{2m}(A, B, S_h)$ и произвольной функции $u(x) \in W_2^{2m,l,1}(S_h) \cap \overset{\circ}{W}{}^m_2(S_h)$, *равной нулю при* $|x'|$, *близких к единице, выполнена оценка*

$$\int_{S_h} \{L(x,D)D_n^1 u \cdot M(D)_n^1 u + \rho \sum_{|\alpha|\leq l}{}' L(x,D)D^\alpha u \cdot M(D)D^\alpha u\} dx \geq$$

$$\geq \frac{A}{2}\int_{S_h} |D_n^{2m+1}u|^2\ dx + \rho\frac{A}{2}\int_{S_h}\sum_{|\alpha|\leq l}{}' |D^\alpha D_n^{2m} u|^2\ dx + \tag{5}$$

$$+ C_2\rho q \sum_{|\alpha|\leq l}{}' \sum_{|\beta|=m}{}' \sum_{|\gamma|=m} \int_{S_h} |D^\alpha D^\beta D^\gamma u|^2\ dx - C(\rho,q)\int_{S_h}\sum_{|\alpha|\leq 2m} |D^\alpha u|^2\ dx\ ,$$

где $M(D) = D_n^{2m} + q\left[D_1^2 + \ldots + D_{n-1}^2\right]^m$, $C(\rho, q)$ – *постоянная, зависящая от* $A, B, m, n, \lambda, \varepsilon, \rho, q$.

4. Число l дальше считается фиксированным, $l \geq n+1$. Рассматривается разрешимость в $W_2^{2m,l,1}(\Omega_h)$ нелинейной задачи Дирихле

$$F(x, u, \ldots, D^{2m}u) = f(x), \quad x \in \Omega_h; \tag{6}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad x \in \partial\Omega_h, \quad |\alpha| \leq m-1. \tag{7}$$

Предполагается, что функция $F(x, \xi)$ определена при $x \in \overline{\Omega}_1$, $\xi = \{\xi_\alpha : |\alpha| \leq 2m\} \in R^M$, имеет непрерывные производные по всем аргументам до порядка $l \geq n+1$ и с некоторой положительной постоянной ν при $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in R^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{|\alpha|=2m} \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi_\alpha}\eta^\alpha \geq \nu|\eta|^{2m}. \tag{8}$$

Будем считать, что $F(x, 0) = 0$, функция $f(x)$ принадлежит пространству $W_2^{0,l,1}(\Omega_1) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}_1)$ и

$$\|f\|_{W_2^{0,l,1}(\Omega_1)} + \|f\|_{C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}_1)} \leq R\ .$$

Вначале будут получены априорные оценки решений параметрической задачи

$$tF(x, u, \ldots, D^{2m}u) + (1-t)L_0 u = tf(x), \quad x \in \Omega_h; \tag{9}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad x \in \partial\Omega_h, \quad |\alpha| \leq m-1, \tag{10}$$

где $L_0(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ – фиксированный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, для которого $L_0(\eta) \geq \nu|\eta|^{2m}$ при $\eta \in R^n$.

Укажем оценку решения задачи (9), (10), удовлетворяющего еще условию

$$\|u(x)\|_{C^{2m-1,2,\lambda}(\Omega_h)} \le 1 . \qquad (11)$$

Для такого решения просто получается оценка

$$\|u(x)\|_{C^{2m}(\Omega_h)} \le C \qquad (12)$$

с постоянной C, зависящей от $\nu, R, g(1), m, n$ и функций φ_i, ψ_i. Здесь

$$g(t) = \|F(x,\xi)\|_{C^l(\overline{\Omega}_1 \times B_t)}, \quad B_t = \{\xi \in R^M : |\xi| \le t\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $u(x)$ *– произвольное решение задачи* (9), (10), *удовлетворяющее условию* (11). *Существует постоянная* N *, зависящая от* $m, n, l, \nu, R, g(c), mes\,\Omega_1$ *и функций* φ_i, ψ_i, *такая, что*

$$\|u(x)\|_{W_2^{2m,l,1}(\Omega_h)} \le N . \qquad (13)$$

Доказательство основывается на теореме 1 и вспомогательных леммах п.1.

5. Существование решения задачи (6), (7) устанавливается топологическим методом, основанным на введенном в [3] понятии вращения определенных классов векторных полей.

Обозначим через X банахово пространство $W_2^{2m,l,1}(\Omega_h) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega_h)$ и пусть $\mathrm{D} = \{\mathrm{u} \in \mathrm{X} : \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{W}_2^{2m,l,1}(\Omega_h)} \le N+1\}$, где N определено в теореме 2. Перейдем при $x \in U_i \cap \overline{\Omega}_h$ от переменных x к новым переменным y равенством $x = \varphi_i^{-1}(y)$ и обозначим через F_i, L_i дифференциальные операторы, возникающие из F, L_0 при указанной замене переменных. Рассмотрим семейство линейных операторов вида

$$L(y, D_y) = t \sum_{|\alpha| \le 2m} F_{i,\alpha}(y, u_i, ..., D_y^{2m} u_i) D_y^\alpha + (1-t) L_i(y, D_y)$$

при $u(x) \in \mathrm{D}$ и являющихся решениями задачи (9), (10), $u_i(y) = u(\varphi_i^{-1}(y))$.

Просто проверяется, что множество этих операторов содержится в некотором семействе $\pounds_{2m}^{1,\lambda}(A, B, S_h)$ и поэтому по теореме 1 для рассматриваемого множества можно определить оператор $M(D)$ и постоянные ρ, q так, чтобы выполнялось неравенство (5). Ниже ρ, q считаются выбранными именно таким способом.

Определим нелинейный оператор $A_t : \mathrm{D} \to X^*$ равенством

$$< A_t u, v > = \sum_{i=1}^{l} \int_{S_h} \psi_i^2(y) \{ D_n^1 [t F_i(y, u_i, ..., D^{2m} u_i) + (1-t) L_i u_i - t f_i(y)] D_n^1 M v_i + \qquad (14)$$

$$+ \rho \sum_{|\alpha| \le l}{}' D^\alpha [t F_i(y, u_i, ..., D^{2m} u_i) + (1-t) L_i u_i - t f_i(y)] D^\alpha M v_i \} dy .$$

Теорема 3. *Пусть* u_n *– произвольная принадлежащая* D *последовательность элементов такая, что:*

а) *последовательность* u_n *слабо сходится в* X *к некоторому элементу* u_0;

б) *последовательность* $A_{t_n} u_n$ *слабо сходится к нулю;*

в) $\lim\limits_{n\to\infty} < A_{t_n} u_n, u_n - u_0 > \le 0$.

Тогда последовательность u_n *сильно сходится к* u_0.

Из теоремы 3 следует применимость принципа ненулевого вращения к доказательству разрешимости операторного уравнения $A_1 u = 0$. Выбирая h так, чтобы $Kh^{1/2-\lambda}(N+1) \le 1$, получаем для произвольного решения $u(x)$ задачи (9), (10), $u(x) \notin \partial \mathbf{D}$. Отсюда следует

Теорема 4. *Пусть* $Kh^{1/2-\lambda}(N+1) \le 1$. *Тогда задача Дирихле* (6), (7) *имеет решение, принадлежащее* $W_2^{2m,l,1}(\Omega_h)$.

1. *В.А.Кондратьев,* Тр. Московск. матем. общ-ва, т. 16, 293 (1967).
2. *И.В.Скрыпник,* ДАН, т. 239, № 2, 275 (1978).
3. *И.В.Скрыпник,* Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, в. 9, 131 (1976).

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С УСИЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТЬЮ

О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

(Дифференциальные уравнения. – 1978. – XIV, № 6)

Известные контрпримеры [1, 2] показывают, что квазилинейные эллиптические уравнения дивергентного вида

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x,u,\ \dots\ ,D^m u) = 0 \tag{1}$$

при $m > 1$ могут иметь неограниченные обобщенные решения, даже если $A_{\alpha}(x,\xi)$ – аналитические функции своих аргументов, удовлетворяющие естественным условиям роста при $|\xi| \to \infty$. Здесь $x = (x_1,\dots,x_n)$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ - вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $D^k u = \{D^{\alpha} u : |\alpha| = k\}$.

При исследовании ограниченности и непрерывности решения уравнения (1) накладываются ограничения на поведение функций $A_{\alpha}(x,\xi)$ при $|\xi| \to \infty$ и предполагается выполнение неравенства

$$\sum_{|\alpha|=m} A_{\alpha}(x,\xi)\xi_{\alpha} \ge C_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_{\alpha}|^p - C_2 \sum_{|\beta|<m} |\xi_{\beta}|^{p_{\beta}} - f(x) \tag{2}$$

при $\xi_{\alpha} \in R^1$, $\xi = \{\xi_{\alpha} : |\alpha| \le m\}$, $C_1 > 0$ и определенных условиях на p_{β}, $f(x)$. В случае уравнений второго порядка $(m = 1)$ ограниченность и гельдеровость обобщенных решений при условиях вида (2) доказаны О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой [3]. В работе [4] Фрезе показал ограниченность произвольного решения $u(x) \in W_p^m(\Omega)$ уравнения (1) при $n = mp$. Автором [5, 6] при том же условии была получена непрерывность каждого обобщенного решения. Затем гельдеровость решения изучалась при близких предположениях в работах Видмана [7], В.А.Солонникова [8]. Уточнение предположений о показателях p_{β}, при которых каждое ограниченное решение непрерывно, сделано в работе Т.Г. Тодорова [9]. Во всех этих работах [4–9] предполагается при доказательстве ограниченности, непрерывности обобщенных решений выполнение условия $n = mp$ либо достаточная малость разности $n - mp$.

В данной работе выделен класс уравнений вида (1), все обобщенные решения которых удовлетворяют условию Гельдера без каких-либо предположений о зависимости между числами m, n, p. Выделенный класс уравнений характеризуется тем, что для него условие (2) заменяется более сильным условием, но таким, которое надлежащим образом согласуется с соответствующим условием для уравнений второго порядка [3]. Приводятся примеры, показывающие существенность накладываемых условий.

§ 1. Формулировка результатов

Дальше Ω - ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n, граница $d\Omega$ которой для простоты считается бесконечно дифференцируемой. Предположим, что $m \geq 2$, и с некоторыми положительными постоянными C_1, C_2, C_3 при $p \geq 2,\ q > mp,\ x \in \overline{\Omega},\ \xi_\alpha \in R^1$ выполнены неравенства

$$\sum_{1\leq|\alpha|\leq m} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geq C_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p + C_2 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q - C_3 \sum_{|\alpha|\neq 1,m} |\xi_\alpha|^{p_\alpha} - f(x), \tag{3}$$

$$|A_\alpha(x,\xi)| \leq C_3 \sum_{|\beta|\leq m} |\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}} + f_\alpha(x), \quad |\alpha| \leq m. \tag{4}$$

Здесь числа $p_\alpha,\ p_{\alpha\beta}$ определяются условием

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{|\alpha|-1}{m-1}\cdot\frac{1}{p} + \frac{m-|\alpha|}{m-1}\cdot\frac{1}{q_1} \quad \text{при} \quad 1<|\alpha|\leq m,$$

$$p_\alpha = q \quad \text{при} \quad |\alpha|=1, \quad q < p_0 < \frac{nq}{n-q}, \quad p_{\alpha\beta} - p_\beta\left(1-\frac{1}{p_\alpha}\right) \tag{5}$$

и число q_1 удовлетворяет неравенству $mp < q_1 < q < n$.

В (3), (4) функции $f(x),\ f_\alpha(x)$ принадлежат соответственно пространствам $L_{t_1}(\Omega),\ L_{t_\alpha}(\Omega)$, где

$$t_1 > \frac{n}{q}, \quad t_\alpha > \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1}\cdot\frac{n}{q} \quad \text{при} \quad |\alpha| \leq m. \tag{6}$$

Замечание 1. В связи с тем, что в работе изучается вопрос об ограниченности и гельдеровости обобщенного решения, естественно считать $n > mp$, так как при $n < mp$ гельдеровость решения обеспечивают теоремы вложения в пространствах С.Л. Соболева, а при $n = mp$ непрерывность решения известна [4–9]. По той же причине считаем $q < n$. При $q = n$ нужно сделать небольшие изменения в предположениях (5), (6) и доказательствах следующих параграфов.

При условиях (3)–(6) можно определить обобщенное решение уравнения (1) класса $W_p^m(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$. А именно функцию $u(x) \in W_p^m(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$ называем обобщенным решением уравнения (1), если для произвольной функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega A_\alpha(x, u, \dots, D^m u) D^\alpha v \, dx = 0. \tag{7}$$

Из принадлежности $u(x)$ пространству $W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ следует $D^\alpha u\in L_{p_\alpha}(\Omega)$ в силу интерполяционного неравенства Ниренберга-Гальярдо [10], и поэтому неравенства (3)–(6) обеспечивают существование интеграла в (7) при произвольных $u(x),\ v(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$.

Замечание 2. Существование решения уравнения (1) класса $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ или удовлетворяющего граничным условиям Неймана можно доказать при определенных предположениях о коэффициентах A_α, например, методами монотонных операторов (см. [6]).

Теорема 1. *Пусть* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ – *обобщенное решение уравнения* (1), $p\ge 2,\ q>mp$, *и предположим, что выполнены условия* (3)–(6). *Тогда при некотором* $\lambda>0$ $u(x)\in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ *и* $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})}$ *оценивается постоянной* C, *зависящей только от* $\|u\|_{L_{p0}(\Omega)},\ C_1,\ C_2,\ C_3$, $p,\ p_0,\ q,\ q_1,\ m,\ n,\ \|f\|_{L_{t_1}(\Omega)},\ \|f_\alpha\|_{L_{t_\alpha}(\Omega)},\ \Omega$.

Если не предполагать, что $u(x)$ удовлетворяет однородному условию Дирихле, то справедлива теорема о внутренней гладкости $u(x)$.

Теорема 2. *Пусть* $u(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ – *обобщенное решение уравнения* (1), $p\ge 2,\ q>mp$, *и пусть выполнены условия* (3)–(6). *Тогда для произвольной внутренней подобласти* Ω' *области* Ω $u(x)\in C^{0,\lambda'}(\Omega')$ *с некоторым* $\lambda'>0$ *и* $\|u\|_{C^{0,\lambda'}(\Omega')}$ *оценивается постоянной* C', *зависящей от тех же параметров, что и постоянная* C *в теореме* 1, *и* d' – *расстояния* Ω' *до границы области* Ω.

Замечание 3. Гладкость границы области Ω для справедливости теоремы 2 предполагать не нужно.

Доказательство теорем 1, 2 будет дано в § 3–5. В § 3 будет доказана ограниченность максимума модуля обобщенного решения уравнения (1) и получена его оценка. Гельдеровость и оценки постоянной Гельдера будут получены для внутренней подобласти и вблизи границы соответственно в § 4, 5.

Доказательство ограниченности обобщенного решения основано на получении равномерных оценок норм этого решения в $L_r(\Omega)$ либо $L_r(\Omega')$ при $r\to\infty$. Доказательство гельдеровости решения основано на получении подобных оценок для некоторой вспомогательной функции, при выборе которой использовалась идея Ю. Мозера [11].

Во всех оценках § 3–5 все константы, зависящие от тех же параметров, что и постоянные $C,\ C'$ в теоремах 1, 2, будут обозначаться соответственно через C и C' без дополнительных индексов.

§ 2. Примеры неограниченных решений

Здесь будет показана на примерах существенность условий предыдущего параграфа. Покажем вначале, что теоремы 1, 2 неверны, если сохранить все предположения предыдущего параграфа, кроме $q > mp$, и заменить неравенство $q > mp$ равенством $q = mp$. В приводимом ниже примере уравнение вида (1) при $q = mp$ имеет неограниченное решение.

В этом параграфе $n > 4,\ \Omega$ – шар радиуса единица с центром в начале координат. Непосредственные вычисления показывают, что функция $u_0(x) = \ln|x|$ удовлетворяет при $x \neq 0$ уравнению

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{x_k x_l}{|x|^2} + \sigma_1 \delta_k^l \right) \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \sigma_1 \delta_i^j \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right\} - 2\sigma_3 \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x_l} \right] = 0, \tag{8}$$

если постоянные $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ удовлетворяют соотношению

$$2\sigma_2 (n-2) + 2\sigma_3 = [(n-2)\sigma_1 - 1]\,[n - 3 - 2\sigma_1]. \tag{9}$$

Элементарно проверяется, что $u_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap W_4^1(\Omega)$ и является обобщенным решением уравнения (8). Для уравнения (8) будут выполнены условия (3), (4) с $p = 2, q = 4$, если выбрать постоянные σ_2, σ_3 положительными. Проверяется, что можно так подобрать σ_1 и достаточно малые положительные σ_2, σ_3, чтобы удовлетворялось равенство (9). Тем самым построен пример уравнения вида (1), имеющего неограниченное решение, и для которого выполнены все условия, кроме $q > mp$ (сейчас $q = mp = 4$). Этот пример показывает, что условие $q > mp$ нельзя ослабить для справедливости теорем 1, 2.

Приводимый ниже пример показывает, что теоремы 1, 2 перестают быть справедливыми, если в неравенстве (3) заменить постоянную C_2 неотрицательной функцией $C_2(x)$, обращающейся в нуль хотя бы в одной точке.

Пусть $n > q > 4$. Проверяется, что при $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, удовлетворяющих (9), $\sigma_2, \sigma_3 > 0$, функция $u_0(x) = \ln|x|$ принадлежит пространству $W_2^2(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$ и является обобщенным решением уравнения

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{x_k x_l}{|x|^2} + \sigma_1 \delta_k^l \right) \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \sigma_1 \delta_i^j \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \right\} -$$

$$- 2\sigma_3 \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{q-1} |x|^{2(q-2)} \frac{\partial u}{\partial x_l} \right\} = 0. \tag{10}$$

Этот пример показывает существенность условия $C_2 > 0$.

Замечание 4. Отметим, что указанные уравнения (8), (10) являются вариационными.

Замечание 5. Можно построить примеры уравнений вида (1) с бесконечно дифференцируемыми функциями $A_\alpha(x,\xi)$, имеющими неограниченные обобщенные решения, если нарушаются какие-либо условия предыдущего параграфа. Для этого, например, достаточно в уравнении (8) заменить выражения вида $\dfrac{x_k x_l}{|x|^2}$ выражением $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_l} f^{-2}(|\nabla u|)$, где $f(t)$ – положительная бесконечно дифференцируемая неубывающая функция, равная t при $t \ge 1$ и $1/2$ при $t \le 1/2$.

§ 3. Ограниченность обобщенного решения

Здесь будет доказано, что при выполнении условий теорем 1, 2 обобщенное решение уравнения (1) ограничено и максимум модуля решения оценивается требуемым образом. Будет доказана

Лемма 1. *Пусть* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{q}(\Omega)$ *– обобщенное решение уравнения* (1), $p \ge 2$, $q > mp$, *и предположим, что выполнены условия* (3)–(6). *Тогда* $\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$ *оценивается постоянной, зависящей от тех же параметров, что и константа* C *в теореме* 1.

Определим при $N \ge 2,\ t \in R^1$ неубывающую бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi_N(t)$, равную t при $|t| < N-1$, N при $t > N+1$, $-N$ при $t < -(N+1)$ и такую, что

$$\left| \frac{d^l}{dt^l} \varphi_N(t) \right| \le C_0 \quad \text{при} \quad l \le m.$$

Здесь C_0 – не зависящая от N абсолютная постоянная.

Подставляя в интегральное тождество (7) функцию

$$v = [1+\varphi_N^2(u)]^k u, \quad k \ge 0 \tag{11}$$

и оценивая возникающие при этом интегралы, получаем

$$\int\limits_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k \left\{ \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q \right\} dx \le C(k+1)^m \times$$

$$\times \int\limits_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k \left\{ \sum_{|\alpha|\ne 1,m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} + |f(x)| + |u|\cdot|f_0(x)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=2}^{m} \sum_{|\beta|=1}^{|\alpha|-1} |D^\beta u|^{|\alpha|/|\beta|} \left(\sum_{|\gamma|\le m} |D^\gamma u|^{p_{\alpha\gamma}} + |f_\alpha(x)| \right) \right\} dx. \tag{12}$$

Чтобы получить неравенство (12), достаточно заметить, что справедливо представление

$$D^\alpha v = [1+\varphi_N^2(u)]^k D^\alpha u + 2k[1+\varphi_N^2(u)]^{k-1} \varphi_N(u)\varphi_N'(u) u D^\alpha u + R_\alpha,$$

где $R_\alpha \equiv 0$ при $|\alpha| = 1$, $R_\alpha \equiv 0$ при $|\alpha| > 1$ на множестве $E_{N+1} = \{x \in \Omega : |u(x)| > N+1\}$ и выполнена оценка

$$|R_\alpha| \le C(k+1)^{|\alpha|}[1+\varphi_N^2(u)]^{k-\frac{1}{2}} \sum_{|\beta|=1}^{|\alpha|-1} |D^\beta u|^{\frac{|\alpha|}{|\beta|}}.$$

При преобразовании подынтегрального выражения правой части (12) воспользуемся неравенством Юнга. Имеем с некоторым $\nu > 0$

$$|D^\beta u|^{|\alpha|/|\beta|}\, |D^\gamma u|^{p_{\alpha\gamma}} \le \frac{\varepsilon}{(k+1)^m}\left(|D^\gamma u|^{p_\gamma} + |D^\beta u|^{p_\beta}\right) + \left[\frac{(k+1)^m}{\varepsilon}\right]^\nu. \tag{13}$$

При этом пользуемся просто проверяемым неравенством

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|\, p_\beta} + \frac{p_{\alpha\gamma}}{p_\gamma} < 1 \quad \text{при} \quad |\alpha| \ge 2, \quad 1 \le |\beta| \le |\alpha|-1, \quad |\gamma| \le m. \tag{14}$$

Применяя неравенство (13), получим из (12)

$$\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k \left\{\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\} dx \le C(1+k)^\lambda \times$$

$$\times \int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k \left\{\sum_{|\alpha|\ne 1,m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} + F(x)\right\} dx, \tag{15}$$

где λ – зависящая лишь от p_α положительная постоянная,

$$F(x) = |f(x)| + \sum_{|\alpha|\le m} |f_\alpha(x)|^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1}} + 1, \quad F(x) \in L_t(\Omega) \quad \text{при} \quad t > n/q.$$

При дальнейшем преобразовании правой части (15) применяется

Лемма 2. *При* $2 \le j \le m-1$ *и произвольных* $k > 0,\ s > 0,\ 0 < \delta < 1$ *выполнено неравенство*

$$(1+k)^s \int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha u|^{p_\alpha}\, dx \le C(k+1)^\sigma \delta^{-\mu} \int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k\, dx +$$

$$+\delta \int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k \left\{\sum_{|\alpha|=j+1} |D^\alpha u|^{p_\alpha} + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\} dx \tag{16}$$

с постоянными σ, μ*, зависящими лишь от* m, p_α, s.

Доказательство. Пусть $|\alpha| = j$ и представим $\alpha = \beta + \gamma$, где $|\beta| = j-1,\ |\gamma| = 1$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k |D^\alpha u|^{p_\alpha}\, dx = \int_\Omega [1-\varphi_N^2(u)]^k |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2} D^\alpha u\, D^\gamma D^\beta u\, dx =$$

$$= -\int_\Omega \{2k[1+\varphi_N^2(u)]^{k-1} \varphi_N(u) \varphi_N'(u) D^\gamma(u) |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2} D^\alpha u +$$

$$+ (p_\alpha - 1)[1+\varphi_N^2(u)]^k |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2} D^{\gamma+\alpha} u\} D^\beta u\, dx. \tag{17}$$

Проверим вначале неравенство (16) при $j = 2$. Для этого достаточно оценить по неравенству Юнга с $\varepsilon > 0$ члены, стоящие в правой части (17):

$$|D^\gamma u|\, |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1} D^\beta u| \le \frac{\varepsilon}{(k+1)^{s+1}}\left(|D^\gamma u|^q + |D^\beta u|^{p_\beta} + |D^\alpha u|^{p_\alpha}\right) + \frac{(k+1)^{\sigma_1}}{\varepsilon^{\mu_1}}, \tag{18}$$

$$|D^\alpha u|^{p_\alpha - 2} |D^{\alpha+\gamma} u \cdot D^\beta u| \le \frac{\varepsilon}{(k+1)^s}\left(|D^\alpha u|^{p_\alpha} + |D^{\alpha+\gamma} u|^{p_{\alpha+\gamma}} + |D^\beta u|^q\right) + \frac{(k+1)^{\sigma_2}}{\varepsilon^{\mu_2}}. \tag{19}$$

Здесь $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ – определенные постоянные. Справедливость оценок (18), (19) следует из легко проверяемых при $|\alpha|=2,\ |\beta|=|\gamma|=1$ неравенств

$$\frac{1}{p_\gamma}+\frac{1}{p_\beta}+\frac{p_\alpha-1}{p_\alpha}<1, \quad \frac{p_\alpha-2}{p_\alpha}+\frac{1}{p_{\alpha+\gamma}}+\frac{1}{p_\beta}<1. \tag{20}$$

Из (17)-(19) при соответствующем выборе ε следует неравенство (16), если $j=2$. Предположим по индукции, что неравенство (16) имеет место при $j<j_0$, и докажем его для $j=j_0$. Будем оценивать при $|\alpha|=j_0$ правую часть (17). Заметим, что первое неравенство (20) справедливо при любых α,β,γ, удовлетворяющим соотношениям $|\alpha|\ge 2,\ |\beta|=|\alpha|-1,\ |\gamma|=1$. Поэтому первое слагаемое подынтегрального выражения правой части (17) можно оценивать на основании (18). Для оценки второго слагаемого применим неравенство

$$|D^\alpha u|^{p_\alpha-2}|D^{\alpha+\gamma}u\ D^\beta u|\le \frac{\varepsilon}{(k+1)^s}(|D^\alpha u|^{p_\alpha}+|D^{\alpha+\gamma}u|^{p_{\alpha+\gamma}})+\frac{(k+1)^{\sigma_3}}{\varepsilon^{\mu_3}}|D^\beta u|^{p_\beta}. \tag{21}$$

При этом воспользовались неравенством Юнга и соотношением

$$\frac{p_\alpha-2}{p_\alpha}+\frac{1}{p_{\alpha+\gamma}}+\frac{1}{p_\beta}=1 \quad \text{при} \quad 2\le|\alpha|\le m,\ |\beta|=|\alpha|-1,\ |\gamma|=1.$$

Оценивая при $|\alpha|=j_0$ правую часть (17) по неравенствам (18), (21), получим при $\varepsilon>0$

$$(1+k)^s\sum_{|\alpha|=j_0}\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k|D^\alpha u|^{p_\alpha}\,dx\le C(k+1)^{\sigma_4}\varepsilon^{-\mu_4}\times$$

$$\times\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k\,dx+C\varepsilon\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k\left\{\sum_{|\alpha|=j_0+1}|D^\alpha u|^{p_\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}dx+C(k+1)^{\sigma_5}\varepsilon^{-\mu_5}\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k\sum_{|\alpha|=j_0-1}|D^\alpha u|^{p_\alpha}\,dx. \tag{22}$$

Для оценки последнего интеграла нужно воспользоваться индуктивным предположением и применить неравенство (16) при $|\alpha|=j_0-1,\ s=\sigma_5,\ \delta=\varepsilon^{-\mu_5+1}$. Неравенство (16) при $|\alpha|=j_0$ получается теперь из (22) при соответствующем выборе ε. Тем самым лемма 2 доказана.

Следствие 1. *При сохранении условий леммы* 2 *справедливо неравенство*

$$(1+k)^s\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k\sum_{|\alpha|=2}^{m-1}|D^\alpha u|^{p_\alpha}\,dx\le C(1+k)^\sigma\delta^{-\mu}\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k\,dx+$$

$$+C\,\delta\int_\Omega [1+\varphi_N^2(u)]^k\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}dx. \tag{23}$$

Оценка (23) получается суммированием по j неравенств (16). Применяя неравенство (23) к правой части (15), получаем при соответствующем выборе δ

$$\int_\Omega [1-\varphi_N^2(u)]^k\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}dx\le$$

$$\le C(k+1)^{\tau}\int_{\Omega}[1+\varphi_N^2(u)]^k\{|u|^{p_0}+F(x)\}\,dx. \tag{24}$$

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ *удовлетворяет неравенству* (24). *Существует положительное число* ν*, зависящее только от* $t,\ p_0,\ q,\ m$*, такое, что при* $k>0$ *справедливо неравенство*

$$I_N(k)\le C(1+k)^{\nu}[I_N(\theta k)]^{1/\theta}, \tag{25}$$

где $I_N(k)=\int_{\Omega}[1+\varphi_N^2(u)]^k\{|u|^{p_0}+F(x)\}\,dx,\quad \theta=\max\left\{\dfrac{q}{p_0},\ \dfrac{t}{t-1}\cdot\dfrac{n-q}{n}\right\}.$

Доказательство. Для оценки $I_N(k)$ воспользуемся неравенством Гельдера и теорией вложения. Получим

$$I_N(k)\le\int_{\Omega}|[1+\varphi_N^2(u)]^{k/p_0}u|^{p_0}\,dx+\left\{\int_{\Omega}[F(x)]^t\,dx\right\}^{1/t}\times$$

$$\times\left\{\int_{\Omega}[1+\varphi_N^2(u)]^{kt'}\,dx\right\}^{1/t'}\le C\sum_{|\alpha|=1}\left\{\int_{\Omega}|D^{\alpha}([1+\varphi_N^2(u)]^{k/p_0}u)|^q\,dx\right\}^{p_0/q}+$$

$$+C\sum_{|\alpha|=1}\left\{\int_{\Omega}|D^{\alpha}[1+\varphi_N^2(u)]^{kt'/\rho}|^q\,dx\right\}^{\rho/t'q},$$

где $t'=\dfrac{t}{t-1},\ \rho=\dfrac{nq}{n-q}$. Простые вычисления показывают, что отсюда следует

$$I_N(k)\le C(1+k)^{\rho_1}\sum_{|\alpha|=1}\left\{\int_{\Omega}[1+\varphi_N^2(u)]^{k\theta}|D^{\alpha}u|^q\,dx\right\}^{1/\theta} \tag{26}$$

с $\rho_1=\max\{p_0,\ \rho/t'\}$ и положительной постоянной θ, определенной выше при формулировке леммы 3. Теперь оценка (25) – простое следствие неравенств (26), (24).

Закончим доказательство леммы 1. Замечая, что $p_0<nq/(n-q)$, $0<\theta<1$ и постоянные C,ν в (25) не зависят от N, устанавливаем из неравенства (25) сходимость при всех $k\ge 0$ интегралов

$$I(k)=\int_{\Omega}[1+u^2]^k\{|u|^{p_0}+F(x)\}\,dx$$

и оценку

$$I(k)\le C(1+k)^{\nu}[I(\theta k)]^{1/\theta}. \tag{27}$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 5 главы 1 книги [6], показывают, что из неравенства (27) следует существование постоянной M, зависящей только от известных параметров, входящих в условия (3)–(6), и Ω, такой, что при всех $i=1,2,\ldots$ выполнено неравенство

$$\left\{I\left(\frac{\rho-p_0}{t'\cdot\theta^i}\right)\right\}^{\theta^i}\le M\ I\left(\frac{\rho-p_0}{t'}\right),\quad \rho=\frac{nq}{n-q}.$$

Последнее неравенство обеспечивает ограниченность $u(x)$ и требуемую оценку для $\operatorname{vrai}\max_{x\in\Omega}|u(x)|$. Доказательство леммы 1 закончено.

Получение в Ω' оценки максимума модуля решения уравнения (1), не удовлетворяющего нулевым условиям Дирихле, проводится аналогично доказательству леммы 1, только в интегральное тождество (7) нужно подставить функцию

$$v(x)=[1+\varphi_N^2(u)]^k u\,\chi^s(x),\quad k\ge 0,\quad 2m\le s\le C_0 k,$$

где $\varphi_N(t)$ та же функция, что и выше, $\chi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi(x)$ равна единице в Ω', C_0 – некоторая абсолютная постоянная. Повторением с небольшими изменениями рассуждений этого параграфа доказывается

Лемма 4. *Пусть* $u(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ *– обобщенное решение уравнения* (1), $p\ge 2,\ q>mp$, *и предположим, что выполнены условия* (3)–(6). *Тогда для произвольной строго внутренней подобласти* Ω' *области* Ω $\operatorname{vrai}\max_{x\in\Omega'}|u(x)|$ *оценивается постоянной* M'*, зависящей от тех же параметров, что и константа* C' *в теореме* 2.

§ 4. Гельдеровость обобщенного решения во внутренних подобластях

В настоящем параграфе будет доказана теорема 2. Пусть Ω' – произвольная строго внутренняя подобласть области Ω. Из леммы 4 следует, что с некоторой постоянной M' выполнено неравенство $\operatorname{vrai}\max_{x\in\overline{\Omega}'}|u(x)|\le M'$.

Введем при $x_0\in\Omega'$, $R<d'/4$ обозначения

$$\omega_1(R)=\operatorname{vrai}\min_{x\in B_R(x_0)}u(x),\quad \omega_2(R)=\operatorname{vrai}\max_{x\in B_R(x_0)}u(x),\quad \omega(R)=\omega_2(R)-\omega_1(R),$$

где $B_R(x_0)$ – шар радиуса R с центром в точке x_0.

Будет доказано, что с некоторой положительной постоянной $\theta_1<1$, зависящей лишь от известных параметров и не зависящей от R, выполнено неравенство

$$\omega(R)\le\theta_1\omega(2R)+R^r. \tag{28}$$

Здесь и дальше r – положительное число, удовлетворяющее при $|\gamma|\le m,\ |\beta|\ge 2,\ 1\le|\alpha|<|\beta|$ условиям

$$|\gamma|p_\gamma+r(q-p_\gamma)\le q,\quad r<1-\frac{n}{qt},\quad r<\frac{q-mp}{q-p},$$

$$r\left\{q+\left(\frac{|\beta|}{|\alpha|}-1\right)\left(1-\frac{p_{\beta\gamma}}{p_\gamma}-\frac{|\beta|}{|\alpha|\,p_\alpha}\right)^{-1}\right\}\le q. \tag{29}$$

В силу леммы 4.8 главы 2 монографии [3] из неравенства (28) следует теорема 2.

Определим при $0<R<d'/4$ множества

$$G_1(R) = \left\{ x \in B_R(x_0) : u(x) \le \frac{\omega_1(R) + \omega_2(R)}{2} \right\}, \quad G_2(R) = B_R(x_0) \setminus G_1(R).$$

По крайней мере верно одно из неравенств

$$\text{mes}\, G_1(2R) \ge \frac{1}{2}\, \text{mes} B_{2R}(x_0), \quad \text{mes}\, G_2(2R) \ge \frac{1}{2}\, \text{mes} B_{2R}(x_0). \tag{30}$$

Дальше для определенности будем считать, что при некотором R выполнено первое из неравенств (30). Легко видеть, что неравенство (28), а значит, и теорема 2 следуют из леммы.

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2 *и первое из неравенств* (30). *Тогда для функции*

$$v_0(x) = 1 + \ln \frac{2\omega}{\omega_2 - u(x) + R^r}, \quad \omega = \omega(2R), \quad \omega_2 = \omega_2(2R) \tag{31}$$

выполнена оценка $\operatorname*{vrai\,max}_{x \in B_{2R}(x_0)} |v_0(x)| \le Z'$ *с постоянной* Z', *зависящей лишь от тех же параметров, что и константа* C' *в теореме* 2.

Замечание 6. Если выполнено второе из неравенств (30), то справедливо утверждение леммы 5 с заменой функции $v_0(x)$ на функцию

$$\tilde{v}_0(x) = 1 + \ln \frac{2\omega}{u(x) - \omega_1 + R^r}, \quad \omega_1 = \omega_1(2R).$$

Можем считать при доказательстве леммы 5, что $\omega(R) > R^r$ и, следовательно, $v_0(x) \ge 1$, в противном случае неравенство (28) выполнено. Подставим в интегральное тождество (7) функцию

$$v(x) = \frac{1}{(\omega_2 - u + R^r)^{q-1}}\ [v_0(x)]^k\ \psi^s(x), \tag{32}$$

где $k \ge 0,\ 2m \le s \le C_0(k+1),\ C_0$ - абсолютная константа, $\psi(x) = \psi_0\left(\frac{x - x_0}{R}\right),\ \psi_0(y)$ – фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|y| \le 1$ и нулю при $|y| \ge 2$. Оценивая возникающие при этом интегралы, получаем

$$\int_\Omega \frac{1}{(\omega_2 - u + R^r)^q} [v_0(x)]^k \left\{ \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q \right\} \psi^s(x)\, dx \le$$

$$\le C'(k+1) \int_\Omega [v_0(x)]^k \frac{1}{(\omega_2 - u + R^r)^q} \left\{ \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^{p_\alpha} + |f(x)| \right\} dx +$$

$$+ C'(k+1)^m \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega [v_0(x)]^k \frac{1}{(\omega_2 - u + R^r)^{q-1}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{R^{|\alpha|}} + \sum_{1 \le |\beta| < |\alpha|} \left(\frac{|D^\beta u|}{\omega_2 - u + R^r} \right)^{\frac{|\alpha|}{|\beta|}} \right\} \left\{ \sum_{1 \le |\gamma| \le m} |D^\gamma u|^{p_{\alpha\gamma}} + |f_\alpha(x)| \right\} \psi^{s-m}(x)\, dx. \tag{33}$$

Оценим дальше члены правой части по неравенству Юнга. Имеем при любом $\varepsilon > 0$ с некоторыми $\nu_1 > 0,\ m_1 > 0$ и определенной зависящей от ε постоянной C_ε

$$\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^{q-1}}\left\{\sum_{1\le|\gamma|\le m}|D^\gamma u|^{p_{\alpha\gamma}}+|f_\alpha(x)|\right\}\frac{\psi^{s-m}(x)}{R^{|\alpha|}}\le$$

$$\le C_\varepsilon(1+k)^{\nu_1}\frac{\psi^{s-m_1}(x)}{R^q}+\varepsilon\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}\left\{\sum_{1\le|\gamma|\le m}|D^\gamma u|^{p_\gamma}+|f_\alpha(x)|^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha-1}}\right\}\psi^s(x)\,dx, \qquad (34)$$

если $s>m_1$. Также по неравенству Юнга, возможность применения которого следует из (14), имеем с некоторыми $\nu_2>0,\ \ m_2>0$ при $s\ge m_2$

$$\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^{q-1}}\left\{\sum_{1\le|\gamma|\le m}|D^\gamma u|^{p_{\alpha\gamma}}+|f_\alpha(x)|\right\}\times$$

$$\times\sum_{1\le|\beta|<|\alpha|}\left(\frac{|D^\beta u|}{\omega_2-u+R^r}\right)^{\frac{|\alpha|}{|\beta|}}\psi^{s-m}(x)\le C_\varepsilon(1+k)^{\nu_2}\frac{\psi^{s-m_2}(x)}{R^q}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{(\omega_2-u+R^r)^q}\left\{\sum_{1\le|\gamma|\le m}|D^\gamma u|^{p_\gamma}+|f_\alpha(x)|^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha-1}}\right\}\psi^s(x). \qquad (35)$$

Из неравенств (33), (34), (35) получаем

$$\int_\Omega[v_0(x)]^k\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}\psi^s(x)\,dx\le$$

$$\le C'(1+k)^{\nu_3}\int_\Omega[v_0(x)]^k\left\{\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}\left[\sum_{2\le|\beta|\le m-1}|D^\beta u|^{p_\beta}+F(x)\right]+\frac{1}{R^q}\right\}\psi^{s-m_3}(x)\,dx, \qquad (36)$$

где функция $F(x)$ такая же, как в (15), $\nu_3,\ m_3$ – положительные постоянные, зависящие лишь от известных параметров, входящих в (3)–(6), $s\ge m_3$.

При дальнейших оценках правой части (36) используется

Лемма 6. *Существуют постоянные* $\bar\nu,\mu,\bar m$, *зависящие лишь от* ν_3,m_3,p_α, *такие, что при* $2\le j\le m-1$, $k>0$, $\bar m\le s\le C_0(k+1)$, $0<\delta<1$ *выполнено неравенство*

$$(1+k)^{\nu_3}\int_\Omega[v_0(x)]^k\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}\sum_{|\alpha|=j}|D^\alpha u|^{p_\alpha}\psi^{s-m_3}(x)\,dx\le$$

$$\le C'(1+k)^{\bar\nu}\,\delta^{-\mu}\int_\Omega[v_0(x)]^k\frac{\psi^{s-\bar m}(x)}{R^q}\,dx+\delta\int_\Omega[v_0(x)]^k\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}\times$$

$$\times\left\{\sum_{|\alpha|=j+1}|D^\alpha u|^{p_\alpha}+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}\psi^s(x)\,dx. \qquad (37)$$

Доказательство. Пусть $2\le|\alpha|\le m-1$. Представляя, как и в (17), $\alpha=\beta+\gamma,\ |\gamma|=1$, интегрируя по частям и оценивая, получаем

$$\int_\Omega[v_0(x)]^k\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}|D^\alpha u|^{p_\alpha}\psi^{s-m_3}(x)\,dx\le$$

$$\le C'(1+k)\int_\Omega[v_0(x)]^k\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}\Big\{\ |D^\gamma u|\cdot|D^\alpha u|^{p_\alpha-1}|D^\beta u|\times$$

$$\times \frac{\psi^{s-m_3}(x)}{\omega_2 - u + R^r} + |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2} |D^{\alpha+\gamma} u| \cdot |D^\beta u| \psi^{s-m_3}(x) +$$

$$+ |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1} |D^\beta u| \left. \frac{\psi^{s-m_3-1}(x)}{R} \right\} dx. \tag{38}$$

Как и при доказательстве леммы 2, слагаемые в фигурной скобке оцениваются по неравенству Юнга. В частности, ко второму слагаемому применяются оценки (19), (21). Оценка первого слагаемого проводится аналогично (18) с использованием неравенств (20). Проверяется вначале неравенство (37) при $j = 2$, а затем доказывается по индукции для $2 \le j \le m-1$.

Суммируя неравенство (37) по j и применяя получаемую оценку к правой части (36), имеем с некоторыми $\bar{\nu}$, $\bar{m}$

$$\int_\Omega [v_0(x)]^k \frac{1}{(\omega_2 - u + R^r)^q} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q \right\} \psi^s(x)\, dx \le$$

$$\le C' (k+1)^{\bar{\nu}} \int_\Omega [v_0(x)]^k \left\{ \frac{1}{(\omega_2 - u + R^r)^q} F(x) + \frac{1}{R^q} \right\} \psi^{s-\bar{m}}(x)\, dx \le$$

$$\le C' \frac{(k+1)^{\bar{\nu}}}{R^{q-\frac{n}{t}}} \left\{ \int_\Omega [v_0^k(x) \cdot \psi^{s-\bar{m}}(x)]^{\frac{t}{t-1}} dx \right\}^{\frac{t-1}{t}}. \tag{39}$$

Лемма 7. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2, $u(x) \in W_p^m(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$ *– обобщенное решение уравнения* (1), *Существуют положительные числа* $\tilde{\nu}$, $\tilde{m}$, *зависящие только от параметров из условий* (3)–(6), *такие, что при* $k > 0$, $\tilde{m} \le s \le C_0(k+1)$ *справедливо неравенство*

$$J(k,s) \le C'(k+1)^{\tilde{\nu}} [J(k\theta, s\theta - \tilde{m})]^{1/\theta}, \tag{40}$$

где

$$J(k,s) = \frac{1}{R^n} \int_\Omega [v_0(x)]^k \psi^s(x)\, dx, \quad \theta = \frac{t}{t-1} \cdot \frac{n-q}{n}.$$

Доказательство. Из вложения $W_q^1(\Omega) \to L_{\frac{nq}{n-q}}(\Omega)$ имеем

$$J(k,s) \le \frac{C'}{R^n} \left\{ (k+1)^q \int_\Omega [v_0(x)]^{k\frac{n-q}{n}} [\psi(x)]^{s\frac{n-q}{n} - q} \left[\frac{1}{(\omega_2 - u + R^r)^q} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \frac{1}{R^q} \right] dx \right\}^{\frac{n}{n-q}}.$$

Оценка (40) следует теперь из (39) и неравенства Гельдера.

Обозначим при $i = 0, 1, 2, \ldots$ $k_i = q\theta^{-i}$, $s_i = \frac{\tilde{m}}{1-\theta} [\theta^{-i} - 1]$, $J_i = K(k_i, s_i)$. Из неравенства (40) получаем

$$J_i \le [C' q^{\tilde{\nu}}]^{\theta^{1-i} \frac{1-\theta^i}{1-\theta}} \theta^{\tilde{\nu}\theta^{1-i} \frac{1}{(1-\theta)^2} \{i\theta^{i+1} - (i+1)\theta^i + 1\}} J_0^{\theta - i}$$

и, следовательно, при всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\{J_i\}^{\frac{1}{k_i}} \le C' J_0^{\frac{1}{q}}. \tag{41}$$

Из неравенства (41) следует, что для доказательства леммы 5 достаточно проверить, что J_0 оценивается постоянной, зависящей лишь от известных параметров. Используя первое неравенство (30), аналогично лемме 4 гл. 1 [6] проверяется, что с некоторой абсолютной постоянной C_1 выполнена оценка

$$J_0 \le \frac{1}{R^n}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} [v_0(x)]^q \, dx \le C_1\left\{1+\frac{1}{R^{n-1}}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} [v_0(x)]^{q-1}\frac{1}{\omega_2-u+R^r}\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u(x)|\,dx\right\}\le$$

$$\le C_1\left\{1+\frac{\varepsilon}{R^n}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} [v_0(x)]^q \, dx+\frac{C_\varepsilon}{R^{n-q}}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\frac{1}{(\omega_2-u+R^r)^q}\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u(x)|^q \, dx\right\}. \tag{42}$$

Ограниченность последнего интеграла следует из неравенства (39) при $k=0$, если вместо $\psi(x)$ взять функцию $\overline{\psi}(x)=\psi_0\left(\dfrac{x-x_0}{2R}\right)$, где ψ_0 была определена в начале параграфа.

Неравенство (42) обеспечивает ограниченность J_0. Из сказанного выше следует, что лемма 5 и теорема 2 доказаны.

§ 5. Гельдеровость решения задачи Дирихле вблизи границы

В этом параграфе будет завершено доказательство теоремы 1. Пусть P_0 – произвольная точка, принадлежащая $\partial\Omega$, и будем считать, что $(x_1, \ldots, x_n)$ – локальная система координат в точке P_0. Это означает, что координаты точки P_0 нулевые и множества $B_1(P_0)\cap\overline{\Omega}$, $B_1(P_0)\cap\partial\Omega$ описываются соответственно соотношениями $\{x_n \ge 0,\ |x|\le 1\}$, $\{x_n = 0,\ |x|\le 1\}$. Заметим, что условия (3)–(6) сохраняют свой вид при переходе к локальной системе координат.

Определим в $B_1(0)$ функцию $\hat{u}(x)$ равенством

$$\hat{u}(x)=\begin{cases} u(x), & \text{если } x_n \ge 0,\\ -u(x',-x_n), & \text{если } x_n<0,\ x'=(x_1,\ldots,x_{n-1}).\end{cases}$$

Из включения $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega)$ следует, что функция $\hat{u}(x)$ принадлежит $W_p^m(B_1(0))\cap W_q^1(B_1(0))$. Обозначим

$$\hat{\omega}_1(R)=\operatorname*{vrai\,min}_{x\in B_R(0)}\hat{u}(x),\quad \hat{\omega}_2(R)=\operatorname*{vrai\,max}_{x\in B_R(0)}\hat{u}(x),\quad \hat{\omega}(R)=\hat{\omega}_2(R)-\hat{\omega}_1(R),$$

$$\hat{G}_1(R)=\left\{x\in B_R(0):\hat{u}(x)\le\frac{\hat{\omega}_1(R)+\hat{\omega}_2(R)}{2}\right\},\quad \hat{G}_2(R)=B_R(x_0)\setminus\hat{G}_1(R)$$

и определим при $x\in B_{2R}(0)$ функции

$$\hat{W}_k(x)=\frac{1}{(\hat{\omega}_2-\hat{\Omega}(x)+R^r)^{q-1}}[v_0(x)]^k,$$

$$\hat{v}_0(x) = 1 + \ln \frac{2\hat{\omega}}{\hat{\omega}_2 - \hat{\Omega}(x) + R^r}, \quad \hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_1(2R), \quad \hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_2(2R),$$

где $k \geq 0,\ r$ определяется теми же неравенствами, что и в предыдущем параграфе,

$$\hat{\Omega}(x) = \begin{cases} \hat{u}(x), & \text{если } \operatorname{mes} \hat{G}_2(2R) \geq \frac{1}{2} \operatorname{mes} B_{2R}(0), \\ \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_1 - \hat{u}(x), & \text{если } \operatorname{mes} \hat{G}_2(2R) \geq \frac{1}{2} \operatorname{mes} B_{2R}(0). \end{cases}$$

Пусть $\psi_0(y)$ – фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|y| \leq 1$, нулю при $|y| \geq 2$, и такая, что $0 \leq \psi_0(y) \leq 1$,

$$\psi_0(y', y_n) = \psi_0(y', -y_n), \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^k \psi_0(y)|_{y_n=0} = 0, \quad 0 < k \leq m.$$

Подставим в интегральное тождество (7) функцию $v(x)$, равную нулю вне $B_{2R}^+ = B_{2R}(0) \cap \Omega$ и определяемую при $x \in B_{2R}^+$ равенством

$$v(x) = [\hat{W}_k(x) - \hat{W}_k(x', -x_n)]\psi^s(x).$$

Здесь $\psi(x) = \psi_0\left(\frac{x}{R}\right), \quad s \geq \overline{m},\ \overline{m}$ – постоянная из (39). Имеем

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left\{ \int_{B_{2R}^+} A_\alpha(x, u, \dots, D^m u)\, D^\alpha [\hat{W}_k(x) \cdot \psi^s(x)]\, dx - \right.$$

$$\left. - \int_{B_{2R}^+} A_\alpha(x, u, \dots, D^m u)\, D^\alpha [\hat{W}_k(x', -x_n) \psi^s(x)]\, dx \right\} = 0 \tag{43}$$

и сделаем во втором интеграле замену $x_i = y_i$ при $i = 1, \dots, n-1,\ x_n = -y_n$. Получим

$$- \int_{B_{2R}^+} A_\alpha(x, u, \dots, D^m u)\, D^\alpha [\hat{W}_k(x', -x_n) \cdot \psi^s(x)]\, dx =$$

$$= \int_{B_{2R}^-} \widetilde{A}_\alpha(y, \hat{u}, \dots, D_y^m \hat{u}(y))\, D_y^\alpha [\hat{W}_k(y) \cdot \psi^s(y)]\, dy, \tag{44}$$

где $B_{2R}^- = B_{2R}(0) \setminus B_{2R}^+$, $\widetilde{A}_\alpha(y, \xi) = (-1)^{\alpha_n + 1} A_\alpha(y', -y_n, \xi^*)$ и для $\xi = \{\xi_y : |\gamma| \leq m\}$ $\xi^* = \{(-1)^{\gamma_n + 1} \xi_\gamma : |\gamma| \leq m\}$.

Из (43), (44) имеем

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{B_{2R}(0)} a_\alpha(x, \hat{u}, \dots, D^m \hat{u})\, D^\alpha \{\hat{W}_k(x) \cdot \psi^s(x)\}\, dx = 0,$$

где

$$a_\alpha(x, \xi) = \begin{cases} A_\alpha(x, \xi) & \text{при } x_n \geq 0, \\ \widetilde{A}_\alpha(x, \xi) & \text{при } x_n < 0. \end{cases}$$

Функции $a_\alpha(x, \xi)$ удовлетворяют всем тем же условиям, что и $A_\alpha(x, \xi)$, и тогда дословным повторением доказательства предыдущего параграфа устанавливается оценка

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{B_{2R}(0)} [\hat{v}_0(x)]^k \frac{1}{(\hat{\omega}_2 - \hat{\Omega}(x) + R^r)^q} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \hat{u}|^p \; p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha \hat{u}|^q \right\} \psi^s(x)\, dx \le \\
&\le C(k+1)^{\overline{\nu}} \int\limits_{B_{2R}(0)} [v_0(x)]^k \left\{ \frac{1}{(\hat{\omega}_2 - \hat{\Omega}(x) + R^r)^q} \hat{F}(x) + \frac{1}{R^q} \right\} \psi^{s-\overline{m}}(x)\, dx,
\end{aligned} \tag{45}
$$

где $\overline{\nu}$, $\overline{m}$ те же постоянные, что и в (39), функция $\hat{F}(x)$ равна $F(x)$ при $x_n \ge 0$ и $F(x',-x_n)$ при $x_n < 0$.

Из неравенства (45) точно так же, как в § 4, следует ограниченность функции $\hat{v}_0(x)$ в $B_R(0)$ и гельдеровость $u(x)$ в $\overline{\Omega}$.

1. *Мазья В.Г.* Функциональный анализ, **2**, вып. 3, 1968.
2. *Giusti E., Miranda M.* Boll. Unione Mat. Haliana, ser. IV, № 2, 1968.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.
4. *Freehse J.* Boll. Unione Mat. Haliana, ser. IV, № 3, 1970.
5. *Скрыпник И.В.* Квазилинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Донецк. Изд-во Донецк. гос. ун-та, 1971.
6. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев, «Наукова думка», 1973.
7. *Widman K.* Manuscripta mathematica, v. 5, № 4, 1971.
8. *Солонников В.А.* Зап. науч. семинаров Ленинград. отд. Матем. ин-та АН СССР, **39**, 1974.
9. *Тодоров Т.Г.* Вестник Ленинград. ун-та, № 19, 1974.
10. *Nirenberg I.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, ser. III, 13 1959.
11. *Moser J.* Comm. Pure and Appl. Math, **13**, № 3, 1960.

ГЕЛЬДЕРОВОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

*(Доклады Академии наук. – 1993. – **329**, № 6)*

Контрпримеры, известные для квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка [1, 2], показывают, что параболические уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x,t,u,\dots,D^m u) = 0 \qquad (1)$$

при $m>1$ могут иметь неограниченные обобщенные решения (например, стационарные), даже если $A_\alpha(x,t,\xi)$ – аналитические функции своих аргументов, удовлетворяющие естественным условиям роста при $|\xi|\to\infty$. Здесь $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$,

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \quad D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}.$$

В данной работе впервые выделяется класс квазилинейных параболических уравнений высшего порядка, все обобщенные решения которых удовлетворяют условиям Гельдера. Соответствующий эллиптический аналог данного класса уравнений введен автором в [3]. Ограниченность обобщенных решений для рассматриваемых в настоящей работе уравнений доказана в [4]. Отметим, что построенные в работе [3] контрпримеры показывают существенность накладываемых ниже условий.

В работе устанавливается принадлежность ограниченных решений уравнений (1) при определенных условиях классу $B_{q,s}(Q_T, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa)$ и гельдеровость функций из этого класса. Вводимый класс функций обобщает классы функций, соответствующие значениям $q=2, s=1$ в монографии О.А. Ладыженской , В.А. Солонникова, Н.Н. Уральцевой [5] и значению $s=1$, определенному Ди Бенедетто [6].

В работе установлена внутренняя гельдеровость решений, хотя соответствующий результат можно доказать и вплоть до границы при выполнении граничных условий Дирихле или Неймана.

1. Далее Ω – ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $R^n, n\ge 1$. Предполагаем, что при $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T), \xi=\{\xi_\gamma : |\gamma|\le m\}\in R^N$ определены функции $A_\alpha(x,t,\xi), |\alpha|\le m$, измеримые по (x,t) при всех $\xi\in R^N$ и непрерывные по ξ при почти всех $(x,t)\in Q_T$. Здесь N – число различных мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ таких, что $|\alpha|\le m$. Пусть $m\ge 2$ и с некоторыми положительными постоянными C', C'' при $p\ge 2, q>mp$, $(x,t)\in Q_T$, $\xi\in R^N$ выполнены неравенства

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m} A_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \ge C'\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p + C'\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q - C''\sum_{2\le|\alpha|\le m-1}|\xi_\alpha|^{p_\alpha} - f(x,t), \tag{2}$$

$$|A_\alpha(x,t,\xi)| \le C''\sum_{1\le|\beta|\le m}|\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}} + f_\alpha(x,t),\ \ |\alpha|\le m. \tag{3}$$

Можно вместо постоянных C', C'' в неравенствах (2), (3), допускать функции от ξ_0, но ограничимся сформулированными условиями, так как дальше речь будет идти о свойствах фиксированного ограниченного решения.

В (2), (3) числа $p_\alpha, p_{\alpha\beta}$ определяются условиями

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{|\alpha|-1}{m-1}\frac{1}{p} + \frac{m-|\alpha|}{m-1}\frac{1}{q_1} \text{ при } 1<|\alpha|\le m, \tag{4}$$

$$p_\alpha = q \text{ при } |\alpha|=1,\ \ p_{\alpha\beta} = p_\beta(1-1/p_\alpha)$$

и число q_1 удовлетворяет неравенству $mp < q_1 < q$.

В (2), (3) функции $f(x,t),\ f_\alpha(x,t)$ таковы, что имеет место включение

$$|f(x,t)| + \sum_{|\alpha|\le m}|f_\alpha(x,t)|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)} \in L_{\rho_0,r_0}(Q_T), \tag{5}$$

где $\rho_0, r_0 \ge 1$ и удовлетворяют условию

$$\frac{1}{r_0} + \frac{n}{q\rho_0} = 1-\kappa_1,$$

$$\kappa_1 \in \begin{cases} \left(0,\dfrac{q-1}{q}\right), & \text{если } n=1,\\ (0,1), & \text{если } n>1,\\ \left(\dfrac{q-n}{q},1\right), & \text{если } 1<n<q. \end{cases}$$

При этих условиях будет устанавливаться гельдеровость обобщенного решения уравнения (1). Под таким решением понимаем функцию

$$u(x,t) \in V^{m,1}_{2,p,q}(Q_T) = C(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_p(0,T;W^m_p(\Omega)) \cap L_p(0,T;W^1_p(\Omega)),$$

удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega u(x,\tau)\varphi(x,\tau)dx\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left\{ -u(x,\tau)\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial\tau} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x,\tau,u(x,\tau),\dots,D^m u(x,\tau)) \times D^\alpha\varphi(x,\tau) \right\} dxd\tau = 0 \tag{7}$$

для всех таких $\varphi(x,\tau) \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_p(Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_q(Q_T)$, что

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} \in L_2(Q_T)$$

и для всех $t_1, t_2,\ 0<t_1<t_2<T$.

Будем предполагать ограниченность решения $u(x,t)$, т.е. с некоторой постоянной M выполнено неравенство

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u(x,t)|:(x,t)\in Q_T\}\le M. \tag{8}$$

В этих условиях доказывается

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t)\in V^{m,1}_{2,p,q}(Q_T)$ *– обобщенное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее неравенству* (8), *и предположим, что функции* $A_\alpha(x,t,\xi)$ *удовлетворяют условиям* (2)–(6). *Тогда решение* $u(x,t)$ *локально гельдерово в* Q_T *и для каждого цилиндра* $Q_R(x_0,t_0)=B(x_0,R)\times(t_0-R^q,t_0)$ *таково, что* $\overline{Q_R(x_0,t_0)}\subset Q_T$ *существуют постоянная* A, *зависящая только от* M, *постоянных в условиях* (2)–(6) *и расстояния от* $Q_R(x_0,t_0)$ *до* $\Gamma_T=\partial\Omega\times(0,T)\cup\Omega\times\{0\}$, *и постоянная* $\alpha\in(0,1)$, *зависящая только от* M *и постоянных в условиях* (2)–(6), *такие, что выполнено неравенство*

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):(x,t)\in Q_R(x_0,t_0)\}\le AR^{\alpha}. \tag{9}$$

2. Утверждение теоремы будет следовать из принадлежности решения некоторому специальному классу функций $B_{q,s}(Q_T,M,\gamma,r,\delta,b,\kappa)$.

Будем говорить, что измеримая функция $u(x,t),\,(x,t)\in Q_T$ принадлежит классу $B_{q,s}(Q_T,M,\gamma,r,\delta,b,\kappa)$, если

$$u(x,t)\in V_{2,q}(Q_T)=C(0,T;L_2(\Omega))\cap L_q(0,T;W^1_q(\Omega)),$$

$$\operatorname{ess\,sup}\{u(x,t):(x,t)\in Q_T\}\le M$$

и для произвольных точек $(x_0,t_0)\in Q_T$ и положительных чисел R,θ, таких, что

$$Q(R,\theta)\equiv Q(x_0,t_0;R,\theta)=B(x_0,R)\times(t_0-\theta,t_0)\subset\overline{Q(R,\theta)}\subset Q_T,$$

и произвольной бесконечно дифференцируемой неубывающей на R^1 функции $\eta(t)$ справедливы неравенства

$$\sup_{t_0-\theta\le t\le t_0}\int\limits_{B(x_0,R-\sigma R)}(u(x,t)-k)_\pm^{s+1}\eta^q(t)dx+$$

$$+\int\limits_{t_0-\theta}^{t_0}\int\limits_{B(x_0,R-\sigma R)}(u(x,\tau)-k)_\pm^{s-1}\left|\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right|^q\eta^q(\tau)dxd\tau\le$$

$$\le\int\limits_{B(x_0,R)}(u-k)_\pm^{s+1}\eta^q(t)dx\Big|_{t=t_0-\theta}+\left\{\gamma\left(\frac{1}{\sigma R}\right)^q\iint\limits_{Q[R\theta]}(u-k)_\pm^{s+q-1}\eta^q(\tau)dxd\tau+\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{Q(R\theta)}(u-k)_\pm^{s+1}\eta^q(\tau)\frac{d\eta(\tau)}{d\tau}dxd\tau+\left[\int\limits_{t_0-\theta}^{t_0}[\operatorname{mes}A^{\pm}_{k,R}(\tau)]^{r/\rho}d\tau\right]^{q(1+\kappa)/r}\right\}, \tag{10}$$

$$\sup_{t_0-\theta\le t\le t_0}\int\limits_{B(x_0,R-\sigma R)}\left[\ln\frac{H^\pm}{H^\pm\mp(u(x,t)-k)+\nu}\right]_+^{s+1}dx\le$$

$$\le\int\limits_{B(x_0,R)}\left[\ln\frac{H^\pm}{H^\pm\mp(u(x,t_0-\theta)-k)+\nu}\right]_+^{s+1}dx+$$

$$+\gamma\left(\frac{1}{(\sigma R)^q}\iint\limits_{Q(R\theta)}\left[\ln\frac{H^{\pm}}{H^{\pm}\mp(u-k)+\nu}\right]_+^s\times\right.$$

$$\times[H^{\pm}\mp(u-k)+\nu]^{q-2}dxd\tau+\frac{1}{\nu^b}\left[1+\left(\ln\frac{H^{\pm}}{\nu}\right)^s\right]\times$$

$$\left.\times\left\{\int\limits_{t_0-\theta}^{t_0}[mesA_{k,R}^{\pm}(\tau)]^{r/\rho}d\tau\right\}^{q(1+\kappa)/r}\right). \qquad (11)$$

Здесь $s,\gamma,r,\rho,\delta,b,\kappa,\sigma$ – заданные положительные числа, подчиняющиеся только ограничениям:

$$\kappa,\sigma\in(0,1),\ b\le s,\ r,\rho>1,$$

$$\frac{1}{r}+\frac{n}{\rho q}=\frac{n}{q^2}$$

и возможные значения r,ρ ограничиваются условиями

$$\rho\in\begin{cases}(q,\infty],\ r\in[q^2,\infty)\ \text{при}\ n=1,\\ \left[q,\dfrac{nq}{n-q}\right],\ r\in[q,\infty)\ \text{при}\ n>q>1,\\ [q,\infty),\ r\in\left(\dfrac{q^2}{N},\infty\right]\ \text{при}\ 1<n\le q.\end{cases}$$

В (10), (11) также использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered}(u(x,t)-k)_{\pm}=\max\{\pm(u(x,t)-k),0\},\\ A_{k,R}^{\pm}(\tau)=\{x\in B(x_0,R):\pm(u(x,t)-k)>0\}\end{gathered} \qquad (12)$$

и аналогично (12) понимается $\left[\ln\dfrac{H^{\pm}}{H^{\pm}\mp(u-k)+\nu}\right]_+$. В (10), (11) k – произвольное вещественное число, подчиняющееся условию

$$\operatorname{ess\,sup}\{(u(x,t)-k)_{\pm}:(x,t)\in Q(R,\theta)\}\le\delta,$$

и $H^{\pm},\nu$ – такие положительные числа, что

$$\begin{gathered}\operatorname{ess\,sup}\{(u(x,t)-k)_{\pm}:(x,t)\in Q(R,\theta)\}\le H^{\pm}\le\delta,\\ \nu\le\min\{H^{\pm},1\}.\end{gathered}$$

Основную роль при доказательстве теоремы 1 играет

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t)$ *– произвольная функция из класса* $B_{q,s}(Q_T,M,\gamma,r,\delta,b,\kappa),\ q\ge2$. *Тогда для каждого цилиндра* $Q_R(x_0,t_0)=B(x_0.R)\times(t_0-R_0t_0)$ *такого, что* $\overline{Q_R(x_0,t_0)}\subset Q_T$, *выполнено неравенство*

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):(x,t)\in Q_R(x_0,t_0)\le AR^{\alpha},$$

с положительными постоянными A,α, *зависящими только от* $q,s,M,\gamma,r,\delta,b,\kappa$, *и, кроме того,* A *зависит еще от расстояния* $Q_R(x_0,t_0)$ *до* Γ_T.

3. Возможность применения теоремы 2 при доказательстве теоремы 1 обеспечивает

Теорема 3. *Каждое обобщенное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее неравенству* (8), *принадлежит классу* $B_{q,s}(Q_T, M, \gamma, r, \delta, b, \kappa)$ *с постоянными* $s, \gamma, r, \delta, b, \kappa$*, зависящими только от параметров в условиях* (2)–(6).

1. *Мазья В.Г.* // Функционал. анализ. 1968. Т. 2. В. 3. С. 53–57.
2. *Giusti E., Miranda M.* // Boll. Uniune Math. Italiana. Ser. 4. 1963. V. 1, N. 2. P. 219–226.
3. *Скрыпник И.В.* // Дифференц. уравнения. 1978, Т. 14. № 6. С. 1104–1119.
4. *Данилюк Г.И.* Математическая физика. Сб. науч. Тр. Киев, 1975, № 17. С. 96–99.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
6. *Di Benedetto* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Ser. 4. 1986. V. 13. N. 3. P. 487–535.

REGULARITY OF SOLUTIONS OF HIGHER ORDER NONLINEAR ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS

*(Nonlinear Analysis. – 1997. – **30**, № 11)*

1. Introduction

The problem of the regularity of solutions of nonlinear elliptic equations stems from the nineteenth problem of Hilbert who asked whether all solutions of a regular variational problem are necessarily analytic functions. The complete answers on the problem of regularity for quasilinear elliptic and parabolic second order equations and a survey of the literature of second order nonlinear equations can be found in monographs of O.A. Ladyzhenskaya and N.N. Ural'tseva [1, 2]. At the end of the sixties examples were constructed (E. De Giorgi, E. Giusti and M. Miranda, V.G. Maz'ya) for higher order elliptic equations of divergent type showing that properties of solutions of these equations are principally different from properties of solutions of second order equations. This, the equation

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}(x,u,...,D^{m}u)=0 \tag{1.1}$$

under corresponding ellipticity condition and growth of coefficients A_{α} may have nonsmooth generalized solutions even for analytic functions A_{α}. A survey of results about regularity of solutions of the equation (1.1) (examples of irregular solutions, results of C.B. Morrey, E. Giusti, M. Giaquinta and G. Modica about partial regularity of generalized solutions, results of J. Neĉas and the author about full regularity of solutions in plane domain, results of J. Frehse, K.O. Widman, the author and V.A. Solonnikov on the boundedness and the continuity of generalized solutions under condition on dimension of domain, results of A.I. Koshelev and S.I. Chelkak on regularity of solutions under conditions of Cordes's type) can be found in monograph of the author [3].

This paper is devoted to study of regularity of solutions for the equation (1.1) or corresponding parabolic equations under more strong as usually ellipticity or parabolicity conditions. Principal distinguish of these equations is some regularity of solutions without restriction on dimension of domain. This paper is organized as follows. In Section 2 we formulate main assumptions on nonlinear elliptic equations, results about boundedness and Holderity of solutions and we give counterexample showing that our assumptions are necessary. In Section 3 we formulate result on regularity of a boundary point for considered elliptic higher order equation. In Section 4 we formulate Harnack inequality for positive solution of the same equations. Point wise estimates for a potential function corresponding to higher order capacity and same applications are discussed in Section 5. In particular, we formulate exact condition for removable singularity at point for nonlinear elliptic higher order equations. In Section 6 we consider Holderity of solutions of nonlinear parabolic equations.

2. High-order nonlinear elliptic equations with continuous generalized solutions

Let Ω be a bounded open set in n-dimensional Euclidean space R^n with a boundary $\partial\Omega$. We will study the regularity of solutions of the equation (1.1) where $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega,\ \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ is a vector with nonnegative integer – valued components $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$, $D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $D^m u=\{D^\alpha u:|\alpha|=m\}$. In the investigation of the boundedness and the continuity of solutions of the equation (1.1) it is assumed usually (see [3]) the ellipticity condition in the form

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge C_1\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p - C_2\sum_{|\beta|<m}|\xi_\beta|^{p_\beta} - f(x) \tag{2.1}$$

for $\xi_\alpha\in R^1,\ \xi=\{\xi_\alpha:|\alpha|\le m\}$ where $C_1>0, p_\beta$ and $f(x)$ satisfy certain conditions. J. Frehse proved in [4] that any solution $u(x)\in W_p^m(\Omega)$ of (1.1) with $n=mp$ is bounded, the author had proved in [5] that every generalized solution is continuous under the same condition. Hölderity of solutions is followed from papers of K.O. Widman [76] and N. Meyers and A. Elcrat [7] if the difference $n-mp$ is sufficiently small.

We will assume that the functions $a_\alpha(x,\xi),\ |\alpha|\le m$ are defined for $x\in\Omega,\ \xi=\{\xi_\alpha:|\alpha|\le m\},\ \xi_\alpha\in R^1$ and they are continuous functions with respect to ξ for almost every $x\in\Omega$ and they are measurable functions with respect to x for all ξ.

In the paper [8] the author described a class of equations (1) all of whose generalized solutions satisfy Hölder's condition without any assumption concerning the relation between m,n and p. This equations class is characterized by the fact that the condition (2.1) is replaced by a condition

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge C_1\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p + C_1\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q - C_2\sum_{|\alpha|\ne 1,m}|\xi_\alpha|^{p_\alpha} - f(x) \tag{2.2}$$

where C_1,C_2 are positive constants, $p\ge 2, x\in\overline{\Omega}, \xi_\alpha\in R^1$. Numbers p_α are determined by the conditions

$$\frac{1}{p_\alpha}=\frac{|\alpha|-1}{m-1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{m-|\alpha|}{m-1}\cdot\frac{1}{q_1} \text{ for } 1<|\alpha|<m, \tag{2.3}$$

p_0 and q_1 satisfy inequalities

$$q<p_0<\frac{nq}{n-q},\ mp<q_1<q<n. \tag{2.4}$$

We assume also the growth condition for $A_\alpha(x,\xi)$:

$$|A_\alpha(x,\xi)|\le C_2\sum_{|\beta|\le m}|\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}} + f_\alpha(x),\ |\alpha|\le m. \tag{2.5}$$

Here $p_{\alpha\beta}$ is determined by the equality

$$p_{\alpha\beta} = p_\beta\left(1-\frac{1}{p_\alpha}\right) \text{ for } |\alpha|,|\beta| \le m \tag{2.6}$$

and we understand in this equality

$$p_\alpha = q \text{ for } |\alpha| = 1, \quad p_\alpha = p \text{ for } |\alpha| = m. \tag{2.7}$$

Functions $f(x)$ and $f_\alpha(x)$ in (2.2), (2.5) are in the spaces $L_t(\Omega)$ and $L_{t_\alpha}(\Omega)$, respectively where

$$t > \frac{n}{q},\ t_\alpha > \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1}\cdot\frac{n}{q} \text{ for } |\alpha| \le m. \tag{2.8}$$

Since we wish to study the boundedness and the Hölder property of a generalized solution we naturally assume that $n > mp$ because for $n < mp$ a solution has the Hölder property by virtue of embedding theorems in Sobolev spaces and, for $n = mp$, it is known that a solution is continuous [5–7]. For this reason we assume that $q < n$. For $q = n$ we must make slight changes in our assumptions.

Under conditions (2.2)–(2.8) we can define a generalized solution of the equation (1.1) in $W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$. Namely, a function $u(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ is understood to be a generalized solution of (1.1) if for an arbitrary function $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ it is valid integral identity

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega A_\alpha(x,u(x),\ldots,D^m u(x))D^\alpha v(x)dx = 0. \tag{2.9}$$

Since $u(x)$ is in $W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ we have the inclusion $D^\alpha u(x)\in L_{p_\alpha}(\Omega)$ by virtue of the Nirenberg-Gagliardo interpolation inequality [9]; hence, conditions, (2.2)–(2.8) ensure the existence of the integral in (2.9) if $u(x),v(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$.

Theorem 2.1. *Assume that conditions* (2.2)–(2.8) *are fulfilled. Let* $u(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ *be a generalized solution of the equation (1.1). Then for an arbitrary subdomain* Ω' *such that* $\overline{\Omega'}\subset\Omega$ $u(x)\in C^{0,\lambda}(\Omega')$ *with some* $\lambda>0$ *and* $\|u\|_{C^{0,\lambda}(\Omega)}$ *is bounded by a constant* C' *depending on* Ω, $\|u\|_{L_{p0}(\Omega)}$, *the known parameters and the distance from* Ω' *to the boundary of* Ω.

Theorem 2.2. *Assume that conditions* (2.2)–(2.8) *are fulfilled and* $\partial\Omega$ *belongs to the class* C^m. *Let* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ *be a generalized solution of the equation (1.1). Then for some* $\lambda_0>0$ $u(x)\in C^{0,\lambda_0}(\overline{\Omega})$ *and* $\|u\|_{C^{0,\lambda_0}(\overline{\Omega})}$ *is bounded by a constant* C *depending only on* Ω, $\|u\|_{L_{p0}(\Omega)}$ *and known parameters.*

We understand in Theorems 2.1, 2.2 constants $C_1, C_2, p, p_0, q, q_1, m, n, \|f\|_{L_{t_1}(\Omega)}, \|f_\alpha\|_{L_{t_\alpha}(\Omega)}$ as known parameters. Theorems 2.1, 2.2 were proved in [8]. Here we give example showing that principal our assumption $q < mp$ is necessary. Let B be the unit ball with center at the origin and assume that $n > 4$. Straightforward calculations show that $u_0(x) = \ln|x|$ satisfies the equation

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{x_k x_l}{|x|^2}+\sigma_1\delta_k^l\right)\left(\frac{x_i x_j}{|x|^2}+\sigma_1\delta_i^j\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\right\}-$$

$$-2\sigma_3\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]=0 \tag{2.10}$$

if the constants σ_1, σ_2 and σ_3 satisfy the relation

$$2\sigma_2(n-2)+2\sigma_3 = [(n-2)\sigma_1 - 1][n-3-2\sigma_1]. \tag{2.11}$$

It may by verified that $u(x) \in W_2^2(B) \cap W_2^1(B)$ and is a generalized solution on the equation (2.10). Conditions of type (2.2), (2.5)–(2.7) for the equation (2.10) are satisfied with $p = 2$ and $q = 4$ if σ_2 and σ_3 are positive constants. It can be verified that σ_1 and sufficiently small σ_2 and σ_3 can be chosen so that (2.10) will be satisfied. Therefore this example shows that the condition $q > mp$ cannot be weakened in Theorems 2.1, 2.2.

There is the example of the equation of type (1) with infinitely differentiable functions $A_\alpha(x,\xi)$ having unbounded generalized solutions by conditions (2.2), (2.5) if the inequality $q > mp$ is violated. To show this it is sufficient to replace expressions of the form $\frac{x_k x_l}{|x|^2}$ in (2.10) by $\frac{\partial u}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_l}\cdot f^{-2}(|\nabla u|)$ where $f(t)$ is a nondecreasing positive infinitely differentiable function equal to t for $t \geq 1$ and equal to $\frac{1}{2}$ for $t \leq \frac{1}{2}$.

3. Regularity of a boundary point

In this Section we formulate a sufficient condition for the regularity of a boundary point for the equation (1.1). Beginning with Wiener's fundamental results, conditions on the boundary of a domain ensuring continuity of a solution at a boundary point have been known for linear and nonlinear second order elliptic equations. For the equation of type (1.1) with $m = 1$ a sufficient condition for regularity of a boundary point was obtained under special conditions on the functions A_α by Mazya and under general conditions by Gariepy and Ziemer [10]. Here analogous result is given for the equation (1.1) with $m > 1$ under conditions of preceding Section.

Let x_0 be an arbitrary point belonging to $\partial\Omega$. We define the regularity of a boundary point in a local version. We denote by $B(x_0,R)$ the ball of radius R with center at x_0 and we set $\Omega_R = \Omega \cap B(x_0,R)$.

Definition 3.1. *A point* $x_0 \in \partial\Omega$ *is called a regular boundary point of the domain* Ω *for the equation* (1.1) *if, for any* $R > 0$ *and any generalized solution* $u(x) \in W_p^m(\Omega_R) \cap W_q^1(\Omega_R)$ *of the equation* (1.1) *in domain* Ω_R *and satisfying the condition*

$$\varphi_R(x)[u(x) - f(x)] \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega_R) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega_R) \tag{3.1}$$

with a function $f(x) \in W_{p'}^m(\Omega_R) \cap W_{q'}^1(\Omega_R)$ *for* $p' = \dfrac{n}{m}$ *and* $q' > n$ *and an unfinitely differentiable function* $\varphi_R(x)$ *equal to one in* $B\left(x_0, \dfrac{R}{2}\right)$ *and to zero outside* $B(x_0, R)$, *there the equality*

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in \Omega_R} u(x) = f(x_0) \tag{3.2}$$

is valid.

To formulate a condition for the regularity of a boundary point we recall the notion of the q-capacity C_q. We denote by $\boldsymbol{M}(E)$ the set of functions of the space $C_0^\infty(R^n)$ satisfying the condition $\varphi(x) = 1$ for $x \in E$.

Definition 3.2. *The* q*-capacity of compact set* E, *denote by* $C_q(E)$, *is the number*

$$C_q(E) = \inf_{\varphi \in \boldsymbol{M}(E)} \int_{R^n} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^q dx \,. \tag{3.3}$$

Theorem 3.1. *Assume that conditions of Section* 2 *for functions* $A_\alpha(x, \xi)$ *are satisfied. In order that a point* $x_0 \in \partial\Omega$ *be a regular boundary point of the domain* Ω *for the equation* (1.1) *it is sufficient that*

$$\int_0^1 \left\{ C_q\left(\overline{B(x_0, t) \setminus \Omega}\right) \cdot t^{q-n} \right\}^{\frac{1}{q-1}} \frac{dt}{t} = \infty. \tag{3.4}$$

This result was published in the paper [11] and it coincides with result of the paper [10] for $m = 1$. From the equality (3.4) it is followed for example the regularity of the point $x_0 \in \partial\Omega$ which satisfies following condition: there exists a cone K with the top in the point x_0 such that $\overline{\Omega} \cap K = \{x_0\}$. Remark that even for a linear equation of fourth order a conical point may be nonregular for large dimension of the domain – see the paper of V.G. Mazya and S.A. Nazarov [12]. This bespeaks the necessity of additional structural conditions in studying of Wiener regularity of a boundary points in the case of equations of higher order.

In monograph [3] the author studied a necessary condition of regularity of a boundary point for second order nonlinear elliptic equations. It is possible to obtain such type results also for the higher order equations of type (1.1) under preceding conditions. Principal role belongs to point wise estimates for capacity potential which were proved in [3] for second order equation. Such type estimate for the equation (1.1) is contained in Section 5.

4. Harnack inequality for nonlinear elliptic higher order equations

Different applications of Harnack inequality for second order nonlinear elliptic equations are well known [13]. Here we formulate analog of Harnack inequality for higher order equation (1.1).

We consider a solution $u(x)$ of the equation (1.1) under conditions of Section 2. From Theorem 2.2 it is followed that for any subset Ω' of Ω such that $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ it is valid the inequality

$$\max\{|u(x)| : x \in \overline{\Omega'}\} \le M' \tag{4.1}$$

with some constant M' depending only on Ω, norm of $u(x)$ in $L_{p_0}(\Omega)$, known parameters and the distance from Ω' to $\partial\Omega$. The symbol max in (4.1) and further of course stands for essential supremum.

We define numbers d, δ by equalities

$$d = \frac{(m-1)pq_1}{q_1 - mp}, \quad \delta = \min\left\{\frac{q}{q+d}, \frac{q-q_1}{q-p}\right\} \tag{4.2}$$

and introduce a function

$$k(x_0, R) = R^{\delta} + \left\{ R^{\frac{p_\alpha - 1}{p_\alpha}\frac{q}{n} - \frac{1}{t_\alpha}} \sum_{1 \le |\alpha| \le m} \| f_\alpha(x) \|_{L_{t_\alpha}(B(x_0, 3R))} + R^{(q - \frac{n}{t})(1-\delta)} \| f_0(x) \|_{L_t(B(x_0, 3R))} \right\}^{\frac{1}{q}} \tag{4.3}$$

for $x_0 \in \Omega,\ R \in (0,1)$ such that $B(x_0, 3R) \subset \Omega$.

Theorem 4.1. *Assume that conditions of Section* 2 *for coefficients* $A_\alpha(x,\xi)$ *are fulfilled. Let* $u(x) \in W_m^1(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$ *be a non-negative solution of the equation* (1.1) *in the ball* $B(x_0, 3R) \subset \Omega$ *for some* $R \in (0,1)$. *Then the inequality*

$$\max_{x \in B(x_0, R)} u(x) \le H\left\{ \min_{x \in B(x_0, R)} u(x) + k(x_0, R) \right\} \tag{4.4}$$

holds with constant H *depending only on* $n, m, p, q, q_1, p_0, C_1, C_2$ *and with* $k(x_0, R)$ *defined by* (4.3).

The Harnack inequality (4.4) can be extended without difficulty for arbitrary subdomain D of domain Ω. In particular, the following result holds.

Theorem 4.2. *Assume that conditions of Section* 2 *for coefficients* $A_\alpha(x,\xi)$ *are satisfied and* $u(x) \in W_m^1(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$ *is a non-negative solution of the equation* (1.1) *in a connected open subset* D *of domain* Ω. *Then for any open subset* D' *of* Ω *such that* $\overline{D'} \subset D$ *the inequality*

$$\max_{x \in \overline{D'}} u(x) \le H'\left\{ \min_{x \in \overline{D'}} u(x) + k(D) \right\} \tag{4.5}$$

holds with constant H' *depending only on sets* $D, D', n, m, p, q, q_1, p_0, C_1, C_2$ *and with* $k(D)$ *defined by the equality.*

$$k(D)=1+\left\{\sum_{|\alpha|\le m}\| f_\alpha(x)\|_{L_{q_\alpha}(D)}+\| f(x)\|_{L_t(D)}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

In standard way [13] it is possible to obtain that from Harnack inequality (4.4) it is followed local Hölder continuity of an arbitrary bounded solution of the equation (1.1).

Also in standard way [14] it is possible to study the behavior of solutions of equation (1.1) at infinity.

By using the Harnack inequality it is possible to study the behavior of solutions of the equations (1.1) near the singular point. This study is based on the point wise estimates of singular solutions analogous to the estimates of next Section. For second order equations results of such type are contained in [13].

5. Point Wise estimates for potential for higher order capacity

Point wise estimates of solutions of model boundary value problems for nonlinear second order equations play an important role by study many problems [3]: asymptotic behavior of sequence of solutions in perforated domains, necessary condition of regularity of a boundary point, removable singularity of solutions. In this Section we formulate results about analogous estimates for the model equation of type (1.1).

Let F be a closed subset of domain Ω and assume that for some point x_0 and numbers r,R includings

$$F\subset B(x_0,r)\subset B(x_0,1)\subset B(x_0,2)\subset\Omega\subset B(x_0,R) \tag{5.1}$$

holds.

We assume that functions $A_\alpha(x,\xi),\ 1\le|\alpha|\le m$ are defined for $x\in\Omega,\ \xi=\{\xi_\alpha:|\alpha|\le m\},\ \xi_\alpha\in R^1$ and satisfy next conditions:

A$_1$) functions $A_\alpha(x,\xi)$ are continuous functions with respect to ξ for almost every $x\in\Omega$ and they are measurable functions of x for all ξ;

A$_2$) there exists positive numbers C_1,C_2 such that for all values of x,ξ the inequalities

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m}A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha\ge C_1\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p+C_1\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q, \tag{5.2}$$

$$|A_\alpha(x,\xi)|\le C_2\left\{\sum_{|\beta|\le m}|\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}}+1\right\} \tag{5.3}$$

holds with $p,q,p_{\alpha\beta}$ satisfying conditions (2.3), (2.4), (2.6), (2.7).

Let $\psi(x)$ be a fixed function of class $C_0^\infty(\Omega)$ which is equal to one for $x\in B(x_0,1)$ and to zero for $x\notin B(x_0,2)$. We introduce a solution of model boundary value problem

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,u,\dots,D^m u)=0,\ x\in D=\Omega\setminus F \tag{5.4}$$

$$u(x)-k\psi(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p}(D)\cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{q}(D) \tag{5.5}$$

where k is an arbitrary real number.

It is simple to prove the existence of the solution of the boundary value problem (5.4), (5.5) by using theory of monotone operators if conditions A_1, A_2 are satisfied. We extend the solution $u(x)$ of problem (5.4), (5.5) on Ω by equality $u(x)=k$ for $x\in F$. We evaluate $u(x)$ in term of some capacity of set F which is connected with considered of equations.

We define capacity $C^{m,1}_{p,q}(F)$ of set F by the equality

$$C^{m,1}_{p,q}(F)=\inf\int_{R^n}\{|D^m\varphi(x)|^p+|D^1\varphi(x)|^q\}dx \tag{5.6}$$

where infimum is taken over all functions $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^n)$ which are equal to one on F.

Main estimate of solution $u(x)$ is given in next Theorem which is proved in [15],

Theorem 5.1. *Assume that conditions* A_1, A_2 (5.1) *are satisfied and* $u(x)$ *is the solution of the boundary value problem* (5.4), (5,5). *Then exist positive constants* K,a,δ_1,δ_2 *depending only on* n,m,p,q,q_1,C_1,C_2,R *such that the inequality*

$$\begin{aligned}&\operatorname{ess\,sup}\{|u(x)|:x\in D\setminus B(x_0,\rho)\}\le\\ &\le K(1+|k|)^a\left\{\left[\frac{C^{m,1}_{p,q}(F)}{\rho^{n-q}}\right]^{\frac{1}{q-1}}+\left[\frac{C^{m,1}_{p,q}(F)}{\rho^{n-q}}\right]^{\delta_1}\rho^{\delta_2}\right\}\end{aligned} \tag{5.7}$$

holds for $2r\le\rho\le R$.

As model equation for considered class of equations can be the equation

$$p\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha(|D^m u(x)|^{p-2}D^\alpha u)+(-1)^{m-1}q\sum_{|\alpha|=1}D^\alpha(|D^1u|^{q-2}D^\alpha u)=0.$$

In this case from the estimate (5.7) it is followed a point wise estimate for potential function corresponding to capacity $C^{m,1}_{p,q}(F)$.

By using of the estimate of type (5.7) it is possible to obtain necessary condition of regularity of a boundary point for the equation (1.1). Also it is possible to study removable singularity of solutions. We formulate only one possible application.

Theorem 5.2. *Assume that functions* $A_\alpha(x,\xi)$ *satisfy conditions of Section* 2 *and* $B(x_0,2R)\subset\Omega$ *for some* $x_0\in\Omega,\ R\in R^1$. *Let* $u(x)\in W^m_{p,\mathrm{loc}}(B')\cap W^1_{q,\mathrm{loc}}(B')$ *be a solution of the equation* (1.1) *in* $B'=B(x_0,2R)\setminus\{x_0\}$ *such that*

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}M(\rho)\rho^{\frac{n-q}{q-1}}=0 \tag{5.8}$$

where

$$M(\rho)=\max\{|u(x)|:\rho\le|x-x_0|\le R\}.$$

Then the singularity of $u(x)$ in x_0 is removable and $u(x)$ is the solution of the equation (1.1) in $B(x_0, 2R)$.

6. Hölder continuity of solutions of nonlinear parabolic higher order equations

Let Ω be a bounded open set in n-dimensional Euclidean space R^n, $n \geq 1$. We will consider the regularity of solutions of the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x,t,u,\ldots,D^m u) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{6.1}$$

We suppose that $A_\alpha(x,t,\xi)$ are defined for $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\xi = \{\xi_\alpha : |\alpha| \leq m\}$, $\xi_\alpha \in R^1$ and they are satisfied for all values of arguments next conditions:

1) $A_\alpha(x,t,\xi)$ are measurable functions with respect to x,t for all ξ and they are continuous functions with respect to ξ for almost all values of x,t;

2) the inequalities

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} A_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \geq C_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p + C_1 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q - C_2 \sum_{|\alpha| \neq 1,m} |\xi_\alpha|^{p_\alpha} - f(x,t), \tag{6.2}$$

$$|A_\alpha(x,t,\xi)| \leq C_2 \sum_{|\beta| \leq m} |\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}} + f_\alpha(x,t),\ |\alpha| \leq m \tag{6.3}$$

are valid with positive constants C_1, C_2, $p \geq 2$ and $p_{\alpha\beta}$ satisfying conditions (2.6); p_α is defined by (2.3), (2.7) if $|\alpha| > 0, q < p_0 < \frac{n+q}{n} q$ and q, q_1 satisfy inequality $mp < q_1 < q$.

The functions $f(x,t), f_\alpha(x,t)$ in (6.2), (6.3) satisfy the condition

$$F(x,t) = |f(x,t)| + \sum_{|\alpha| \leq m} |f_\alpha(x,t)|^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1}} \in L_{\rho_0, r_0}(Q_T) \tag{6.4}$$

where $\rho_0 \geq 1, r_0 \geq 1$ and

$$\frac{1}{r_0} + \frac{n}{q\rho_0} = 1 - k_1 \tag{6.5}$$

where $k_1 \in \left(0, \frac{q-1}{q}\right)$ if $n = 1$, $k_1 \in (0,1)$ if $n > 1$, $q \leq n$ and $k_1 \in \left(\frac{q-n}{q}, 1\right)$ if $1 < n \leq q$.

A function

$$u(x,t) \in V^{m,1}_{2,p,q}(Q_T) = C(0,T; L_2(\Omega)) \cap L_p(0,T; W^m_p(\Omega)) \cap L_q(0,T; W^1_q(\Omega))$$

is a solution of the equation (6.1) if it satisfies the integral inequality

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)dx\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \left\{ -u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + \right. \\ &\left. + \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x,t,u(x,t),\ldots,D^m u(x,t)) \right\} dxdt = 0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

for all $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{m,1}_{2,p,q}(Q_T)$ such that $\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ and for all $t_1, t_2 \in (0,T)$. Here $\overset{\circ}{V}{}^{m,1}_{2,p,q}(Q_T) = C(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{m}_{p}(\Omega)) \cap L_q(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{1}_{q}(\Omega))$.

By using of the Mosers method it is possible to prove local boundedness of the solution $u(x,t)$ or the boundedness of the solution of initial boundary value problem for the equation (6.1). For simplicity we will suppose that the estimate

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u(x,t)| : (x,t) \in Q_T\} \le M \tag{6.7}$$

is valid for some constant M.

Theorem 6.1. *Let* $u(x,t) \in V^{m,1}_{2,p,q}(Q_T)$ *be a generalized solution of the equation* (6.1) *satisfying the estimate* (6.7) *and let* $A_\alpha(x,t,\xi)$ *satisfy the conditions* 1), 2). *Then* $u(x,t)$ *is locally Hölder continuous in* Q_T *and for each cylinder* $Q_R(x_0,t_0) = B(x_0,R) \times (t_0 - R^q, t_0)$ *such that* $\overline{Q_R(x_0,t_0)} \subset Q_T$ *there exists constants* A *and* $\alpha \in (0,1)$ *such that*

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t) : (x,t) \in Q_R(x_0,t_0)\} \le AR^\alpha. \tag{6.8}$$

The constant α depends only on M, $\|F(x,t)\|_{L_{\rho_0,r_0}}(Q_T)$ and on constants in conditions (6.2)–(6.5); the constant A depends only on the same parameters and on the distance from $Q_R(x_0,t_0)$ to $\Gamma_T = \{\partial\Omega \times (0,T)\} \cup \{\Omega \times (0)\}$.

We formulate also result about smoothness of the solution of the equation (6.1) satisfying initial and Dirichlet boundary conditions

$$u(x,t) - g(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{m,1}_{2,p,q}(Q_T) \tag{6.8}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \tag{6.9}$$

where $g(x,t)$ is a function belonging to the space $V^{m,1}_{2,p,q}(Q_T)$ such that

$$G(x,t) = \left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right| + \sum_{|\alpha| \le m} |A_\alpha(x, g(x,t), \dots, D^m g(x,t)|^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1}} \in L_{\rho_0,r_0}(Q_T) \tag{6.10}$$

with the same ρ_0, r_0 as in (6.4).

The boundary $\partial\Omega$ is assumed to satisfy the condition

A) there exist numbers $\delta_0 \in (0,1)$, $R_0 > 0$ such that for every point $x_0 \in \partial\Omega$ and every ball $B(x_0,R)$ centered at x_0 with radius $R \le R_0$ the inequality

$$\operatorname{meas}(\Omega \cap B(x_0,R)) \le (1-\delta_0)\operatorname{meas}B(x_0,R)$$

holds.

Theorem 6.2. *Let* $u(x,t) \in V^{m,1}_{2,p,q}(Q_T)$ *be a generalized solution of the problem* (6.1), (6.8), (6.9) *and assume that conditions* 1), 2), A), (6.10) *and the inequality* (6.7) *are satisfied. Let* $u_0(x)$ *be*

Hölder continuous on $\overline{\Omega}$, $g(x,t)$ *be Hölder continuous on* $\partial\Omega\times[0,T]$ *and* $u_0(x)=g(x,0)$ *for* $x\in\partial\Omega$. *Then* $u(x,t)$ *is Hölder continuous on* $\overline{Q}_T$.

Theorem 6.1, 6.2 were proved in papers [16, 17].

1. *Ladyzhenskaya O.A. and Ural'tseva N.N.* Linear and quasi- linear elliptic equations. 2nded., Nauka, Moscow, 1973.
2. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type, Trans. Math. Monographs, 23, Amer, Math. Soc., Providence, R.I., **23**, 1968.
3. *Skrypnik I.V.* Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems, Trans. Math. Monographs, 139, Amer, Math. Soc., Providence, R.I., **139**, 1994.
4. *Frehse J.* On the boundedness of weal solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **3**, no. 4, 607–627 (1970).
5. *Skrypnik I.V.* Nonlinear higher order elliptic equations, Naukova Dumka, Kiev, 1973.
6. *Widman K.O.* Hölder continuity of solutions of elliptic systems, Manuscripta Math, **5**, 299–309 (1971).
7. *Meyers N.G. and Elcrat* A. Some results on regularity for solutions of non-linear elliptic systems and quasi-regular functions, Duke Math. J. **42**, 121–136 (1975).
8. *Skrypnik I.V.* On quasilinear elliptic equations of higher order with continuous generalized solutions, Diffenertsial'nye Uravneniya **14**, no. 6, 1104–1119 (1978).
9. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equation, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. 3, **13**, 115–162 (1959).
10. *Gariepy R. and Ziemer W.P.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations, Arch. Rational Mech. Anal. **67**, 25–39 (1977).
11. *Skrypnik I.V.* A condition for regularity of a boundary point for higher order quasilinear elliptic equation, Soviet. Math. Dokl. **44**, no. 2, 562–566 (1992).
12. *Maz'ya V.G., Nazarov S.A.* A top of cone can be nonregular by Wiener for fourth order elliptic equation, Math. Zametki **39**, no. 1, 24–28 (1986).
13. *Serrin G.* Local behavior of solutions of quasi-linear elliptic equations, Acta Math. **111**, 247–302 (1964).
14. *Moser J.* On Harnack's Theorem for Elliptic Differential Equations, Comm. Pour Appl. Math. **14**, 577–591 (1961).
15. *Skrypnik I.V.* Point wise estimates for potential for higher order capacity, Preprint SISSA, Trieste, 1996.
16. *Skrypnik I.V.* On higher order quasilinear parabolic equations with Hölder continuous solutions, Diffenertsial'nye Uravneniya **29**, no. 3, 501–514 (1993).

17. *Nicolosi F. and Skrypnik I.V.* On the behavior near boundary of solutions of nonlinear parabolic higher order equations, Nonlinear Analysis, TMA, (1996).

РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*(Доклады Академии наук СССР. – 1984. - **274**)*

В заметке устанавливается необходимое условие регулярности граничной точки для дивергентного квазилинейного эллиптического уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Критерий регулярности граничной точки для уравнения Лапласа найден Винером [1, 2]. В дальнейшем многими авторами (см. [3] и списки литературы в [4, 5]) доказано, что условие Винера является также необходимым и достаточным условием регулярности граничной точки для широких классов линейных эллиптических уравнений второго порядка. В частности, в [5] это утверждение доказано для дивергентных уравнений с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Для квазилинейных уравнений известны только достаточные условия, полученные для некоторых модельных уравнений в [6] и для общих уравнений вида (1) в [7].

Если $W_m^1(\Omega)$ – энергетическое пространство для уравнения (1), то устанавливаемые в работе необходимые условия регулярности граничной точки совпадают при $1 < m \le 2$ с достаточными условиями работы [7], и, тем самым, мы получаем в этом случае критерий регулярности граничной точки, совпадающий при $m = 2$ с критерием Винера. Из результатов работы следует также новое доказательство приведенного в [7] условия регулярности граничной точки для дивергентных линейных уравнений с разрывными коэффициентами.

1. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в R^n. Везде дальше функции $a_i(x,u,p)$, $i = 0,1,...,n$, предполагаются определенными при $x \in \Omega,\ u \in R^1,\ p \in R^n$ и удовлетворяющими условиям:

а) для почти всех $x \in \Omega$ функции $a_i(x,u,p)$ непрерывны по u, p и для всех $u \in R^1, p \in R^n$ $a_i(x,u,p)$ – измеримые функции x;

$$a_i(x,0,0) = 0; \tag{2}$$

б) с положительными постоянными ν, μ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,u,p)-a_i(x,v,q)](p_i-q_i) \geq \nu|p-q|^m - \mu|u-v|^m, \tag{3}$$
$$|a_i(x,u,p)-a_i(x,v,q)| \leq \mu\{|p-q|^{m-1}+|u-v|^{m-1}\},$$

если $1<m\leq 2$, и

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,u,p)-a_i(x,v,q)](p_i-q_i) \geq$$
$$\geq \nu(1+|p|+|q|)^{m-2}|p-q|^2 - \mu w|u-v|^2, \tag{4}$$
$$|a_i(x,u,p)-a_i(x,v,q)| \leq \mu w\{|p-q|+|u-v|\},$$

если $2<m<n$. Здесь $w=\{1+|u|+|v|+|p|+|q|\}^{m-2},\ x\in\Omega,\ u,v\in R^1,\ p,q\in R^n$.

При выполнении этих условий для любой функции $f(x)\in W_m^1(\Omega)$ и подобласти $\Omega'\subset\Omega$ достаточно малой меры существует обобщенное решение $u(x)\in W_m^1(\Omega')$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x)-f(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega')$ (см. [8]). Разрешимость же задачи Дирихле в Ω условия а), б), вообще говоря, не обеспечивают. В связи с этим более целесообразно формулировать определение регулярности граничной точки в локальном варианте.

Заметим также, что сформулированные условия на функции $a_i(x,u,p)$ не обеспечивают выполнение принципа максимума для уравнения (1). Это существенно отличает данную работу от других (см. [1–5]), в которых доказательство опиралось на принцип максимума.

Пусть x_0 – произвольная точка в $\partial\Omega$ – границе области Ω. Обозначим через $B(x_0,R)$ шар радиуса R с центром в x_0, и пусть $\Omega_R=\Omega\cap B(x_0,R)$, $\varphi_R(x)$ – неотрицательная функция класса $C_0^\infty(B(x_0,R))$, равная единице в $B(x_0,R/2)$.

Определение. Будем говорить, что x_0 – регулярная граничная точка области Ω для уравнения (1), если существует $R>0$ такое, что для всякого определенного в Ω_R обобщенного решения $u(x)\in W_m^1(\Omega_R)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\varphi_R(x)[u(x)-f(x)]\in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega_R) \tag{5}$$

с функцией $f(x)\in C(\overline{\Omega}_R)\cap W_m^1(\Omega_R)$, выполнено равенство

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in\Omega_R} u(x)=f(x_0). \tag{6}$$

Для формулировки условий регулярности введем еще понятие m-емкости C_m (см. [5] при $m=2$ и [6] в случае произвольного m). Определим ее для произвольного множества $E\subset B(x_0,1/2)$ равенством

$$C_m(E)=\inf_{\varphi}\int_{B(x_0,1)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^m dx, \tag{7}$$

где нижняя грань берется по функциям $\varphi\in C_0^\infty(B(x_0,1))$, равным единице на E.

Теорема 1. *Пусть* $1 < m \le 2$. *Для того чтобы точка* $x_0 \in \partial\Omega$ *была регулярной точкой области* Ω *для уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^{0,5} \{C_m(B(x_0,t)\setminus\Omega)\cdot t^{m-n}\}^{1/(m-1)} \frac{dt}{t} = \infty. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть* $2 < m < n$. *Для того чтобы точка* x_0 *была регулярной точкой области* Ω *для уравнения* (1), *необходимо, чтобы при* $\varepsilon = (m-2)n/m$ *выполнялось равенство*

$$\int_0^{0,5} \{C_m(B(x_0,t)\setminus\Omega)\cdot t^{m-n}\}^{1/(m-1+\varepsilon)} \frac{dt}{t} = \infty. \tag{9}$$

Замечание. Достаточность условия (8) для регулярности граничной точки доказана при $m > 1$ в работе Гарипи и Цимера [7].

Отметим, что при $m = 2$ условие (8) эквивалентно критерию Винера и поэтому из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 3. *Для того чтобы точка* $x_0 \in \partial\Omega$ *была регулярной точкой области* Ω *для уравнения* (1) *при* $m = 2$, *необходимо и достаточно, чтобы эта точка была регулярной точкой области* Ω *для уравнения Лапласа.*

2. Укажем основные моменты доказательства необходимости условия (8) для того, чтобы точка x_0 была регулярной. В случае $m > 2$ доказательство технически усложняется.

Отметим вначале, что равенство (8) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{2^{k(n-m)}\cdot C_m(E_k)\}^{1/(m-1)} = \infty, \quad E_k = B(x_0, 2^{-k})\setminus\Omega. \tag{10}$$

Определим для множества $E \subset B(x_0, R/2)$ функцию $u(x,E)$ как решение уравнения (1) в $B(x_0,R)\setminus E$, удовлетворяющее условию

$$u(x,E) - \varphi_R(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(B(x_0,R)\setminus E), \tag{11}$$

где $\varphi_R(x)$ –та же функция, что и в (5). Число R выбирается достаточно малым, в частности таким, чтобы обеспечивалось существование функции $u(x,E)$. Выбор числа R зависит только от m, n, ν, μ.

Основой доказательства является получение оценок функций $u_k(x) = u(x,E_k)$ при $k > k_0 = 1 - \log_2 R$.

Лемма 1. *Последовательность функций* $u_k(x)$ *равномерно ограничена и удовлетворяет неравенствам*

$$M_k = \max\{|u_k(x)| : 4\cdot 2^{-k} \le |x-x_0| \le R\} \le C_1\{[2^{k(n-m)}\cdot C_m(E_k)]^{1/(m-1)} + 2^{-k}\}, \tag{12}$$

$$\min\{|u_k(x)| : |x-x_0| \le 2^{-k}\} \le C_2\{2^{k(n-m)}\cdot C_m(E_k) + 2^{-km}\}^{1/m} \tag{13}$$

с постоянными C_1, C_2, *зависящими лишь от* m, n, μ, ν.

Неравенство (13) просто следует из определения m-емкости. Доказательство неравенства (12) основывается на развитом в [9] методе оценки емкостных потенциалов.

Лемма 2. *Пусть* $\delta_k(x) = u_k(x) - u_{k+1}(x)$. *Существует постоянная* C_3, *зависящая лишь от* m, n, μ, ν, *такая, что при* $k > k_0$ *выполнена оценка*

$$\max\{|\delta_k(x)| : |x - x_0| \le 2^{-(k+4)}\} \le C_3\{[2^{k(n-m)} \cdot C_m(E_k) + 2^{-km}]^{1/(m-1)} + 2^{-k}\}. \tag{14}$$

Доказательство неравенства (14) распадается на несколько этапов. Вначале методом Мозера устанавливается оценка

$$\mu_{j+1}^m = \max\{|\delta_k(x)| : x \in B(x_0, \rho_{j+1})\}^m \le C \cdot 2^{(k+j)n} \int\limits_{B(x_0,\rho_j)} |\delta_k(x)|^m \, dx, \tag{15}$$

где $\rho_j = 2^{-(k+4)(1+2^{-j})}$.

Для дальнейшей оценки введем $v_k(x) = u(x, F_k)$, где $F_k = E_k \setminus B(x_0, 2^{-(k+1)})$, и функции $\psi_k(x) \in C_0^\infty(B(x_0, R))$, подчиненные условиям:

$$\left|\frac{\partial \psi_k}{\partial x}\right| \le C_0 \cdot 2^k,$$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in B(x_0, 2^{-(k-1)}) \setminus B(x_0, 2^{-(k+2)}), \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} B(x_0, 2^{-(k-2)}) \setminus B(x_0, 2^{-(k+3)}). \end{cases}$$

Здесь $u(x, E)$ – определенное условием (11) решение уравнения (1). Пусть еще $[\delta_k(x)]_{\mu_j} = \min\{\max[\delta_k(x), -\mu_j], \mu_j\}$ и для произвольной функции $f(x)$ обозначим $f^\pm(x) = ½\{f(x) \pm |f(x)|\}$.

Используя аналог леммы Пуанкаре, можно оценить интеграл в правой части неравенства (15)

$$\int\limits_{B(x_0,\rho_j)} |\delta_k(x)|^m \, dx \le C \cdot 2^{-km} \sum_{s=1}^{2} \int\limits_{B(x_0,R)} \left|\frac{\partial}{\partial x} Q_{kj}^{(s)}(x)\right|^m dx, \tag{16}$$

где

$$Q_{kj}^{(1)}(x) = \{[\delta_k(x)]_{\mu_j} - \mu_j \psi_k(x) v_k(x)\}^+,$$
$$Q_{kj}^{(2)}(x) = \{[\delta_k(x)]_{\mu_j} + \mu_j \psi_k(x) v_k(x)\}.$$

Дальнейшая оценка основывается на неравенстве

$$\int\limits_{B(x_0,R)} \left|\frac{\partial}{\partial x} Q_{kj}^{(s)}(x)\right|^m dx \le C[\mu_{j+1} + 2^{-k}] \cdot C_m(E_k), \; s = 1,2, \tag{17}$$

получаемом при $M_k \le \mu_j \le 1$ при подстановке в соответствующее уравнению (1) интегральное тождество функций $Q_{kj}^{(s)}(x)$. При $\mu_{j+1} \ge 1$ неравенство (17) просто следует из интегральных градиентов $u_k(x)$ в $v_k(x)$.

Таким образом, если при всех $j \ge 1$ $\mu_j \le M_k$, то из (15)–(17) получаем

$$\mu_{j+1}^m \le C\cdot 2^{jn}\cdot 2^{(n-m)k}\cdot[\mu_j+2^{-k}]\cdot C_m(E_k),$$

откуда получается (14). Если же при некотором j_0 $\mu_{j_0}<M_k$, то (14) следует из (12).

3. Оценки предыдущего пункта приводят к определению решения уравнения (1), не удовлетворяющего равенству (6), как только не выполнено условие (8). Пусть сходится интеграл в левой части равенства (8). Тогда можно выбрать k_1, чтобы

$$\sum_{k=k_1}^{\infty}\{[2^{k(n-m)}C_m(E_k)+2^{-km}]^{1/(m-1)}+2^{-k}\}\le(2C_3)^{-1}, \tag{18}$$

где C_3 – постоянная в неравенстве (14).

Искомым решением, имеющим разрыв в точке x_0, будем $u_{k_1}(x)$.

Для любого $\delta>0$ существует точка $x_\delta\in B(x_0,\delta)$ такая, что $|u_{k_1}(x_\delta)|<1/2$. Это следует при соответствующем выборе $k_2=k_2(\delta)$ из (13), (14), (18) и представления $u_{k_1}(x)=\sum_{k=k_1}^{k_2}\delta_k(x)+u_{k_2+1}(x)$.

4. Аналогичные теоремам 1 – 3 утверждения справедливы и при $m=n$. В этом случае изменится только вид условий (8), (9).

1. *Wiener N.* – J. Math. and Phys., 1924, vol. **3,** p. 127–146.
2. *Wiener N.* – Ibid., p. 24–51.
3. *Олейник О.А.* – Матем. сб., 1949, т. **24** (66), № 1, с. 3–14.
4. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 287 с.
5. *Литтман У., Стампакья Г., Вайнберг Г.Ф.* – Сб. пер. Математика, 1965, т. **9,** № 2, с. 72–97.
6. *Мазья В.Г.* – Вестн. ЛГУ, 1970, № 13, вып. 3, с. 42–55.
7. *Gariepy R., Ziemer M.P.* – Arch. Rat. Mech. Anal, 1977, vol. **67**, № 1, p. 25–39.
8. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наукова думка, 1973. 219 с.
9. *Скрыпник И.В.* В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. № 14 (Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 115). Л.: Наука, 1982, с. 236–250.

РЕГУЛЯРНОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(Труды Математического института АН СССР. – 1991. – ***200****)*

1. В работе устанавливается достаточное условие регулярности граничной точки для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного вида

$$\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}\left(x,u,\ldots,D^{m}u\right)=0\,. \tag{1}$$

Решение вопроса об условии на границу области, обеспечивающем непрерывность гармонической функции в граничной точке, принадлежит Винеру. В дальнейшем, полученные им результаты распространялись на различные классы линейных эллиптических уравнений второго порядка. Ссылки на соответствующие работы имеются, например, в монографии [1]. При определенных значениях размерности области получены аналоги условия Винера для полигармонического уравнения [2].

Для уравнений вида (1) второго порядка (при $m=1$) достаточное условие регулярности граничной точки получено при специальных предположениях относительно функций A_α В.Г.Мазьей, а затем в общей ситуации Гарипи и Цимером (см. [3]). Для тех же уравнений необходимое условие регулярности граничной точки получено автором в [4].

Переход от уравнений второго порядка к уравнениям высшего порядка связан с принципиальными качественными особенностями. Напомним (см., например, [5]), что при естественных условиях роста $A_\alpha(x,\xi)$ при $|\xi|\to\infty$ и сколь угодно высокой гладкости этих функций уравнение вида (1) при $m>1$ может иметь неограниченные или разрывные решения. Также известно, что даже для линейного уравнения четвертого порядка коническая точка может быть нерегулярной при большой размерности области – пример В.Г.Мазьи и С.А.Назарова в [6]. Это говорит о необходимости дополнительных структурных условий при изучении регулярности по Винеру граничных точек в случае уравнений высшего порядка.

В данной работе результат Гарипи и Цимера распространяется на введенный автором в [7] класс квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка. Особенностью этих уравнений является усиленное условие эллиптичности, при котором энергетическим пространством является пространство $W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ с определенными условиями на m, p, q.

2. Дальше Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с границей $\partial\Omega$. Предполагаем:

а) функции $A_\alpha(x,\xi)$ определены при $x\in\Omega$, $\xi=\{\xi_\alpha:|\alpha|\le m\}\in R^M$ ($M-$ число различных мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ длины не большей, чем m) и удовлетворяют при $m\ge 2,\quad p\ge 2,\quad q>mp$ неравенствам

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge \nu\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p+\nu\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q-\mu\sum_{1<|\alpha|<m}|\xi_\alpha|^{p_\alpha}-h(x),$$
$$|A_\alpha(x,\xi)|\le\mu\sum_{|\beta|\le m}|\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}}+h_\alpha(x),\ |\alpha|\le m \tag{2}$$

с положительными постоянными ν,μ;

б) в (2) числа p_α, $p_{\alpha\beta}$ определяются условиями

$$\frac{1}{p_\alpha}=\frac{|\alpha|-1}{m-1}\frac{1}{p}+\frac{m-|\alpha|}{m-1}.\frac{1}{q_1}\quad \text{при}\quad 1<|\alpha|\le m$$
$$p_\alpha=q\quad\text{при}\quad |\alpha|=1,\quad q<p_0<\frac{nq}{n-q},\quad p_{\alpha\beta}=p_\beta\left(1-\frac{1}{p_\alpha}\right) \tag{3}$$

и число q_1 удовлетворяет неравенству $mp<q_1<q<n$;

в) в (2) неотрицательные функции $h(x)$, $h_\alpha(x)$ принадлежат соответственно пространствам $L_t(\Omega)$. $L_{t_\alpha}(\Omega)$, где

$$t>\frac{n}{q};\quad t_\alpha=\frac{p_\alpha}{p_\alpha-1}t\ \text{при}\ |\alpha|\le m\,. \tag{4}$$

При указанных условиях можно определить обобщенное решение уравнения (1) из пространства $W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$. А именно, функция $u(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для произвольной функции $\varphi(x)\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega A_\alpha\left(x,u,...,D^m u\right)D^\alpha\varphi(x)dx=0\,. \tag{5}$$

Из принадлежности $u(x)$ пространству $W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$ следует $D^\alpha u(x)\in L_{p_\alpha}(\Omega)$ в силу интерполяционного неравенства Ниренберга-Гальярдо и поэтому условия (2) – (4) обеспечивают существование интеграла в (5) при произвольных $u(x),\varphi(x)\in W_p^m(\Omega)\cap W_q^1(\Omega)$.

В работе [6] доказана при условиях а) – в) ограниченность и гельдеровость обобщенного решения уравнения (1). Там же приведены примеры, показывающие невозможность ослабить накладываемые предположения.

Пусть x_0 - произвольная точка, принадлежащая $\partial\Omega$; сформулируем в локальном варианте определение регулярности граничной точки. Обозначим через $B(x_0,R)$ шар радиуса R с центром в x_0 и пусть $\Omega_R=\Omega\cap B(x_0,R)$.

Определение 1. *Будем говорить, что* x_0 *- регулярная граничная точка области* Ω *для уравнения* (1)*, если для всякого* $R>0$ *и произвольного, определенного в* Ω_R*, обобщенного решения* $u(x)\in W_p^m(\Omega_R)\cap W_q^1(\Omega_R)$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющего условию*

$$\varphi_R(x)[u(x)-f(x)]\in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega_R)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega_R) \qquad (6)$$

с функцией $f(x)\in W_{p'}^m(\Omega_R)\cap W_{q'}^1(\Omega_R)$ *при* $p'=n/m,\ q'>n$ *и бесконечно дифференцируемой функцией* $\varphi_R(x)$*, равной единице в* $B(x_0,R/2)$*, нулю вне* $B(x_0,R)$*, выполнено равенство*

$$\lim_{x\to x_0,x\in\Omega_R} u(x)=f(x_0). \qquad (7)$$

Для формулировки условия регулярности граничной точки напомним еще понятие емкости C_q. Обозначим через $\boldsymbol{M}(E)$ множество функций пространства $C_0^\infty(B(x_0,1))$, удовлетворяющих условию $u(x)\geq 1$ при $x\in E$.

Определение 2. *Будем называть* q*-емкостью множества* $E\in B(x_0,1/2)$ *следующее число*

$$C_q(E)=\inf_{\varphi\in \boldsymbol{M}(E)}\int_{B(x_0,1)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^q dx.$$

Основной результат статьи

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия а) – в). Для того чтобы точка* $x_0\in\partial\Omega$ *была регулярной граничной точкой области* Ω *для уравнения* (1)*, достаточно, чтобы*

$$\int_0^{1/2}\left\{C_q\left(B(x_0,t)\setminus\Omega\right)t^{q-n}\right\}^{1/(q-1)}\frac{dt}{t}=\infty. \qquad (8)$$

Доказательству теоремы, которое дается в дальнейшем в пункте 6, предшествует в следующих трех пунктах получение предварительных оценок решения. Нам нужно будет доказать непрерывность произвольного решения $u(x)$ уравнения (1), определенного в Ω_R и удовлетворяющего условию (6) с некоторой функцией $f(x)$, как только выполнено условие (8). В силу условия на $f(x)$ функция $v(x)=u(x)-f(x)$ также будет решением уравнения вида (1), удовлетворяющего условиям а) – в). Поэтому в дальнейшем достаточно вести все рассмотрения при $f(x)=0$.

3. Итак, пусть $u(x)$ – решение уравнения (1) в Ω_R с некоторым $R\in(0,1]$, удовлетворяющее условию (6) при $f(x)=0$. Аналогично [6] можно доказать, что $u(x)$ ограничена в $B(x_0,R/2)$, доопределяя при этом вне Ω функцию $u(x)$ нулем.

Обозначим $m(\rho)=\operatorname{vrai\,max}\{|u(x)|:x\in B(x_0,\rho)\}$ при $\rho\leq R/2$ и определим при $\lambda\in(0,1]$ функции $v_+(x,\rho,\lambda),\quad v\_(x,\rho,\lambda)$ равенством

$$v_\pm(x,\rho,\lambda)=\frac{1}{m(\rho)\mp u(x)+\rho^\lambda},\ x\in B(x_0,\rho). \qquad (9)$$

В дальнейшем

$$H = \|h(x)\|_{L_t(\Omega)} \sum_{\alpha|\le m} \|h_\alpha(x)\|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)}_{L_{t_\alpha}(\Omega)}. \qquad (10)$$

Теорема 2. *Существуют положительные числа* K_1, σ_0, λ_0, *зависящие только от* $m, n, p, p_0, q, q_1, t, v, \mu, H$, *такие, что при* $\rho \le R/2$, $0<\lambda\le\lambda_0$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{B(x_0,\rho/2)} \left[v_+(x,\rho,\lambda)+v\_(x,\rho,\lambda)\right]^{-\sigma_0} dx \le K_1\rho^n \left[m(\rho)-m\left(\frac{\rho}{4}\right)+\rho^\lambda\right]^{\sigma_0}. \qquad (11)$$

Доказательство. Определим при $y\in B(x_0,\rho/2)$, $0<r\le\rho/2$ $\psi_r(x,y)=g(|x-y|/r)$, где $g(t)$ – бесконечно дифференцируемая на R^1 функция, равная единице при $t\le 1/2$ и нулю при $t\ge 1$. Проверяется, что при произвольном вещественном k и $s\ge m$ определяемая равенством

$$\varphi(x)=\left\{v_+^{k-1}(x,\rho,\lambda)-v_-^{k-1}(x,\rho,\lambda)\right\}\psi_r^s(x,y) \qquad (12)$$

функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega_R)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega_R)$.

Имеем

$$D^\alpha\varphi(x)=(k-1)\{v_+^k(x,\rho,\lambda)+v_-^k(x,\rho,\lambda)\}D^\alpha u(x)\psi_r^s(x,y)+R_\alpha, \qquad (13)$$

где для R_α справедлива оценка

$$|R_\alpha|\le C_1(|k|+s)^m\{v_+^{k-1}(x,\rho,\lambda)+v_-^{k-1}(x,\rho,\lambda)\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{0<|\beta|<|\alpha|}\left(\frac{D^\beta u(x)|}{\rho^\lambda}\right)^{|\alpha|/|\beta|}+\frac{1}{r^{|\alpha|}}\right\}\psi_r^{s-m}(x,y). \qquad (14)$$

Здесь и далее через $C_1, C_2 ...$ обозначены постоянные, зависящие только от тех параметров, что и постоянная K_1 в формулировке теоремы 2.

Подставляя определенную равенством (12) функцию $\varphi(x)$ в интегральное тождество (5) и используя (2), (13), (14), получаем

$$|k-1|\int\limits_\Omega \{v_+^k(x,\rho,\lambda)+v_-^k(x,\rho,\lambda)\}\left[\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right]\psi_r^s(x,y)dx\le$$
$$\le C_2(|k|+s)^m\int\limits_\Omega \left\{[v_+^k(x,\rho,\lambda)+v_-^k(x,\rho,\lambda)]\left[\sum_{1<|\alpha|<m}|D^\alpha u|^{p_\alpha}+h(x)\right]\psi_r^s(x,y)+\right.$$
$$+[v_+^{k-1}(x,\rho,\lambda)+v_-^{k-1}(x,\rho,\lambda)]\left[\sum_{|\gamma|\le m}|D^\gamma u|^{p_{\alpha\gamma}}+h_\alpha(x)\right]\times$$
$$\left.\times\left[\sum_{0<|\beta|<m}\left(\frac{|D^\beta u|}{\rho^\lambda}\right)^{|\alpha|/|\beta|}+\frac{1}{r^{|\alpha|}}\right]\psi_r^{s-m}(x,y)\right\}dx. \qquad (15)$$

Оценим правую часть (15), применяя неравенство Юнга и замечая, что в силу (3)

$$|\alpha|p_\alpha<|\beta|p_\beta \quad \text{при} \quad |\alpha|>|\beta|>0. \qquad (16)$$

Получаем с некоторыми, зависящими лишь от m, p, q, q_1, положительными числами λ_1, m_1, оценку

$$\int_\Omega \{v_+^k + v_-^k\}\left\{\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\}\psi_r^s(x,y)dx \le$$

$$\le C_3(|k|+|k-1|^{-1}+s)^{m_1}\int_\Omega [v_+^k + v_-^k]\left[\sum_{1<|\alpha|<m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} + H(x)\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{r^q}[v_+^{k-q} + v_-^{k-q}]\right\}\psi_r^{s-m_1}(x,y)dx\,, \tag{17}$$

как только $s > m_1$, $0 < \lambda \le \lambda_1$. Здесь

$$H(x) = 1 + h(x) + \sum_{|\alpha|\le m} [h_\alpha(x)]^{p_\alpha/(p_\alpha-1)},\ v_\pm = v_\pm(x,\rho,\lambda)\,.$$

Дальнейшие преобразования связаны с оценкой слагаемых правой части (17), содержащих производные $u(x)$. Для их оценки будет доказана

Лемма 1. *Существуют положительные постоянные* λ_2, m_2, m_3, *зависящие лишь от* m, p, q, q_1, *такие, что при* $2 \le j \le m-1, \sigma > 0, \tau > 0, k \in R^1, s \ge m_2\tau, 0 < \lambda \le \lambda_2, 0 < \delta < 1$ *справедлива оценка*

$$(|k|+|k-1|^{-1}+s)^\sigma \int_\Omega [v_+^k + v_-^k]\sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha u|^{p_\alpha}\ \psi_r^{s-\tau}(x,y)dx \le$$

$$\le C_4(|k|+|k-1|^{-1}+s)^{m_2\sigma}\,\delta^{-m_3}\,\frac{1}{r^q}\int_\Omega [v_+^{k-q} + v_-^{k-q}]\psi_r^{s-m_2\tau}(x,y)dx +$$

$$+\delta\int_\Omega [v_+^k + v_-^k]\left\{\sum_{|\alpha|=j+1} |D^\alpha|^{p_\alpha} + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\}\psi_r^s(x,y)dx\,. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $|\alpha| = j$ и $\alpha = \beta + \gamma$, где $|\beta| = j-1$, $|\gamma| = 1$. Представляя $|D^\alpha u|^{p_\alpha} = |D^\varepsilon u|^{p_\alpha - 2} D^\alpha u D^{\beta+\gamma} u$ в нижеследующем интеграле и интегрируя по частям, имеем

$$\int_\Omega v_+^k |D^\alpha u|^{p_\alpha}\ \psi_r^{s-\tau}(x,y)dx = -\int_\Omega \{(p_\alpha - 1)v_+^k |D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\ D^{\alpha+\gamma}u\psi_r^{s-\tau}(x,y) + kv_+^{k+1}D^\gamma u \times$$

$$\times |D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\ D^\alpha u\psi_r^{s-\tau}(x,y) + (s-\tau)v_+^k |D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\ D^\alpha u\psi_r^{s-\tau-1}(x,y)D^\gamma\psi_r(x,y)\}D^\beta u dx\,. \tag{19}$$

Докажем вначале неравенство (18) при $j = 2$. Для этого оценим по неравенству Юнга слагаемые в правой части (19), замечая, что при $|\alpha| = 2, |\beta| = |\gamma| = 1$ справедливы оценки

$$\frac{1}{p_\gamma} + \frac{1}{p_\beta} + (p_\alpha - 1)/p_\alpha < 1,\ (p_\alpha - 2)/p_\alpha + 1/(p_{\alpha+\gamma}) + 1/p_\beta < 1\,. \tag{20}$$

Имеем в итоге

$$\int_\Omega v_+^k |D^\alpha u|^{p_\alpha}\ \psi_r^{s-\tau}(x,y)dx \le$$

$$\le \int_\Omega v_+^k\left\{\frac{\varepsilon}{(|k|+|k-1|^{-1}+s)^\sigma}[|D^\alpha u|^{p_\alpha} + |D^\beta u|^q + |D^\gamma u|^q + |D^{\alpha+\gamma}u|^{p_{\alpha+\gamma}}]\psi_r^s(x,y) +\right.$$

$$\left. + C_5(|k|+|k-1|^{-1}+s)^{\sigma\mu_1}\,\varepsilon^{-\mu_2}[\rho^{-\lambda\mu_3}\psi_r^{s-\tau\mu_3}(x,y) + r^{-\mu_4}\psi_r^{s-\tau\mu_4}(x,y)]\right\}dx \tag{21}$$

с произвольным положительным числом ε, положительными, зависящими лишь от m, p, q, q_1 числами $\mu_1,...,\mu_4$, причем $\mu_4 < q$.

Из (21) следует возможность выбора чисел $\lambda_2^{(1)}, m_2^{(1)}, m_3^{(1)}$ таких, что для $s \geq m_2^{(1)}, 0 < \lambda \leq \lambda_2^{(1)}$ справедлива для $j = 2$ оценка (18).

Предположим по индукции существование положительных чисел $\lambda_2^{(j_0-1)}, m_2^{(j_0-1)}, m_3^{(j_0-1)}$, зависящих лишь от m, p, q, q_1 таких, что справедливо утверждение леммы 1 при $2 \leq j \leq j_0$ с $\lambda_2 = \lambda_2^{(j_0-1)}, m_2 = m_2^{(j_0-1)}, m_3 = m_3^{(j_0-1)}$. И докажем оценку (18) для $j = j_0 + 1$.

При $|\alpha| > 2, |\beta| = |\alpha| - 1, |\gamma| = 1$ выполняются первое из неравенств в (20) и равенство

$$(p_\alpha - 2)/p_\alpha + 1/(p_{\alpha+\beta}) + 1/p_\beta = 1. \tag{22}$$

Снова оцениваем по неравенству Юнга слагаемые правой части (19). При этом возникает отличие в оценке первого слагаемого в фигурной скобке в (19), связанное с заменой второго неравенства в (20) равенством (22). Получаем при $|\alpha| = j_0 + 1, |\beta| = j_0, |\gamma| = 1$:

$$\begin{gathered}(|k| + |k-1|^{-1} + s)^\sigma \int_\Omega v_+^k \, |D^\alpha u|^{p_\alpha} \, \psi_r^{s-\tau}(x,y)dx \leq \\ \leq \int_\Omega v_+^k \{\varepsilon[|D^\alpha u|^{p_\alpha} + |D^\beta u|^{p_\beta} + |D^\gamma u|^{p_\gamma} + |D^{\alpha+\gamma} u|^{p_{\alpha+\gamma}}]\psi_r^s(x,y) + \\ + C_6(|k| + |k-1|^{-1} + s)^{\sigma\mu_5} \varepsilon^{-\mu_6}[\rho^{-\lambda\mu_7} \psi_r^{s-\tau\mu_7}(x,y) + r^{-\mu_8} \psi_r^{s-\tau\mu_8}(x,y)]\}dx + \\ + C_7(|k| + |k-1|^{-1} + s)^{\sigma\mu_9} \varepsilon^{-\mu_{10}} \int_\Omega v_+^k \, |D^\beta u|^{p_\beta} \, \psi_r^{s-\tau\mu_{11}}(x,y)dx,\end{gathered} \tag{23}$$

где $\mu_5,...,\mu_{11}$ - положительные, зависящие лишь от m, p, q, q_1 числа и $\mu_8 < q$.

Считая $0 < \lambda \leq \lambda_2^{(j_0-1)}, s \geq m_2^{(j_0-1)} \mu_{11} \tau$, оценим последнее слагаемое в (23) по неравенству (18) при $j = j_0$, используя индуктивное предположение. И далее из (23) при соответствующем ε следует возможность выбора $\lambda_2^{(j_0)}, m_2^{(j_0)}, m_3^{(j_0)}$, обеспечивающего оценку (18), что и заканчивает доказательство леммы 1.

Суммируя неравенство (18) по j, получаем

Следствие 1. *При сохранении условий леммы* 1 *справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}(|k| + |k-1| + s)^\sigma \int_\Omega [v_+^k + v_-^k] \sum_{1 < |\alpha| < m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \, \psi_r^{s-\tau}(x,y)dx \leq \\ \leq \delta \int_\Omega [v_+^k + v_-^k] \left\{ \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha| = 1} |D^\alpha u|^q \right\} \psi_r^s(x,y)dx + \\ + C_8(|k| + |k-1|^{-1} + s)^{m_2\sigma} \delta^{-m_3} \frac{1}{r^q} \int_\Omega [v_+^{k-q} + v_-^{k-q}] \psi_r^{s-m_2\tau}(x,y)dx.\end{gathered} \tag{24}$$

Применяя неравенство (24) к оценке правой части (17), получаем при $m_4 = m_1 m_2$ и соответствующем выборе δ, σ, τ

$$\int_\Omega [v_+^k+v_-^k]\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}\psi_r^s(x,y)dx\le C_9(|k|+|k-1|+s)^{m_4}\times$$

$$\times\int_\Omega\left\{[v_+^k+v_-^k]H(x)+\frac{1}{r^q}[v_+^{k-q}+v_-^{k-q}]\right\}\psi_r^{s-m_4}(x,y)dx\,, \qquad (25)$$

справедливое при $0<\lambda\le\min(\lambda_1,\lambda_2)$.

Оценка (25) является ключевой при доказательстве теоремы 2. И дальнейшее доказательство основано на следующих двух леммах.

Лемма 2. *Существуют положительные числа* σ_1 *и* λ_0, *зависящие лишь от* $m,n,p,p_0,q,q_1,t,\nu,\mu,H$, *такие, что при* $\rho\le R/4$, $0<\lambda\le\lambda_0$, $0<\sigma\le\sigma_1$ *справедлива оценка*

$$\int_{B(x_0,\rho/2)}[v_+(x,\rho,\lambda)+v_-(x,\rho,\lambda)]^{-\sigma}dx\int_{B(x_0,\rho/2}[v_+(x,\rho,\lambda)+v_-(x,\rho,\lambda)]^{\sigma}dx\le C_{10}\rho^{2n}\,. \qquad (26)$$

Доказательство. Полагая в (25) $k=q, s=m_4+1$ и оценивая первый интеграл правой части по неравенству Гельдера, получаем при $0<r\le\rho/2$, $y\in B(x_0,\rho/2)$ оценку

$$\int_{B(y,r/2)}\left|\frac{\partial}{\partial x}\ln[v_++v_-]\right|^q dx\le C_{11}\int_{B(y,r/2)}\{v_+^q(x,\rho,\lambda)+v_-^q(x,\rho,\lambda)\}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^q dx\le$$

$$\le C_{12}\left\{\frac{1}{\rho^{q\lambda}}Hr^{n(1-1/t)}+r^{n-q}\right\}\le C_{13}r^{n-q}\,, \qquad (27)$$

если выбрать $0<\lambda\le\lambda_0=\min\{\lambda_1,\lambda_2,1-n/qt\}$.

Из (27) и неравенства Йона-Ниренберга [7] следует возможность выбора σ_1, при котором справедлива оценка (26), что и заканчивает доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Существует положительное число* $\sigma_0\in(0,\sigma_1]$, *зависящее лишь от* $m,n,p,p_0,q,q_1,t,\nu,\mu,H$, *такое, что при* $0<\lambda\le\lambda_0$ *имеет место оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x\in B(x_0,\rho/4)}\{v_+^{\sigma_0}(x,\rho,\lambda)+v_-^{\sigma_0}(x,\rho,\lambda)\}\le\frac{C_{13}}{\rho^n}\int_{B(x_0,\rho/2)}[v_+(x,\rho,\lambda)+v_-(x,\rho,\lambda)]^{\sigma_0}dx\,, \qquad (28)$$

где λ_0,σ_1 *- числа, определенные в лемме 2.*

Доказательство. Оценивая интегралы правой части (25) по неравенству Гельдера, получаем при $y=x_0$, $r=\rho/2$, $s>m_4$, $0<\lambda\le\lambda_0$:

$$\int_\Omega[v_+^k(x,\rho,\lambda)+v_-^k(x,\rho,\lambda)]\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}\psi^s(x)dx\le$$

$$\le C_{14}(|k|+|k-1|^{-1}+s)^{m_4}\frac{1}{\rho^{q-n/t}}\left\{\int_\Omega[(v_+^{k-q}(x,\rho,\lambda)+v_-^{k-q}(x,\rho,\lambda))\times\right.$$

$$\left.\times\psi^{s-m_4}(x)]^{t/(t-1)}dx\right\}^{(t-1)/t}, \qquad (29)$$

где $\psi(x)=\psi_{2^{-1}\rho}(x)$.

Оценка (28) будет получена из (29) на основании итерационного процесса Мозеровского типа. Применяя теорему вложения и обозначая кратко $v_\pm(x,\rho,\lambda)$ через $v_\pm$, имеем в силу (29) и неравенства Гельдера

$$\int\limits_\Omega [v_+^k + v_-^k]\psi^s(x)dx \le C_{15}\left\{\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x}[(v_+^k + v_-^k)\psi^s(x)]^{(n-q)/nq}\right|^q dx\right\}^{n/(n-q)} \le$$

$$\le C_{16}(|k|+s)^{nq/(n-q)}\left\{\int\limits_\Omega \left[(v_+^{k(n-q)/n+q} + v_-^{k(n-q)/n+q})\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^q \psi^{s(n-q)/n}(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (v_+^{k(n-q)/n} + v_-^{k(n-q)/n})\frac{1}{\rho^q}\psi^{s(n-q)/n-q}(x)\right]dx\right\}^{n/(n-q)} \le$$

$$\le C_1(|k|+|k-1|^{-1}+s)^{m_5}\rho^{-(q-n/t)(n/(n-q)}\left\{\int\limits_\Omega [v_+^{k\theta} + v_-^{k\theta}]\psi^{s\theta-m_6}(x)dx\right\}^{1/\theta}, \qquad (30)$$

где $\theta = t(n-q)/((t-1)n)$ и m_5, m_6 – положительные постоянные, зависящие лишь от m, n, p, q, q_1. Отметим, что в силу условий $q<n, t>n/q$ выполнено неравенство

$$0<\theta<1. \qquad (31)$$

Возьмем далее последовательности значений

$$k_i = \sigma_0\theta^{-i},\ s_i = [q + m_6/(1-\theta)]\theta^{-i} - m_6/(1-\theta),\ i = 0,1,... \qquad (32)$$

Здесь $\sigma_0 \in (0,\sigma_1]$ и выбирается из условия

$$\sup|\sigma_0\theta^{-i} - 1|^{-1} \le M_0 \qquad (33)$$

с зависящим лишь от $m, n, p, p_0, q, q_1, t, \nu, \mu, H$ положительным числом M_0.

Пусть

$$J_i = \frac{1}{\rho^n}\int\limits_\Omega [v_+^{k_i}(x,\rho,\lambda) + v_-^{k_i}(x,\rho,\lambda)]\psi^{s_i}(x)dx\,. \qquad (34)$$

Тогда из неравенства (30) при $k = k_i, s = s_i$ следует оценка

$$J_i \le C_{18}\theta^{-im_5}J_{i-1}^{1/\theta},\ i = 1,2,... \qquad (35)$$

Последовательным применением этого неравенства получаем

$$J_i^{\theta^i} \le C_{18}^{\theta^i+\theta^{i-1}+...+\theta}\theta^{-m_5[i\theta^i+(i-1)\theta^{i-1}+...+\theta]}J_0,$$

откуда при $i\to\infty$ непосредственно следует оценка (28), что и заканчивает доказательство леммы 3.

Полученные оценки (26), (28) позволяют закончить доказательство теоремы 2. Для этого оценим левую часть (28). По определению $m(\rho/4)$ при любом $\varepsilon>0$ множество

$$E_\varepsilon = \{x\in B(x_0,\rho/4) : |u(x)| > m(\rho/4) - \varepsilon\}$$

имеет положительную меру и, следовательно, положительна мера одного из множеств $E_\varepsilon^+, E_\varepsilon^-$, где

$$E_\varepsilon^\pm=\{x\in B(x_0,\rho/4):\pm u(x)>m(\rho/4)-\varepsilon\}.$$

Пусть $\operatorname{mes}E_\varepsilon^+>0$. Тогда при $x\in E_\varepsilon^+$

$$v_+^{\sigma_0}(x,\rho,\lambda)>\frac{1}{m(\rho)-m(\rho/4)+\varepsilon+\rho^\lambda},$$

и, тем самым,

$$v_+^{\sigma_0}(x,\rho,\lambda)+v_-^{\sigma_0}(x,\rho,\lambda)>\frac{1}{m(\rho)-m(\rho/4)+\varepsilon+\rho^\lambda}. \tag{36}$$

Аналогично получается последнее неравенство при $x\in E_\varepsilon^-$. Из неравенства (36) при $x\in E_\varepsilon$ следует, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x\in B(x_0,\rho/4)}\{\,v_+^{\sigma_0}(x,\rho,\lambda)+v_-^{\sigma_0}(x,\rho,\lambda)\}\ge\frac{1}{m(\rho)-m(\rho/4)+\rho^\lambda}. \tag{37}$$

Теперь неравенство (11) является непосредственным следствием оценок (26), (28), (37). Тем самым доказана теорема 2 с постоянными σ_0,λ_0, определенными соответственно в леммах 3, 2.

4. Теорема 3. *Пусть* $\varepsilon\in(0,1)$. *Существует положительное число* $K_2(\varepsilon)$, *зависящее только от* $\varepsilon,m,n,p,p_0,q,q_1,t,v,\mu,H$, *такое, что при* $0<\sigma\le(n-\varepsilon)(q-1)/(n-q),0<\lambda\le\lambda_0,\rho\le R/2$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{B(x_0,\rho/4)}[v_+(x,\rho,\lambda)+v_-(x,\rho,\lambda)]^{-\sigma}dx\le K_2(\varepsilon)\rho^n\left[m(\rho)-m\left(\frac{\rho}{4}\right)+\rho^\lambda\right]^\sigma. \tag{38}$$

Здесь λ_0 *- число, определенное в теореме* 2.

Доказательство. Для заданного положительного ε вернемся к подстановке (12) в интегральное тождество (5) при $y=x_0,\quad r=\rho/2,\quad 1+\frac{q-1}{n}\varepsilon\le k\le q,$

$$\frac{n-q}{n}\left(q+\frac{m_6}{\theta}\right)\le s\le\left(q+\frac{m_6}{1-\theta}\right)\frac{q-1}{\sigma_0\theta}. \tag{39}$$

Через $C_1(\varepsilon),C_2(\varepsilon),\ldots$ будем обозначать постоянные, зависящие от тех же параметров, что и $C_1,C_2,\ldots$ выше, и еще дополнительно от ε.

Пользуясь тем, что сейчас $k-1\ge(q-1)\varepsilon/n$, получим, что справедливо неравенство, получающееся заменой в (15) выражений $v_+^k(x,\rho,\lambda)+v_-^k(x,\rho,\lambda)$ и $v_+^{k-1}(x,\upsilon,\lambda)+v_-^{k-1}(x,\rho,\lambda)$ соответственно выражениями $[v_+(x,\rho,\lambda)+v_-(x,\rho,\lambda)]^k$ и $[v_+(x,\rho,\lambda)+v_-(x,\rho,\lambda)]^{k-1}$.

Рассуждая, как и выше, получим вместо (17) неравенство

$$\int\limits_\Omega(v_++v_-)^k\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}\psi^s(x)dx\le$$

$$\le C_1(\varepsilon)\int\limits_\Omega\left\{(v_++v_-)^k\left[\sum_{1<|\alpha|<m}|D^\alpha u|^{p_\alpha}+H(x)\right]+\frac{1}{r^q}(v_++v_-)^{k-q}\right\}\psi^{s-m_1}(x)dx. \tag{40}$$

Повторяя доказательство леммы 1, получаем, что при выполнении неравенств (39) справедлива оценка

$$\int_\Omega (v_+ + v_-)^k \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \psi^{s-\tau}(x)dx \le C_2(\varepsilon)\delta^{-m}\frac{1}{r^q}\int_\Omega (v_+ + v_-)^{k-q}\psi^{s-m_2\tau}(x)dx +$$

$$+\delta\int_\Omega (v_+ + v_-)^k \left\{\sum_{|\alpha|=j-1} |D^\alpha u)^{p_\alpha} + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\}\psi^s dx\,. \qquad (41)$$

Продолжая далее рассуждения предыдущего пункта, получаем неравенства

$$\int_\Omega (v_+ + v_-)^k \sum_{1\le|\alpha|\le m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \psi^s(x)dx \le$$

$$\le C_3(\varepsilon)\frac{1}{\rho^{q-n/t}}\left\{\int_\Omega [(v_+ + v_-)^{k-q}\psi^{s-m_1}(x)]^{t/(t-1)}dx\right\}^{(t-1)/t}, \qquad (42)$$

$$\frac{1}{\rho^n}\int_\Omega (v_+ + v_-)^{\tilde{k}}\psi^{\tilde{s}}(x)dx \le C_3(\varepsilon)\left\{\frac{1}{\rho^n}\int_\Omega (v_+ + v_-)^{\tilde{k}\theta}\psi^{\tilde{s}\theta-m_6}(x)dx\right\}^{1/\theta} \qquad (43)$$

при $\tilde{k} = (k-q)n/(n-q), \tilde{s} = s\,n/(n-q)$ и k, s, удовлетворяющих условию (39). Неравенство (43), в частности, справедливо при $\tilde{k} = \tilde{k}_i$, $\tilde{s} = \tilde{s}_i, i = 1,..., I$, где $\tilde{k}_i = -\tilde{\sigma}_0(\varepsilon)\theta^{-i}, \tilde{s}_i = [q + m_6/(1-\theta)]\theta^{-i} - m_6/(1-\theta)$ и $I, \tilde{\sigma}_0(\varepsilon)$ определяются соответственно условиями

$$\frac{n(q-1)}{n-q} \le \sigma_0\theta^{-I} \le \frac{n(q-1)}{\theta(n-q)},\ 0 < \tilde{\sigma}_0(\varepsilon) \le \sigma_0,\ \sigma_0(\varepsilon)\theta^{-I} = \frac{(n-\varepsilon)(q-1)}{n-q}\,. \qquad (44)$$

Здесь σ_0, θ имеют то же значение, что и в п. 3. Проверяется, что функция $[\tilde{\sigma}_0(\varepsilon)]^{-1}$ при $\varepsilon \in (0,1)$ ограничена сверху постоянной, зависящей лишь от $m, n, p, p_0, q, q_1, t, \nu, \mu, H$.

Покажем, что при $i = 1, 2,..., I$ справедлива оценка

$$\int_\Omega (v_+ + v_-)^{\tilde{k}_i}\psi^{\tilde{s}_i}(x)dx \le C_4(\varepsilon)\rho^n\left[m(\rho) - m\left(\frac{\rho}{4}\right) + \rho^\lambda\right]^{-\tilde{k}_i}. \qquad (45)$$

При $i = 1$ (45) следует из (43) при $\tilde{k} = \tilde{k}_1, \tilde{s} = \tilde{s}_1$, неравенств (11) и Гельдера. Если оценка (45) имеет место при $i \le j-1$, то для $i = j$ она получается из неравенств (43) при $\tilde{k} = \tilde{k}_j, \tilde{s} = \tilde{s}_j$ и (45) при $i = j-1$. Тем самым установлено неравенство (45) при $i = 1, 2,..., I$, а вместе с ним получаем и неравенство (38) при $\sigma = -\tilde{k}_I = -(n-\varepsilon)(q-1)/(n-q)$. При $0 < \sigma < -\tilde{k}_I$ оценка (38) получается из этой же оценки для $\sigma = -\tilde{k}_I$ и неравенства Гельдера. Этим заканчивается доказательство теоремы 3.

Отметим следствие оценок (42) и (45) при $i = I$.

Следствие 2. *При выполнении неравенств*

$$0 < \frac{t}{t-1}(q-k) \le \frac{(n-\varepsilon)(q-1)}{n-q},\quad q + \frac{m_6}{\theta} \le (s-m_4)\frac{t}{t-1} \le$$

$$\le \left(q - \frac{m_6}{1-\theta}\right)\frac{(q-1)n}{\sigma_0\theta(n-q)} \qquad (46)$$

справедлива оценка

$$\int_{\Omega} (v_+ + v_-)^k \sum_{1\le|\alpha|\le m} |D^\alpha u|^{p_\alpha}\ \psi^s(x)dx \le C_5(\varepsilon)\rho^{n-q}\left[m(\rho)-m\left(\frac{\rho}{4}\right)+\rho^\lambda\right]^{q-k}. \qquad (47)$$

5. Далее $\psi_r(x)=g(|x|/r)$, где g – определенная в п. 3 функция и, как и выше, через C_i обозначаются постоянные, зависящие только от $m, n, p, p_0, q, q_1, t, \nu, \mu, H$.

Теорема 4. *Существуют положительные числа* K_3, M_1, *зависящие лишь от* $m, n, p, p_0, q, q_1, t, \nu, \mu, H$, *такие, что при*

$$0<r\le R/4,\ 0<\lambda\le\min\{\lambda_0,(q_1-mp)/(m-1)q_1, 1-q_1/q\} \qquad (48)$$

выполнена оценка

$$\int_{\Omega} \left\{\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\}\psi_r^{M_1}(x)dx \le$$

$$\le K_3 r^{n-q}[m(r)+r^\lambda]\left[m(2r)-m\left(\frac{r}{2}\right)+r^\lambda\right]^{q-1}. \qquad (49)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (5) вместо $\varphi(x)$ функцию $u(x)\psi_r^{M_1}(x)$. Проводя обычные оценки на основе неравенств (2), получим

$$\int_{\Omega} \left\{\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\}\psi_r^{M_1}(x)dx \le$$

$$\le C_{19}\int_{\Omega} \left\{\sum_{1<|\alpha|<m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} + H(x) + \sum_{0<|\lambda|<\alpha} (r^{-|\alpha-\gamma|}|D^\gamma u|)^{p_\alpha}\right\}\psi_r^{M_1-m}(x)dx +$$

$$+C_{19}m(r)\int_{\Omega} \left\{\sum_{0<|\alpha|,|\beta|\le m} r^{-|\alpha|}|D^\beta u|^{p_{\alpha\beta}} + \sum_{|\alpha|\le m} r^{-|\alpha|}h_\alpha(x)\right\}\psi_r^{M_1-m}(x)dx. \qquad (50)$$

Покажем, как нужно оценивать дальше слагаемые правой части (50). Определим при $|\alpha|>0$ число q_a из условия

$$(t/(t-1))(q-q_\alpha/(p_\alpha-1))=q_\alpha.$$

Тогда в силу (4) и (16) имеем

$$q_\alpha < n(q-1)q/(n+(n-q)(q-1)) \text{ при } 1\le|\alpha|\le m. \qquad (51)$$

Оцениваем при $0<|\alpha|,|\beta|\le m$ одно из слагаемых в (50) по неравенству Гельдера

$$\int_{\Omega} r^{-|\alpha|}|D^\beta u|^{p_{\alpha\beta}}\ \psi_r^{M_1-m}(x)dx \le r^{-|\alpha|}\left\{\int_{\Omega} |D^\beta u|^{p_\beta}\ (v_+ + v_-)^{q_\alpha/(p_\alpha-1)}\psi_r^{M_1-m}(x)dx\right\}^{(p_\alpha-1)/p_\alpha} \times$$

$$\times\left\{\int_{\Omega} (v_+ + v_-)^{-q_\alpha}\psi_r^{M_1-m}(x)dx\right\}^{1/p_\alpha} \le C_{20} r^{-|\alpha|+(n-q)(p_\alpha-1)/p_\alpha+n/p_\alpha} \times$$

$$\times\left[m(2r)-m\left(\frac{r}{2}\right)+r^\lambda\right]^{q(p_\alpha-1)/p_\alpha} \le C_{21} r^{n-q}\left[m(2r)-m\left(\frac{r}{2}\right)+r^\lambda\right]^{q-1}. \qquad (52)$$

Здесь воспользовались условием (48), оценками (38), (47), возможность применения которых при определенных значениях M_1 обеспечивается неравенством (51), а также при $|\alpha|>1$ неравенством $|\alpha|\,p_\alpha<q$, следующим из (16).

Другие слагаемые правой части (50) оцениваем следующим образом:

$$\int\limits_\Omega \left\{H(x)+\sum_{0<|\gamma|<|\alpha|}(r^{-|\alpha-\gamma|}\,|D^\gamma u|)^{p_\alpha}+m(r)\sum_{|\alpha|\le m} r^{-|\alpha|}h_\alpha(x)\right\}\psi_r^{M_1-m}(x)dx\le$$

$$\le\frac{1}{2C_{19}}\int\limits_\Omega\sum_{|\gamma|=1}|D^\gamma u|^{p_\gamma}\;\psi_r^{M_1}(x)dx+\int\limits_\Omega\sum_{1<|\gamma|<m}|D^\gamma u|^{p_\gamma}\;\psi_r^{M_1-m}(x)dx+$$

$$+C_{21}\left\{Hr^{n(1-1/t)}+r^{n-|\alpha|p_\alpha}+\sum_{0<|\gamma|<|\alpha|}r^{n-|\alpha-\gamma|p_\alpha p_\gamma/(p_\gamma-p_\alpha)}\right\},\tag{53}$$

в силу (48) последнее слагаемое правой части (53) не превосходит правой части (49).

Тем самым, для завершения доказательства теоремы 4 осталось оценить второй интеграл правой части (53). С этой целью будет доказана

Лемма 4. *При выполнении условий теоремы* 4 *имеет место оценка*

$$\int\limits_\Omega\sum_{1<|\alpha|<m}|D^\alpha u|^{p_\alpha}\;\psi_r^{M_1-m}(x)dx\le$$

$$\le\frac{1}{2(C_{19}+1)}\int\limits_\Omega\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^{p'}+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}\psi_r^{M_1}(x)dx+C_{22}r^{n-q}\,.\tag{54}$$

Доказательство. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 1, имеем при $1<|\alpha|<m,\ \alpha=\beta+\gamma, |\gamma|=1$:

$$\int\limits_\Omega|D^\alpha u|^{p_\alpha}\;\psi_r^{M_1-m}(x)dx=-\int\limits_\Omega\Big\{\,(p_\alpha-1)|D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\;D^{\alpha+\gamma}u\psi_r^{M_1-m}(x)+$$

$$+(M_1-m)|D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\;D^\alpha u\psi_r^{M_1-m-1}(x)D^\gamma\psi_r(x)\;\Big\}D^\beta u dx\,.\tag{55}$$

Пусть вначале $|\alpha|=2$. Используя вторую оценку в (20) и справедливое при $2\le|\alpha|\le m, |\beta|=|\alpha|-1$ неравенство

$$(p_\alpha-1)/p_\alpha+1/p_\beta+1/q_1<1\;,\tag{56}$$

имеем из (55) при $\varepsilon>0$

$$\int\limits_\Omega|D^\alpha u|^{p_\alpha}\;\psi_r^{M_1-m}(x)dx\le\varepsilon\int\limits_\Omega\{|D^\beta u|^q+|D^{\alpha+\gamma}u|^{p_{\alpha+\gamma}}\}\psi_r^{M_1}(x)dx+C_6(\varepsilon)r^{n-q}$$

с $C_6(\varepsilon)$, зависящей от тех же параметров, что и постоянные $C_i(\varepsilon)$ в п. 4.

При $|\alpha|>2$, учитывая (22), (56), имеем из (55) в силу неравенства Юнга

$$\int\limits_\Omega|D^\alpha u|^{p_\alpha}\;\psi_r^{M_1-m}(x)dx\le\varepsilon\int\limits_\Omega|D^{\alpha+\gamma}u|^{p_{\alpha+\gamma}}\;\psi_r^{M_1}(x)dx+$$

$$+C_7(\varepsilon)\int\limits_\Omega|D^\beta u|^{p_\beta}\;\psi_r^{M_1-M_2}(x)dx+C_7(\varepsilon)r^{n-q}$$

с некоторым M_2.

Из последних двух неравенств индукцией по j получаем при достаточно большом M_1 оценку

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \psi_r^{M_1-m}(x)dx \le \varepsilon \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=j+1} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \right\} \times$$

$$\times \psi_r^{M_1}(x)dx + C_8(\varepsilon) r^{n-q},$$

откуда суммированием по j при соответствующем ε следует (54), что и доказывает лемму 4.

Возвращаясь к доказательству теоремы 4, получаем, что оценка (49) следует из неравенств (50), (52), (53), (54) и тем самым теорема доказана.

6. В этом пункте на основании полученных выше оценок доказывается главный результат статьи – теорема 1. Будем предполагать выполненным условие (8) и докажем непрерывность $u(x)$ в точке x_0.

Доказываем от противного, предполагая, что $u(x)$ разрывна в x_0. Тогда

$$A = \lim_{r\to 0} m(r) > 0. \tag{57}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_0(x) = [m(2r) + (2r)^\lambda]^{-2} \{[m(2r) + (2r)^\lambda]^2 - u^2(x)\} \psi_r^{M_1}(x)$$

с r, λ, удовлетворяющими условию (48), и M_1, определенным в теореме 4. Эта функция принадлежит множеству $\boldsymbol{M}(B(x_0, r/2) \setminus \Omega)$, и, следовательно, по определению 2 имеет место оценка

$$C_q\left(B\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \setminus \Omega\right) \le \int_{B(x_0,1)} \left|\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x}\right|^q dx \le C_{23}[m(2r) + (2r)^\lambda]^{-2q} \times$$

$$\times \left\{ \int_\Omega |u(x)|^q \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^q \psi_r^{qM_1}(x)dx + r^{-q} \int_\Omega ([m(2r) + (2r)^\lambda]^2 - u^2)^q dx \right\}. \tag{58}$$

Оценим интегралы в правой части (58). Используя неравенство (49), имеем

$$\int_\Omega |u(x)|^q \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^q \psi_r^{qM_1}(x)dx \le C_{24} r^{n-q} [m(r) + r^\lambda]^{q+1} \left[m(2r) - m\left(\frac{r}{2}\right) + r^\lambda \right]^{q-1}. \tag{59}$$

Для оценки второго интеграла в (58) применим неравенство (38) при $\sigma = q-1$, замечая, что

$$[v_+(x, 2r, \lambda) + v_-(x, 2r, \lambda)]^{-1} = \frac{1}{2}[m(2r) + (2r)^\lambda]^{-1} \{[m(2r) + (2r)^\lambda]^2 - u^2(x)\}.$$

Тогда

$$\int_\Omega \{[m(2r) + (2r)^\lambda]^2 - u^2(x)\}^q dx \le$$

$$\le C_{25} r^n [m(2r) + r^\lambda]^{q+1} \int_\Omega [v_+(x, 2r, \lambda) + v_-(x, 2r, \lambda)]^{-(q-1)} dx \le$$

$$\le C_{26} r^n [m(2r) + r^\lambda]^{q+1} \left[m(2r) - m\left(\frac{r}{2}\right) + r^\lambda \right]^{q-1}. \tag{60}$$

Из (58) – (60) следует оценка

$$C_q(B(x_0, r/2) \setminus \Omega) \le C_{27} r^{n-q} [m(2r) + r^{\lambda}]^{-q+1} [m(2r) - m(r/2) + r^{\lambda}]^{q-1} . \tag{61}$$

Отсюда, на основании (57) при $\varepsilon > 0, R' = R/8$ имеем

$$\int_{\varepsilon}^{R'} \{C_q(B(x_0, t) \setminus \Omega) t^{q-n}\}^{1/(q-1)} \frac{dt}{t} \le C_{28} \frac{1}{A} \int_{\varepsilon}^{R'} [m(4t) - m(t) + t^{\lambda}] \frac{dt}{t} . \tag{62}$$

Просто проверяется, что правая часть (62) ограничена независящей от ε постоянной. Тем самым получаем ограниченность интеграла, стоящего в правой части (8), что противоречит условию теоремы 1. Полученное противоречие доказывает непрерывность $u(x)$ в точке x_0, а вместе с ней и теорему.

Литература

1. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.
2. *Мазья В.Г., Дончев Т.* О регулярности по Винеру граничной точки для полигармонического оператора // Докл. Болг. Акад. наук. 1983. Т. 36, № 2. С. 177–179.
3. *Gariepy R., Ziemer W.V.* A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equation // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1977. Vol. 67, N 1. P. 25–39.
4. *Скрыпник И.В.* Критерий регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических уравнений // ДАН СССР. 1984. Т. 274, № 5. С. 1040–1044.
5. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наук. думка, 1973.
6. *Мазья В.Г., Назаров С.А.* Вершина конуса может быть нерегулярной по Винеру для эллиптического уравнения четвертого порядка // Мат. заметки. 1986. Т. 39, вып. 1. С. 24–28.
7. *Скрыпник И.В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. 1978. № 6. С. 1104–1119.
8. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Commun Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14, N 3. P. 415–426.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

*(Математический сборник. – 1992. – **183**, № 2)*

Изучается непрерывность в граничной точке $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ решения дивергентного квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}a_j\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{0.1}$$

в цилиндрической области $Q=\Omega\times(0,T)$. При предполагаемых далее условиях на функции $a_j(x,t,u,p)$, $j=0,1,...,n$, решение уравнения (0.1) гёльдерово в Q (см., например, [1]). Известна также гёльдеровость решений вплоть до границы Q в случае достаточной гладкости области Ω и определенных условий на граничное и начальное значение $u(x,t)$.

Вслед за основополагающим критерием Винера регулярности граничной точки для гармонических функций многими авторами изучались условия на границу области, обеспечивающие непрерывность в граничной точке решений линейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка (см. список литературы в [2]). Отметим, что для уравнения теплопроводности критерий регулярности граничных точек в цилиндрической области получен А.Н. Тихоновым [3]. Для линейного дивергентного уравнения с измеримыми ограниченными коэффициентами соответствующий результат установлен Эклундом в [4].

Для уравнения (0.1) достаточное условие непрерывности решения в граничной точке получено В. Цимером [5]. В данной работе решен остававшийся открытым вопрос о необходимом условии регулярности граничной точки, что позволяет вместе с результатом Цимера получить следующий критерий: *для того, чтобы точка* $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ *была регулярной для уравнения* (0.1), *необходимо и достаточно, чтобы точка* $x_0\in\partial\Omega$ *была регулярной для уравнения Лапласа, т.е. чтобы для нее выполнялся классический критерий Винера.*

Для дивергентных квазилинейных эллиптических уравнений достаточное условие регулярности граничной точки получено Р. Гарипи и В. Цимером, а необходимое условие установлено автором. Как доказательство этих результатов, так и дальнейшие литературные ссылки можно найти в [6], [7].

§ 1. Доказательство основной теоремы при предполагаемых априорных оценках

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в R^n. Будем изучать поведение решений уравнения (0.1) в точках $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ в предположении, что функции $a_j(x,t,u,p)$, $j=0,1,...,n$, определены при $x\in\Omega$, $t\in[0,T]$, $u\in R^1$, $p\in R^n$ и удовлетворяют при $(x,t)\in\Omega\times[0,T]$, u, $v\in R^1$, $p,q\in R^n$ следующим условиям:

1) для почти всех x,t функции $a_j(x,t,u,p)$ непрерывны по u,p и для всех u,p $a_j(x,t,u,p)$ – измеримые функции x,t; $a_j(x,t,0,0)\equiv 0$ при $j=0,1,...,n$;

2) с положительными постоянными ν_1, ν_2 выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m}\bigl[a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,u,q)\bigr](p_j-q_j)\ge\nu_1\,|\,p-q\,|^2,\\ |\,a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,u,q)\,|\le\nu_2(|\,u-v\,|+|\,p-q\,|),\quad j=0,1,...,n.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Далее будут использоваться введенные в [1] пространства $V_2(Q)$, $\overset{\circ}{V}_2(Q)$, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q)$, $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, элементами которых являются функции, определенные в цилиндре Q. В частности, в $V_2(Q)$ норма определяется равенством

$$\|u\|^2_{V_2(Q)}=\operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T}\int_Q u^2(x,t)\,dx+\int\!\!\int_Q\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2dx\,dt\,.\tag{1.2}$$

Функцию $u(x,t)\in V_2(Q)$ называем решением уравнения (0.1), если для всех $\psi(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, равных нулю при $t=0$, $t=T$, выполнено тождество $I_T(u,\psi)=0$, где

$$I_\tau(u,\psi)=\int_0^\tau\!\!\int_\Omega\left\{-u(x,\,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}-a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\psi(x,t)\right\}dxdt\,.\tag{1.3}$$

Сформулированные выше условия для функций $a_j\left(x,t,u,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ обеспечивают разрешимость уравнения (0.1) при граничном и начальном условиях:

$$u(x,t)=f(x,t)\quad\text{при}\quad(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)\,,\tag{1.4}$$

$$u(x,0)=g(x)\qquad\text{при}\quad x\in\Omega\tag{1.5}$$

для произвольных $f(x,t)\in W_2^1(Q)$, $g(x)\in L_2(\Omega)$. При этом решением задачи (0.1), (1.4), (1.5) называем такую функцию $u(x,t)\in V_2(Q)$, что $u(x,t)-f(x,t)\in\overset{\circ}{V}_2(Q)$ и при любых $\psi(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, $\tau\in(0,T)$, справедливо интегральное тождество

$$\int_\Omega u(x,\tau)\,\psi(x,\tau)\,dx-\int_\Omega g(x)\;\psi(x,0)\,dx+I_\tau(u,\psi)=0\,.\tag{1.6}$$

Следуя [1], можно показать, что решение задачи (0.1), (1.4), (1.5) принадлежит пространству $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ – *регулярная граничная точка* области Q для уравнения (0.1), если для всякого определенного в Q решения $u(x,t)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$\varphi(x,t)[u(x,t)-f(x,t)]\in \overset{\circ}{V}_2(Q) \tag{1.7}$$

с функцией $f(x,t)\in C(\overline{Q})\cap W_2^1(Q)$ и бесконечно дифференцируемой функцией $\varphi(x,t)$, равной единице в окрестности (x_0,t_0), выполнено равенство

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\ (x,t)\in Q}} u(x,t)=f(x_0,t_0)\,. \tag{1.8}$$

Отметим, что решение $u(x,t)$, о котором идет речь в определении 1.1, гёльдерово в Q и ограничено в $U\cap\overline{Q}$, где U – некоторая окрестность точки (x_0,t_0) (см. [1]).

Для формулировки условия регулярности напомним еще понятие емкости. Обозначим для ограниченного множества $E\subset R^n$ через $\mathcal{M}(E)$ множество функций $\varphi(x)$ из пространства $C_0^\infty(R^n)$, удовлетворяющих условию $\varphi(x)\ge 1$ при $x\in E$.

Определение 1.2. *Емкостью множества* E называется следующее число

$$C(E)=\inf\left\{\int_{R^n}\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|^2 dx:\varphi(x)\in\mathcal{M}(E)\right\}.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1.1. *Пусть функции* $a_j(x,t,u,p)$ *удовлетворяют условиям* 1) , 2). *Для того чтобы* $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ *была граничной точкой области* Q *для уравнения* (0.1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 C(B(x_0,r)\setminus\Omega)\,r^{1-n}\,dr=\infty\,, \tag{1.9}$$

где $B(x_0,r)$ – *шар радиуса* r с *центром* в точке x_0.

В работе [5] доказано, что условия (1.9) достаточно для регулярности точки (x_0,t_0). Тем самым получаем критерий регулярности точки боковой цилиндрической поверхности.

Следствие 1.1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.1. *Для того чтобы точка* $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times(0,T)$ *была регулярной граничной точкой уравнения* (0.1), *необходимо и достаточно выполнение равенства* (1.9).

В настоящем параграфе определим вспомогательные функции $u_k(x,t)$, играющие основную роль при доказательстве теоремы 1.1, приведем доказываемые в следующих параграфах априорные оценки этих функций и их разностей и докажем на основе этих оценок теорему 1.1.

Введение вспомогательных функций $u_k(x,t)$ потребует определения функций $a_j(x,t,u,p)$ при $x \notin \Omega$. Полагая при $x \notin \Omega$ $a_j(x,t,u,p) = a_j(x_1,t,u,p)$, где x_1 – некоторая фиксированная точка области Ω, определяем тем самым $a_j(x,t,u,p)$ при $x \in R^n$, $t \in [0,T]$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ с сохранением условий 1), 2).

Определим при $k = 1,2,...$

$$E_k = B(x_0, 2^{-k}) \setminus \Omega, \quad E^{(k)} = E_k \cap B\left(x_0, 2^{-(k+1)}\right) \tag{1.10}$$

и обозначим через $\mathcal{M}_k(E_k)$, $\mathcal{M}^{(k)}(E^{(k)})$ подмножества $\mathcal{M}(E_k)$, $\mathcal{M}(E^{(k)})$, образованные функциями с носителями, содержащимися соответственно в $B\left(x_0, 2^{-(k-1)}\right)$ и $B\left(x_0, 2^{-(k-1)}\right) \setminus B\left(x_0, 2^{-(k+2)}\right)$.

Просто проверяется (см. [6]), что с некоторой, зависящей лишь от n, постоянной C справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{ \int_{R^n} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^2 dx : \varphi(x) \in \mathcal{M}_k(E_k) \right\} \le C \cdot C(E_k), \\
&\inf\left\{ \int_{R^n} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^2 dx : \varphi(x) \in \mathcal{M}^{(k)}(E^{(k)}) \right\} \le C \cdot C(E^{(k)}).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Пусть $\operatorname{diam}\Omega$ – диаметр области Ω. В дальнейшем $R = 2 + \operatorname{diam}\Omega$ и через B обозначается шар радиуса R с центром в точке x_0.

Выберем невозрастающую функцию $\omega(s) \in C^\infty(R^1)$, удовлетворяющую условиям: $0 \le \omega(s) \le 1$, $\omega(s) \equiv 0$ при $s \ge 2$, $\omega(s) \equiv 1$ при $s \le 1$, $|d\omega(s)/ds| \le 2$. И пусть дальше $\lambda_k(t) = \omega\left(2^{2k} |t - t_0|\right)$, $h(x) = \omega\left(|x - x_0|\right)$.

Для данной фиксированной точки $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$ выберем число k_0 так, чтобы $2^{2-2k_0} < t_0$ и определим при $k > k_0$, $(x,t) \in Q_k = D_k \times (0,T)$, $D_k = B \setminus \overline{E}_k$ функцию $u_k(x,t)$ как решение уравнения (0.1) в Q_k, удовлетворяющее условиям

$$u_k(x,t) = h(x)\lambda_k(t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial D_k \times (0,T), \tag{1.12}$$

$$u_k(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in D_k. \tag{1.13}$$

Доопределим функцию $u_k(x,t)$ на $B \times (0,T)$, полагая ее равной $\lambda_k(t)$ при $(x,t) \in \overline{E}_k \times (0,T)$. Используя стандартный метод Мозера, можно доказать, что с некоторой, зависящей лишь от n, ν_1, ν_2 и T, постоянной M выполнена оценка

$$|u_k(x,t)| \le M \quad \text{при} \quad (x,t) \in B \times (0,T). \tag{1.14}$$

Отметим просто проверяемую оценку нормы функции $u_k(x,t)$ в $V_2(Q)$.

Лемма 1.1. *Существует постоянная* K_1*, зависящая только от* n, ν_1, ν_2, T*, такая, что для функции* $u_k(x,t)$ *справедлива оценка*

$$\| u_k(x,t) \|^2_{V_2(Q_k)} \le K_1 \, 2^{-2k} \, C(E_k) \, . \tag{1.15}$$

Доказательство. Можно показать, что при $h>0$, $0<\tau<T-h$ справедливо интегральное тождество

$$\int_0^\tau \int_{D_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [u_k(x,t)]_{(h)} \, \psi(x,t) + \sum_{j=1}^n \left[a_j \left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x} \right) \right]_{(h)} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_j} - \left[a_0 \left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x} \right) \right]_{(h)} \psi(x,t) \right\} dx \, dt = 0 \tag{1.16}$$

для произвольной функции $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_k)$. В (1.16) использовано обозначение

$$[v(x,t)]_{(h)} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(x,s) \, ds \tag{1.17}$$

для усреднения по t.

Подставим в (1.16) вместо $\psi(x,t)$ функцию

$$\psi(x,t) = [u_k(x,t)]_{(h)} - \varphi(x) [\lambda_k(t)]_{(h)} \, , \tag{1.18}$$

где $\varphi(x) \in \mathcal{M}_k(E_k)$. Возможность такой подстановки, последующий предельный переход по h, а также соответствующие предельные переходы в дальнейших доказательствах работы следуют из свойств усреднения по t (см. [1, § 4, глава 2]).

В равенстве, получающемся из (1.16) подстановкой (1.18), интегрируем по частям в слагаемых, содержащих $\frac{\partial}{\partial t}[u_k(x,t)]_{(h)}$, переходим к пределу при $h \to 0$ и оцениваем, используя условия (1.1). В итоге имеем

$$\begin{aligned} &\int_{D_k} u_k^2(x,\tau) \, dx + \int_0^\tau \int_{D_k} \left| \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x} \right|^2 dx \, dt \le \\ &\le C_1 \left\{ \int_0^\tau \int_{D_k} \left(1 + \left| \frac{d\lambda_k(t)}{dt} \right| \right) u_k^2(x,t) \, dx \, dt + \int_{D_k} \left[\varphi^2(x) + 2^{-2k} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^2 \right] dx \right\} . \end{aligned} \tag{1.19}$$

В (1.19) и далее на протяжении всей работы через C_i, $i=1,2,\ldots$, обозначаем постоянные, зависящие лишь от n, ν_1, ν_2, T.

Используя неравенства Пуанкаре и Гроноулла, получаем из (1.19)

$$\int_{D_k} u_k^2(x,\tau) \, dx + \int_0^\tau \int_{D_k} \left| \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x} \right|^2 dx \, dt \le C_2 2^{-2k} \int_{D_k} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^2 dx$$

при $\tau \le T$. Отсюда в силу (1.11) следует оценка (1.15).

Замечание 1.1. Можно доказать, что определенная выше функция $u_k(x,t)$ неотрицательна. Для этого достаточно подставить в (1.16) $\psi(x,t) = \min\{[u_k(x,t)]_{(h)}, 0\}$ и провести такие же рассуждения, как при доказательстве леммы 1.1. Так же получается, что $u_k(x,t)\equiv 0$ при $t\le t_0-2^{-1-2k}$.

В следующих параграфах будут доказаны априорные оценки функций $u_k(x,t)$, $u_k(x,t)-u_{k+1}(x,t)$ на которых основано доказательство теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Предположим, что выполнены условия* 1), 2) *для функций* $a_j(x,t,u,p)$. *Тогда существует постоянная* M_1, *зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T, *такая, что для решения* $u_k(x,t)$ *задачи* (0.1), (1.12), (1.13) *при* $|x-x_0|^2+|t-t_0|\ge 2^{-2(k-2)}$ *справедлива оценка*

$$u_k(x,t)\le M_1\left\{\frac{2^{-2k}C(E_k)}{(|x-x_0|+\sqrt{|t-t_0|})^n}+|x-x_0|^2+|t-t_0|\right\}. \tag{1.20}$$

Теорема 1.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.2. *Тогда с зависящей лишь от* n, ν_1, ν_2, T *постоянной* M_2 *при* $|x-x_0|\le 2^{-k-4}$, $|t-t_0|\le 2^{-2(k+4)}$ *оценка*

$$|u_k(x,t)-u_{k+1}(x,t)|\le M_2\left\{2^{k(n-2)}C(E_k)+2^{-2k}\right\}. \tag{1.21}$$

Особенностью оценок (1.20), (1.21) при сравнении их с известными оценками решений квазилинейных параболических уравнений (в частности, из монографии [1]), является их локальный характер. Он выражается в мажорировании в (1.20) решения $u_k(x,t)$ функцией точки и в мажорировании в (1.21) разности $u_k(x,t)-u_{k+1}(x,t)$ вблизи точки (x_0,t_0). Отметим также неулучшаемость оценок (1.20), (1.21), в чем можно убедиться в случае линейных уравнений.

При доказательстве теоремы 1.1 еще понадобится

Лемма 1.2. *Существует постоянная* K_2, *зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T, *такая, что при* $k>k_0$ *справедлива оценка*

$$m(k)=\operatorname{vraimin}\{u_k(x,t):|x-x_0|\le 2^{-(k+5)},\ |t-t_0|\le 2^{-2(k+5)}\}\le K_2\{2^{k(n-2)}C(E_k)\}^{1/2}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Обозначим $\tau(k)=2^{-2(k+5)}$, $\widetilde{u}_k(x,t)=\min\left\{\dfrac{u_k(x,t)}{m(k)},1\right\}$. Из определения емкости получаем

$$\int\limits_{t_0-\tau(k)}^{t_0+\tau(k)}\int\limits_B\left|\frac{\partial\widetilde{u}_k(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt\ge C_3 2^{-2k}C\big(B(x_0,2^{-(k+5)})\big). \tag{1.23}$$

Заметим, что $C\big(B(x_0,2^{-(k+5)})\big)\ge C_4 2^{-k(n-2)}$, и в силу (1.15) имеем

$$\int\limits_{t_0-\tau(k)}^{t_0+\tau(k)}\int\limits_B\left|\frac{\partial\widetilde{u}_k(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt\le C_5[m(k)]^{-2}\cdot 2^{-2k}C(E_k). \tag{1.24}$$

Теперь (1.22) непосредственно следует из неравенств (1.23), (1.24).

Используя приведенные оценки, можно доказать теорему 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Укажем решение уравнения (0.1) в Q, удовлетворяющее условию (1.7) с функцией $f(x,t)\in C(\overline{Q})\cap W_2^1(Q)$ и разрывное в точке (x_0,t_0), как только не выполнено равенство (1.9). Итак, предполагаем ограниченность интеграла в левой части (1.9). Проверяется (см. [6]), что в этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n-2)} C(E_k) < \infty . \tag{1.25}$$

Следовательно, можно выбрать номер k_1 так, чтобы

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} \left\{ 2^{k(n-2)} C(E_k) + 2^{-2k} \right\} < \frac{1}{4M_2} , \tag{1.26}$$

где M_2 – постоянная из теоремы 1.3.

Покажем, что искомым, разрывным в (x_0,t_0), решением уравнения (0.1) может служить функция $u_{k_1}(x,t)$, определенная выше как решение задачи (0.1), (1.12), (1.13) при $k=k_1$. Соответствующую функцию $f(x,t)$ из условия (1.7) можно сейчас полагать равной единице.

Пусть δ – произвольное положительное число. В силу сходимости ряда в (1.25) и оценки (1.22) имеем $m(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно, по заданному числу δ можно выбрать номер $k_2=k_2(\delta)$ и точку $(x_\delta,t_\delta)\in Q$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$u_{k_2}(x_\delta,t_\delta) < \frac{1}{4}, \qquad |x_\delta - x_0|^2 + |t_\delta - t_0| < \delta^2 . \tag{1.27}$$

Оценим $u_{k_1}(x_\delta,t_\delta)$, используя неравенства (1.21), (1.26), (1.27). Имеем

$$u_{k_1}(x_\delta,t_\delta) \le u_{k_2}(x_\delta,t_\delta) + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} |u_{k+1}(x_\delta,t_\delta) - u_k(x_\delta,t_\delta)| < \frac{1}{2} .$$

Отсюда следует, что

$$\varliminf_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\ (x,t)\in Q}} u_{k_1}(x,t) \le \frac{1}{2} .$$

Это неравенство доказывает нерегулярность граничной точки (x_0,t_0), а значит, и теорему 1.1.

§ 2. Поточечная оценка функции $u_k(x,t)$

Доказательство неравенства (1.20) будет проводиться с использованием итерационного процесса, предложенного в эллиптическом случае Мозером и используемого в дальнейшем для оценки решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений многими авторами.

Начнем с получения вспомогательной интегральной оценки функции $u_k(x,t)$. Для краткости в этом параграфе опускаем индекс k в обозначениях $u_k(x,t)$, $\lambda_k(t)$, Q_k, D_k, E_k, заменяя их соответственно на $u(x,t)$, $\lambda(t)$, Q, D, E.

Пусть $2^{3-k} \le \rho \le R$, $G(\rho) = \{(x,t) : |x - x_0|^2 + |t - t_0| < \rho^2\}$; определим при $0 < \varepsilon < \rho$, $\mu \ge \mu(\rho,\varepsilon) = \operatorname{vrai}\max\{u(x,t) : (x,t) \in [G(\rho+\varepsilon) \setminus G(\rho-\varepsilon)] \cap Q\}$ множество

$$F(\rho,\mu) = Q \setminus G(\rho) \cup \{(x,t) \in Q \cap G(\rho) : u(x,t) \le \mu\}$$

и функцию

$$u^{(\mu)}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{при } (x,t) \in Q \setminus G(\rho), \\ \min[u(x,t),\mu] & \text{при } (x,t) \in Q \cap G(\rho). \end{cases} \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *При* $2^{3-k} \le \rho \le R$, $0 < \varepsilon < \rho$, $\mu \ge \mu(\rho,\varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \le t \le T} \int_D |u^{(\mu)}(x,t)|^2\,dx + \iint_{F(\rho,\mu)} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|^2 dx\,dt \le K_3 \mu \Lambda(E,\rho), \tag{2.2}$$

где

$$\Lambda(E,\rho) = \{2^{-2k} C(E_k)\}^{1/2} \{2^{-2k} C(E_k) + \rho^{n+2}\}^{1/2} \tag{2.3}$$

и K_3 *– постоянная, зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T.

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (1.16) функцию

$$\psi(x,t) = [u(x,t)]_{(h)}^{(\mu)} - \varphi(x)\lambda_{(h)}^{(\mu)}(t) \quad \text{при} \quad 0 < h < \varepsilon^2.$$

Здесь $[u(x,t)]_{(h)}^{(\mu)}$ определяется равенством (2.1) с заменой в правой части $u(x,t)$ на $[u(x,t)]_{(h)}$,

$$\lambda_{(h)}^{(\mu)}(t) = \min\{[\lambda(t)]_{(h)}, \mu\}, \ \varphi(x) \in \mathcal{M}_k(E_k).$$

Преобразуем слагаемое, возникающее после указанной подстановки и содержащее $\partial[u(x,t)]_{(h)} / \partial t$. Имеем

$$\int_0^\tau \int_D \frac{\partial}{\partial t} [u(x,t)]_{(h)} \{[u(x,t)]_{(h)}^{(\mu)} - \varphi(x)\lambda_{(h)}^{(\mu)}(t)\}\,dx\,dt =$$

$$= \int_D \left\{ \frac{1}{2} \left(u(x,\tau)]_{(h)}^{(\mu)} \right)^2 + \mu \left([u(x,\tau)]_{(h)} - [u(x,\tau)]_{(h)}^{(\mu)} \right) - [u(x,\tau)]_{(h)}\, \varphi(x) \lambda_{(h)}^{(\mu)}(\tau) \right\} dx + \int_0^\tau \int_D [u(x,t)]_{(h)}\, \varphi(x) \frac{d\lambda_{(h)}^{(\mu)}(t)}{dt}\, dx\,dt.$$

Используя это представление, предельным переходом по h в интегральном тождестве с выбранной функцией $\psi(x,t)$ получаем

$$\begin{aligned} &\int_D \left\{ \frac{1}{2} [u^{(\mu)}(x,t)]^2 + \mu[u(x,\tau) - u^{(\mu)}(x,\tau)] - u(x,\tau)\varphi(x)\lambda^{(\mu)}(\tau) \right\} dx + \\ &+ \int_0^\tau \int_D \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u^{(\mu)}(x,t) - \varphi(x)\lambda^{(\mu)}(t) \right] - \right. \\ &\left. - a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left[u^{(\mu)}(x,t) - \varphi(x)\lambda^{(\mu)}(t) \right] + u(x,t)\varphi(x) \frac{d\lambda^{(\mu)}(t)}{dt} \right\} dx\,dt = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\lambda^{(\mu)}(t) = \min\{\lambda(t), \mu\}$.

Оценим слагаемые в левой части (2.4), используя условия (1.1), оценку (1.15) и очевидное неравенство

$$\int_0^T \left| \frac{d\lambda^{(\mu)}(t)}{dt} \right| dt \le 2\mu.$$

При соответствующем выборе функции $\varphi(x)$ получаем из (2.4)

$$\int_D \left[u^{(\mu)}(x,\tau)\right]^2 dx + \iint_{F(\rho,\mu)} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt \le$$
$$\le C_6 \left\{ \mu 2^{-2k} C(E) + \iint_{F(\rho,\mu)} u^2(x,t)\,dx\,dt + \int_0^\tau \int_D \left[u(x,t) + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 \right] u^{\mu}(x,t)\,dx\,dt \right\}. \qquad (2.5)$$

Последний интеграл в правой части (2.5) оценим, используя неравенство Гёльдера, оценку (1.15) и замечая, что $u(x,t) \equiv 0$ при $t \le t_0 - 2^{1-2k}$. Имеем

$$\int_0^\tau \int_D \left[u(x,t) + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| \right] u^{\mu}(x,t)\,dx\,dt \le \mu \iint_{Q \cap G(\rho)} \left[u(x,t) + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| \right] dx\,dt + \iint_{F(\rho,\mu)} \left[u(x,t) + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right| \right] u^{\mu}(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le \mu \iint_{F(\rho,\mu)} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt + C_\tau \left\{ \iint_{F(\rho,\mu)} u^2(x,t)\,dx\,dt + \mu [2^{-2k} C(E)]^{1/2} [\rho^{n+2}]^{1/2} \right\}.$$

Отсюда и из (2.5) следует

$$\int_D |u^{(\mu)}(x,\tau)|^2\,dx + \iint_{F(\rho,\mu)} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt \le C_8 \left\{ \int_0^\tau \int_D [u^{(\mu)}(x,t)]^2\,dx\,dt + \mu \Lambda(E,\rho) \right\}.$$

Оценка (2.2) получается теперь применением неравенства Гронуолла, чем и заканчивается доказательство леммы 2.1.

Докажем еще одно вспомогательное предложение, которое будет использоваться в последующем при выводе локальных оценок максимума решений из соответствующих интегральных неравенств.

Лемма 2.2. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* R^n, $Q = \Omega \times (0,T)$, *и предположим, что для некоторых неотрицательных функций* $v(x,t) \in V_2(Q)$, $\varphi(x,t) \in C_0^\infty(\Omega \times R^1)$ *при произвольных неотрицательных числах* r, s *справедливо неравенство*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \le t \le T} \int_\Omega v^{r+2}(x,t)\varphi^{s+2}(x,t)\,dx + \int_0^T \int_\Omega v^r(x,t) \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|^2 \varphi^{s+2}(x,t)\,dx\,dt \le K(r+s+1)^2 \int_0^T \int_\Omega v^{r+2}(x,t)\varphi^s(x,t)\,dx\,dt \qquad (2.6)$$

с независящей от r, s *постоянной K. Тогда функция* $v(x,t)$ *ограничена на множестве* $Q' = \{(x,t) \in Q : \varphi(x,t) \ge 1\}$ *и для нее справедлива оценка*

$$\operatorname{vrai\,max}\{v^2(x,t) : (x,t) \in Q' \le C\left\{K^{(n+2)/2} + L^{n+2}\right\} \int_0^T \int_\Omega v^2(x,t)\varphi^s(x,t)\,dx\,dt \qquad (2.7)$$

с $L + \max\{|\partial \varphi(x,t)/\partial x| : (x,t) \in Q\}$ *и постоянной C, зависящей лишь от n.*

Доказательство. Пусть $q = 2(n+2)/n$. В условиях леммы при $r \ge q-2$, $s \ge q-2$ функция

$$w(x,t) = \{v^{r+2}(x,t)\varphi^{s+2}(x,t)\}^{1/q}$$

принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}_2(Q)$ и в силу теоремы вложения для нее справедлива оценка

$$\| w(x,t) \|_{L_q(Q)} \le C^{(1)} \| w(x,t) \|_{V_2(Q)} \qquad (2.8)$$

с зависящей лишь от n постоянной $C^{(1)}$.

Используя неравенство (2.6), получаем из (2.8)

$$\left\{\int_0^T\int_\Omega v^{r+2}(x,t)\varphi^{s+2}(x,t)\,dx\,dt\right\}^\theta \le C^{(2)}(r+s+1)^2[K+L^2]\int_0^T\int_\Omega v^{(r+2)\theta}(x,t)\varphi^{(s+2)\theta-2}(x,t)\,dx\,dt \qquad (2.9)$$

при $\theta=\dfrac{n}{n+2}$. Выбирая теперь $r=r_i=2\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^i-2$, $s=s_i+(n+4)\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^i-n-4$, получим из (2.9) для

$$J_i=\int_0^T\int_\Omega v^{r_i+2}(x,t)\varphi^{s_i+2}(x,t)\,dx\,dt$$

рекуррентное неравенство

$$J_i^\theta \le C^{(3)}\left(\frac{n+2}{2}\right)^{2i}[K+L^2]\,J_{i-1}, \qquad (2.10)$$

справедливое при $i=1,2,...$ с постоянной $C^{(3)}$, зависящей лишь от n.

Последовательным применением неравенства (2.10) получаем

$$J_i^{\theta^i} \le \left(\frac{n+2}{2}\right)^{2(i\theta^{i-1}+...+1)}\{C^{(3)}[K+L^2]^{\,\theta^{i-1}+...+1}J_0. \qquad (2.11)$$

Если теперь M таково, что

$$\mu_M=\text{mes}\{(x,t)\in Q':v(x,t)\ge M\}>0,$$

то при всех $i=1,2,...$ имеем

$$J_i^{\theta^i}\ge M^2\mu_M^{\theta^i}.$$

Отсюда и из (2.11) при i, стремящемся к бесконечности, получаем

$$M^2\le C^{(4)}[K+L^2]^{\frac{n+2}{n}}\int_0^T\int_\Omega v^2(x,t)\varphi^2(x,t)\,dx\,dt,$$

что и доказывает оценку (2.7).

В дальнейшем понадобятся еще две леммы, доказательство которых можно найти, например, в [7, § 1, глава 8].

Лемма 2.3. *Для произвольной функции* $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B(x_0,\rho))$ *при* $0<\sigma<\rho$ *имеет место неравенство*

$$\int_{B(x_0,\sigma)} v^2(x)\,dx\le C\sigma^2\int_{B(x_0,\rho)}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right|^2 dx \qquad (2.12)$$

с *постоянной C, зависящей лишь от n.*

Лемма 2.4. *Пусть* $\{\alpha_i\}$ *– ограниченная числовая последовательность такая, что при* $i=1,2,...$ *выполнено неравенство*

$$\alpha_i\le A\alpha_{i+1}^\delta a^i$$

с положительными постоянными A, a и числом δ*, принадлежащим интервалу* (0,1). *Тогда справедлива оценка*

$$\alpha_1 \le CA^{\frac{1}{1-\delta}}$$

с постоянной C, зависящей лишь от δ*, a.*

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $2^{3-k} \le \rho \le R$. Определим две числовые последовательности $\{\rho_{1,i}\}$, $\{\rho_{2,i}\}$ равенствами

$$\rho_{1,i}^2 = \frac{\rho^2}{2}(1+2^{-i}), \quad \rho_{2,i}^2 = \frac{\rho^2}{2}(3-2^{-i}), \quad i = 1,2,...,$$

и бесконечно дифференцируемые функции $\chi_i(s)$, $s \in R^1$, равные единице при $\rho_{1,i}^2 < s < \rho_{2,i}^2$, имеющие носители в интервале $\rho_{1,i+1}^2 < s < \rho_{2,i+1}^2$ и такие, что $\left|\frac{d}{ds}\chi_i(s)\right| \le 2^{i+3}\rho^{-2}$, $0 \le \chi_i(s) \le 1$.

Пусть $\psi_i(x,t) = \chi_i(|x-x_0|^2 + |t-t_0|)$, подставим в интегральное тождество (1.16) функцию

$$\psi(x,t) = [u(x,t)]_{(h)}^{r+1}\,\psi_i^{s+2}(x,t)$$

с произвольными неотрицательными числами r, s. Интегрируя по частям в слагаемом, содержащем $\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]_{(h)}$, переходя к пределу при $h \to 0$ и оценивая на основании неравенств (1.1), получаем

$$\int_D u^{r+2}(x,\tau)\psi_i^{s+2}(x,\tau)\,dx + \int_0^\tau\int_D u^r(x,t)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 \psi_i^{s+2}(x,t)\,dx\,dt \le C_9\frac{2^{2i}}{\rho^2}(r+s+1)\int_0^\tau\int_D u^{r+2}(x,t)\psi_i^s(x,t)\,dx\,dt. \quad (2.13)$$

Отсюда, применяя лемму 2.2, получаем для

$$m_i = m_i(\rho) = \operatorname{vrai\,max}\{u(x,t) : (x,t) \in Q, \rho_{1,i}^2 \le |x-x_0|^2 + |t-t_0| \le \rho_{2,i}^2\} \quad (2.14)$$

оценку

$$m_i^2 \le C_{10}\left(\frac{2^i}{\rho}\right)^{n+2}\int_0^\tau\int_D u^2(x,t)\psi_i^2(x,t)\,dx\,dt. \quad (2.15)$$

Оценим интеграл в (2.15), используя леммы 2.3, 2.1. Имеем

$$\int_0^T\int_D u^2(x,t)\psi_i^2(x,t)\,dx\,dt \le \iint_{G(\rho_i+1)\cap Q} |u^{(m_{i+1})}(x,t)|^2\,dxdy \le C_{11}\rho^2\int_{F(\rho_i+1,\,m_{i+1})}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt \le C_{12}m_{i+1}\rho^2\Lambda(E,\rho). \quad (2.16)$$

Здесь ρ_{i+1} – такое число, что $\rho_{i+1} < \rho_{2,i+1}$ и $\chi_{i+1}(s) \equiv 0$ при $s \ge \rho_{i+1}$, множества $G(\rho)$, $F(\rho,\mu)$ определены в начале параграфа. Из (2.15), (2.16) следует, что

$$m_i^2 \le C_{13}\frac{2^{i(n+2)}}{\rho^n}\Lambda(E,\rho)\,m_{i+1},$$

и далее в силу леммы 2.4 получаем

$$m_1 \le C_{14}\frac{1}{\rho^n}\Lambda(E,\rho) .$$

Отсюда и из (2.14) имеем

$$\operatorname{vrai}\max\{u(x,t):(x,t)\in Q,\ |x-x_0|^2+|t-t_0|=\rho^2\}\le C_{14}\frac{\Lambda(E,\rho)}{\rho^n},$$

что и доказывает теорему 1.2.

В заключение отметим, что небольшим изменением доказательства теоремы 1.2 может быть доказана

Лемма 2.5. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.2. *Тогда существует постоянная* K_3, *зависящая лишь от* n,ν_1,ν_2,T, *такая, что для решения* $u_k(x,t)$ *задачи* (0.1), (1.12), (1.13) *справедлива оценка*

$$\operatorname{vrai}\max\{u_k(x,t):(x,t)\in Q_k,|x-x_0|^2+|t-t_0|\ge 2^{-2(k-3)}\}\le K_3\{2^{k(n-2)}C(E_k)+2^{-2k}\} . \tag{2.17}$$

Доказательство. Опускаем снова индексы k в обозначениях $u_k(x,t)$, D_k, E_k. Достаточно доказать, что при $\rho\ge 2^{(k-3)}$ выполнено неравенство

$$\mu(\rho,2^{-k})\le C_{15}\{2^{k(n-2)}C(E_k)+2^{-2k}\}, \tag{2.18}$$

где $\mu(\rho,\varepsilon)$ – величина, определенная в начале параграфа.

При $\rho=2^{-(k-3)}$ неравенство (2.18) следует из (1.20). Если при некотором $\rho\ge 2^{-(k-3)}$ для определяемого неравенством (2.14) значения $m_1(\rho)$ выполнена оценка $m_1(\rho)\le\mu(2^{-(k-3)},2^{-k})$, то, следовательно, для рассматриваемого ρ справедливо неравенство (2.18).

Если же при каком-нибудь ρ выполнена оценка $m_1(\rho)>\mu(2^{-(k-3)},2^{-k})$, то при всех $i=1,2,...$ имеем $m_{i+1}(\rho)>\mu(2^{-(k-3)},2^{-k})$ и произведем изменения в (2.16). Замечая, что в этом случае

$$F(\rho_{i+1},m_{i+1}(\rho))\subset F(2^{-(k-3)},m_{i+1}(\rho)),$$

получаем вместо (2.16)

$$\int_0^T\int_D u^2(x,t)\psi_i^2(x,t)\,dx\,dt\le C_{11}\rho^2\int_{F(2^{-(k-3)},\,m_{i+1}(\rho))}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt . \tag{2.19}$$

Далее воспользуемся оценкой (2.2) для последнего интеграла и получаем из (2.15), (2.19), (2.2) неравенство

$$m_i^2(\rho)\le C_{16}2^{i(n+2)}\frac{\Lambda(E,2^{-(k-3)})}{\rho^n}m_{i+1}(\rho)$$

Отсюда в силу леммы 2.4 следует для рассматриваемого ρ оценка (2.18), что и заканчивает доказательство леммы 2.5.

§ 3. Интегральные оценки $u_k(x,t)-u_{k+1}(x,t)$

Нам понадобятся вспомогательные функции $v_k(x)$, $w_k(x)$ определяемые соответственно как решения задач

$$\Delta v_k(x)=0, \quad x\in D_k=B\setminus E_k, \quad v_k(x)-h(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_k)\,, \tag{3.1}$$

$$\Delta w_k(x)=0, \quad x\in D_k=B\setminus E^{(k)}, \quad w_k(x)-h(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D^{(k)})\,. \tag{3.2}$$

Функция $h(x)$ и множества E_k, $E^{(k)}$ введены ранее в § 1. Будем продолжать функции $v_k(x)$, $w_k(x)$ на весь шар B, полагая их равными единице соответственно на E_k, $E^{(k)}$.

Лемма 3.1. *Существует зависящая лишь от* n *постоянная* K *такая, что имеют место оценки*

$$\begin{aligned} &\| v_k(x)\|_{W_2^1(D_k)}\le KC(E_k),\\ &\| w_k(x)\|_{W_2^1(D^{(k)})}\le KC(E^{(k)}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство оценок (3.3) содержится в [7, § 3, глава 8].

Обозначим далее

$$\delta_k(x,t)=u_k(x,t)-u_{k+1}(x,t)\,, \tag{3.4}$$

и пусть

$$d_k=\operatorname{vrai}\max\{|\,\delta_k(x,t):(x,t)\in Q_k,\,|x-x_0|^2+|t-t_0|\ge 2^{-2(k-3)}\}\,. \tag{3.5}$$

Введем для произвольной функции $f(x,t)$ и произвольных чисел $C_1, \tilde N_2$ при $\tilde N_1<\tilde N_2$ обозначения

$$[f(x,t)]_\pm=\max\{\pm f(x,t),0\}, \qquad [f(x,t)]_{(C_1,C_2)}=\max\{\min[f(x,t)],C_1,C_2\}\,.$$

С учетом этих обозначений определим при $\mu>0$, $t_k=t_0+2^{-2(k-1)}$ множества $F(\mu)$, $F^\pm(\mu)$, $T(\mu)$ равенствами:

$$F(\mu)=F^+(\mu)\cup F^-(\mu)\,,$$

$$F^\pm(\mu)=\{(x,t)\in B\times[0,t_k]:\pm[\delta_k(x,t)]_{(-\mu,\mu)}\ge\mu\,\overline{v}(x,t)+\mu\overline{w}(x,t)\}\,,$$

$$T(\mu)=\{(x,t)\in B\times[0,t_k]:|\,\delta_k(x,t)|<\mu\}\,,$$

где

$$\begin{aligned} &\overline{v}_k(x,t)=v_k(x)\omega(2^{k-1}|x-x_0|)\{\lambda_{k-2}(t)-\lambda_{k+2}(t)\},\\ &\overline{w}_k(x,t)=w_k(x)\{\omega(2^{k-1}|x-x_0|)-\omega(2^{k+2}|x-x_0|)\}\lambda_{k-2}(t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь $\omega(s), \lambda_k(t)$ – функции, введенные в § 1. Отметим, что функции $\overline{v}_k(x,t), \overline{w}_k(x,t)$ неотрицательны.

Далее, для произвольного множества $E\subset B\times[0,T]$ через $\chi_E(x,t)$ обозначим его характеристическую функцию.

Теорема 3.1. *При произвольном* $\mu>d_k$ *имеет место оценка*

$$\underset{0\le t\le t_k}{\operatorname{vrai}\max}\int_B |[\delta_k(x,t)]_{(-\mu,\mu)}|^2 \chi_{F(\mu)}(x,t)\,dx + \iint_{T(\mu)\cap F(\mu)} \left|\frac{\partial \delta_k(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt$$
$$\le K_4\mu\left\{2^{-2k}C(E_k)\right\}^{1/2}\left\{2^{-2k}C(E_k)+2^{-(2+n)k}\right\} \tag{3.7}$$

с постоянной K_4*, зависящей лишь от* n, ν_1, ν_2.

Доказательство. В соответствии с равенством $F(\mu)=F^+(\mu)\cup F^-(\mu)$ доказательство оценки (3.7) сводится к доказательству оценок двух выражений, получающихся соответственно из левой части (3.7) заменой $F(\mu)$ на $F^+(\mu)$ и $F^-(\mu)$. Ограничимся доказательством только оценки, соответствующей функции $F^+(\mu)$.

Определим при $h<2^{-2(k+2)}$ функцию

$$\psi(x,t)=\left\lfloor[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)}-\mu[\overline{v}_k(x,t)]_{(h)}-\mu[\overline{w}_k(x,t)]_{(h)}\right\rfloor_+ , \tag{3.8}$$

где $\delta_{k,h}(x,t)=[u_k(x,t)]_{(h)}-[u_{k+1}(x,t)]_{(h)}$ и, как и прежде, $[\cdot]_{(h)}$ обозначает усреднение по t.

Проверим, что определенная равенством (3.8) функция $\psi(x,t)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(D_k\times[0,t_k])$ и, следовательно, может быть выбрана в качестве пробной функции в интегральных тождествах вида (1.16) для $u_k(x,t)$, $u_{k+1}(x,t)$ при $\tau\le t_k$. Достаточно проверить, что $\psi(x,t)\equiv 0$ при $x\in E_k$, $t\in[0,t_k]$.

Пусть сначала $x\in E_{k+1}$. Тогда

$$[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)}=\left\lfloor[\lambda_k(t)]_{(h)}-[\lambda_{k+1}(t)]_{(h)}\right\rfloor_{(0,\mu)},$$

и при t, удовлетворяющем одному из неравенств $|t-t_0|\le 3\cdot 2^{-2(k+2)}$, $|t-t_0|\ge 33\cdot 2^{-2(k+2)}$, имеем $[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)}=0$. Следовательно, при таких (x,t) $\psi(x,t)=0$. Если же $3\cdot 2^{-2(k+2)}\le|t-t_0|\ge 33\cdot 2^{-2(k+2)}$, то $[\lambda_{k-2}(t)]_{(h)}-[\lambda_{k+2}(t)]_{(h)}=1$, и в этом случае для $x\in E_{k+1}$ имеем

$$\mu[\overline{v}_k(x,t)]_{(h)}=\mu\ge[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)}$$

и отсюда для рассматриваемых значений x, t получаем $\psi(x,t)=0$. Тем самым показали, что

$$\psi(x,t)=0 \quad \text{при} \quad x\in E_{k+1}, \quad t\in[0,t_k]. \tag{3.9}$$

Пусть, далее, $x\in E^{(k)}$. Тогда в силу равенства $u_{k+1}(x,t)$ нулю при $t\le t_0-2^{1-2k}$ получаем $[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)}=0$, если $t\le t_0-33\cdot 2^{-2(k+2)}$. При t, удовлетворяющем неравенству $t_0-33\cdot 2^{-2(k+2)}\le t\le t_k$, имеем $[\lambda_{k-2}(t)]_{(h)}=0$, и значит,

$$\mu[\overline{w}_k(x,t)]_{(h)}=\mu\ge[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)}.$$

Отсюда следует, что

$$\psi(x,t)=0 \quad \text{при} \quad x\in E^{(k)}, \quad t\in[0,t_k]. \tag{3.10}$$

Используя (3.9) и (3.10), получаем равенство (1.16) при $\tau \le t_k$ и аналогичное равенство для $u_{k+1}(x,t)$ с функцией $\psi(x,t)$, определяемой согласно (3.8). Вычитая так получаемые равенства одно из другого, имеем

$$\int_0^\tau \int_B \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \delta_{k,h}(x,t) \left[[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)} - \mu [\overline{v}_k(x,t) + \overline{w}_k(x,t)]_{(h)} \right]_+ + \right.$$
$$+ \sum_{j=1}^n \left(\left[a_j\left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) - a_j\left(x,t,u_{k+1},\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right) \right]_{(h)} \right) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_i} - \tag{3.11}$$
$$\left. - \left(\left[a_0\left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) - a_0\left(x,t,u_{k+1},\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right) \right]_{(h)} \right) \psi(x,t) \right\} dx\,dt = 0\,.$$

Преобразуем интеграл от первого слагаемого подинтегрального выражения в (3.11). Имеем

$$\int_0^\tau \int_B \frac{\partial}{\partial t} \delta_{k,h}(x,t) \left[[\delta_{k,h}(x,t)]_{(-\mu,\mu)} - \mu [\overline{v}_k(x,t) + \overline{w}_k(x,t)]_{(h)} \right]_+ dx\,dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int_B \left\{ \left[[\delta_{k,h}(x,\tau)]_{(-\mu,\mu)} - \mu [\overline{v}_k(x,t) + \overline{w}_k(x,t)]_{(h)} \right]_+^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left(\delta_{k,h}(x,\tau) - [\delta_{k,h}(x,\tau)]_{(-\mu,\mu)} \right) \left[[\delta_{k,h}(x,\tau)]_{(-\mu,\mu)} - \mu [\overline{v}_k(x,t) + \overline{w}_k(x,t)]_{(h)} \right]_+ \right\} dx + \tag{3.12}$$
$$+ \mu \int_0^\tau \int_B \frac{\partial}{\partial t} [\overline{v}_k(x,t) + \overline{w}_k(x,t)]_{(h)} \left[[\delta_{k,h}(x,\tau)] - \mu [\overline{v}_k(x,t) + \overline{w}_k(x,t)]_{(h)} \right]_+ dx\,dt.$$

Отметим, что второе слагаемое под знаком первого интеграла правой части (3.11) неотрицательно.

Используя (3.12), получаем из (3.11) предельным переходом по h при $h \to 0$ и применением неравенств (1.1), (1.15), (2.12), (3.3):

$$\int_B [\delta_k(x,\tau)]_{(-\mu,\mu)}^2 \chi_{F^+(\mu)}(x,\tau)\,dx + \int_0^\tau \int_B \left| \frac{\partial \delta_k(x,t)}{\partial x} \right|^2 \chi_{F^+(\mu) \cap T(\mu)}(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le C_{12} \left\{ \mu\, 2^{-2k} C(E_k) + \int_0^\tau \int_B \delta_k^2(x,t) \chi_{F^+(\mu) \cap T(\mu)}(x,t)\,dx\,dt + \right. \tag{3.13}$$
$$\left. + \int_0^\tau \int_B \left\{ |\,\delta_k(x,t)\,| + \left| \frac{\partial \delta_k(x,t)}{\partial x} \right| \right\} [\delta_k(x,t)]_{(-\mu,\mu)} \chi_{F^+(\mu)}(x,t)\,dx\,dt \right\}.$$

Отметим, что на множестве $F^+(\mu)$ функция $[\delta_k(x,t)]_{(-\mu,\mu)}$ неотрицательна.

Оценим последний интеграл в правой части (3.13), представляя его в виде суммы двух интегралов соответственно по множествам $F^+(\mu) \cap T(\mu)$ и $F^+(\mu) \setminus T(\mu)$. Используя неравенство Гёльдера и оценку (1.15), получаем

$$\int_0^\tau \int_B \left\{ |\,\delta_k(x,\tau)\,| + \left| \frac{\partial \delta_k(x,t)}{\partial x} \right| \right\} [\delta_k(x,t)]_{(-\mu,\mu)} \chi_{F^+(\mu)}(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le \varepsilon \int_0^\tau \int_B \left| \frac{\partial \delta_k(x,t)}{\partial x} \right|^2 \chi_{F^+(\mu) \cap T(\mu)}(x,t)\,dx\,dt + C_\varepsilon \int_0^\tau \int_B \delta_k(x,\tau) \chi_{F^+(\mu) \cap T(\mu)}(x,t)\,dx\,dt + \tag{3.14}$$
$$+ C_{13} \mu \{2^{-2k} C(E_k)\}^{1/2} \{\mathrm{mes}[F^+(\mu) \setminus T(\mu)]\}^{1/2}.$$

И далее имеем

$$\operatorname{mes}[F^{+}(\mu)\setminus T(\mu)]\le C_{14}2^{-k(n+2)}, \tag{3.15}$$

так как в силу условия $\mu > d_k$ и равенства (3.8) следует включение

$$F^{+}(\mu)\setminus T(\mu)\subset\{(x,t):|x-x_0|^2+|t-t_0|\le 2^{-2(k-3)}\}.$$

Теперь из неравенств (3.13)–(3.15) получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_B[\delta_k(x,\tau)]_{(-\mu,\mu)}\chi_{F^{+}(\mu)}(x,\tau)\,dx+\int\limits_0^\tau\int\limits_B\left|\frac{\partial\delta_k(x,t)}{\partial x}\right|^2\chi_{F^{+}(\mu)\cap T(\mu)}(x,t)\,dx\,dt\le\\&\le C_{15}\left\{\int\limits_0^\tau\int\limits_B[\delta_k(x,t)]^2_{(-\mu,\mu)}\chi_{F^{+}(\mu)}(x,t)\,dx\,dt+\mu[2^{-2k}C(E_k)]^{1/2}[2^{-2k}C(E_k)+2^{-k(n+2)}]^{1/2}\right\}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

И применяя неравенство Гронуолла, получаем из (3.16)

$$\begin{aligned}&\operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T}\int\limits_B[\delta_k(x,t)]^2_{(-\mu,\mu)}\chi_{F^{+}(\mu)}(x,t)\,dx+\iint\limits_{F^{+}(\mu)\cap T(\mu)}\left|\frac{\partial\delta_k(x,t)}{\partial x}\right|^2dx\,dt\le\\&\le C_{16}\mu[2^{-2k}C(E_k)]^{1/2}[2^{-2k}C(E_k)+2^{-k(n+2)}]^{1/2}.\end{aligned}$$

Тем самым доказано неравенство, получающееся из (3.7) заменой $F(\mu)$ на $F^{+}(\mu)$. Аналогично устанавливаем соответствующее неравенство для $F^{-}(\mu)$. Из этих двух неравенств следует оценка (3.7), что и завершает доказательство теоремы 3.1.

§ 4. Доказательство теоремы 1.3

Из интегрального тождества (1.16) и соответствующего тождества для $u_{k+1}(x,t)$ следует, что для произвольной функции $\psi(x,t)\in\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_k)$ при $0\le\tau\le T$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_k}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\delta_{k,h}(x,t)\psi(x,t)+\sum_{j=1}^n\left[a_j\left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)-a_j\left(x,t,u_{k+1},\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right)\right]_{(h)}\times\right.\\&\left.\times\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}-\left[a_0\left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)-a_0\left(x,t,u_{k+1},\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right)\right]_{(h)}\psi(x,t)\right\}dx\,dt=0.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Определим числовые последовательности $\{\rho_i\},\{\sigma_i\}$ равенствами

$$\rho_i=2^{-(k+4)}(2-2^{-i}),\quad \sigma_i=2^{-2(k+4)}(2-2^{-i}),\quad i=1,2,\dots,$$

и бесконечно дифференцируемые функции $f_i(x)$, $g_i(t)$, $x\in R^n$, $t\in R^1$ так, чтобы:

а) $f_i(x)\equiv1$ на множестве $\{x:|x-x_0|\le\rho_i\}$, $f_i(x)\equiv0$ вне множества $\{x:|x-x_0|\le\rho_{i+1}\}$, $0\le f_i(x)\le1$, $\left|\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x}\right|\le2^{k+i+6}$,

б) $g_i(t)\equiv1$ на множестве $\{t:|t-t_0|\le\sigma_i\}$, $g_i(t)\equiv0$ вне множества $\{t:|t-t_0|\le\sigma_{i+1}\}$, $0\le g_i(t)\le1$, $\left|\dfrac{\partial g_i(t)}{\partial t}\right|\le2^{2(k+i+6)}$.

Пусть

$$\psi(x,t)=[\delta_{k,h}(x,t)]^r\,\delta_{k,h}(x,t)\,\varphi_i^{s+2}(x,t)\,,$$

где $\varphi_i(x,t)=f_i(x)g_i(t)$, r,s – произвольные неотрицательные числа. Проверяется принадлежность $\psi(x,t)$ пространству $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_k)$. Подставляя $\psi(x,t)$ в тождество (4.1), интегрируя по частям в слагаемом, содержащем $\frac{\partial}{\partial t}\delta_{k,h}(x,t)$, и переходя к пределу при $h\to 0$, имеем

$$\int\limits_{D_k}\frac{1}{r+2}|\delta_k(x,\tau)|^{r+2}\varphi_i^{s+2}(x,\tau)\,dx+\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_k}\left\{-|\delta_k(x,t)|^{r+2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i^{s+2}(x,t)+\sum_{j=1}^n\left[a_j\left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)-a_j\left(x,t,u_{k+1},\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[|\delta_k(x,t)|^r\,\delta_k(x,t)\varphi_i^{s+2}(x,t)\Big]-\left[a_0\left(x,t,u_k,\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)-a_0\left(x,t,u_{k+1},\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right)\right]|\delta_k(x,t)|^r\,\delta_k(x,t)\varphi_i^{s+2}(x,t)\right\}dx\,dt=0. \tag{4.2}$$

Оценим подинтегральное выражение в (4.2), используя условие (1.1) и неравенство Юнга. Получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{D_k}|\delta_k(x,\tau)|^{r+2}\,\varphi_i^{s+2}(x,\tau)\,dx+\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_k}|\delta_k(x,t)|^r\left|\frac{\partial\delta_k(x,t)}{\partial x}\right|^2\varphi_i^{s+2}(x,t)\,dx\,dt\le\\&\le C_{17}(r+s+1)^2\cdot 2^{2(k+i)}\int\limits_0^\tau\int\limits_{D_k}|\delta_k(x,t)|^{r+2}\varphi_i^{s+2}(x,t)\,dx\,dt\end{aligned}\tag{4.3}$$

с постоянной C_{17}, зависящей лишь от ν_1, ν_2.

Из неравенства (4.3) на основании леммы 2.2 следует оценка

$$\mu^2(i)\le C_{18}\cdot 2^{(k+i)(n+2)}\iint\limits_{R(i+1)}|\delta_k(x,t)|^2\,\varphi_i^2(x,t)\,dx\,dt\,, \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned}&\mu(i)=\operatorname{vrai}\max\{|\delta_k(x,t)|:(x,t)\in R(i)\},\\&R(i)=\{(x,t)\in Q_k:|x-x_0|\le\rho_i,\,|t-t_0|\le\sigma_i\}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Дальше рассматриваем две возможности: 1) $\mu(i+1)\le d_k$, 2) $\mu(i+1)>d_k$, где d_k определяется равенством (3.8).

Если $\mu(i+1)\le d_k$, из определения $\mu(i+1)$ имеем

$$\operatorname{vrai}\max\{|\delta_k(x,t)|:|x-x_0|\le 2^{-(k+4)},\,|t-t_0|\le 2^{-2(k+4)}\}\le\mu(i+1)\le d_k\,,$$

и неравенство (1.21) следует из оценки (2.17) для $u_k(x,t)$ и аналогичной оценки для $u_{k+1}(x,t)$.

Пусть теперь $\mu(i+1)>d_k$, и оценим интеграл в правой части (4.4). Предварительно покажем, что для определяемого равенством (4.5) множества $R(i+1)$ справедливо включение $R(i+1)\subset F(\mu(i+1))$, где $F(\mu)$ – множество, введенное в § 3.

Если $(x,t)\in R(i+1)$, то $|x-x_0|\le 2^{-(k+3)}$, $|t-t_0|\le 2^{-2(k+3)}$ и для таких (x,t) имеем

$$\lambda_{k-2}(t)-\lambda_{k+2}(t)=0,\quad \omega(2^{k-1}|x-x_0|)-\omega(2^{k+2}|x-x_0|)=0\,.$$

Следовательно, при $(x,t)\in R(i+1)$ определенные равенством (3.9) функции $\overline{v}_k(x,t)$, $\overline{w}_k(x,t)$ равны нулю. Отсюда получаем включение $R(i+1)\subset F(\mu(i+1))$, а значит, и равенство

$$\chi_{F(\mu(i+1))}(x,t)\equiv 1 \qquad \text{при} \qquad (x,t)\in R(i+1)$$

для характеристической функции множества $F(\mu(i+1))$.

Используя оценку (3.10), имеем

$$\iint\limits_{R(i+1)} |\,\delta_k(x,t)|^2\,\varphi_i^2(x,t)\,dx\,dt = \iint\limits_{R(i+1)} |\,[\delta_k(x,t)]_{(-\mu(i+1),\mu(i+1))}\,|^2\,\varphi_i^2(x,t)\,dx\,dt =$$
$$= \iint\limits_{R(i+1)} |\,[\delta_k(x,t)]_{(-\mu(i+1),\mu(i+1))}\,|^2\,\varphi_i^2(x,t)\chi_{F(\mu(i+1))}(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le \operatorname*{vraimax}_{0\le t\le 2^{-2(k+3)}} \int\limits_B |\,[\delta_k(x,t)]_{(-\mu(i+1),\mu(i+1))}\,|^2\,\chi_{F(\mu(i+1))}(x,t)\,dx \int\limits_0^T g_i^2(t)\,dt \le$$
$$\le C_{19}\mu(i+1)2^{-2k}\{2^{-2k}C(E_k)\}^{1/2}\{2^{-2k}C(E_k)+2^{-(n+2)k}\}^{1/2}.$$

Отсюда и из (4.4) получаем

$$\mu^2(i)\le C_{20}\mu(i+1)\,2^{i(n+2)+nk}\{2^{-2k}C(E_k)\}^{1/2}\{2^{-2k}C(E_k)+2^{-(n+2)k}\}^{1/2}.$$

Применяя далее лемму 2.4, имеем

$$\mu(1)\le C_{21}2^{nk}\{2^{-2k}C(E_k)\}^{1/2}\{2^{-2k}C(E_k)+2^{-(n+2)k}\}^{1/2},$$

что и доказывает неравенство (1.21). Этим завершается доказательство теоремы 1.3.

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.
3. *Тихонов А.Н.* Об уравнениях теплопроводности для нескольких переменных // Бюлл. МГУ, секция А. 1938. Т. 1. Вып. 9. С. 1–49.
4. *Eklund N.* Boundary behavior of solutions of parabolic equations with discontinuous coefficients // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 788–792.
5. *Ziemer W.* Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations // J. Diff. Equat. 1980. V. 35. № 3. P. 291–305.
6. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. Leipzig: BSB Teubner, 1986.
7. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

О ПОТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНКАХ НЕКОТОРЫХ ЕМКОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

(Общая теория граничных задач: Сб. научн. трудов. – 1983)

1. Изучение сходимости решений задачи Дирихле для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{1}$$

в последовательности областей с мелкозернистой границей (см. [1]) основывается на точных априорных оценках решений некоторых модельных граничных задач. А именно, в работе [1] определяется для произвольных вещественных чисел k_1, k_2 и для произвольного множества F функция $v(x, k_1, k_2)$ как решение задачи Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, k_1, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in B \setminus F, \tag{2}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial B, \tag{3}$$

$$u(x) = k_2, \quad x \in F, \tag{4}$$

где B – определенный , содержащий F шар.

В случае линейных эллиптических уравнений аналоги функций v хорошо известны. Например, в случае уравнения Лапласа функция v при $k_2 = 1$ является емкостным потенциалом множества F относительно шара B. Эти функции играют фундаментальную роль при изучении регулярности граничных точек [2], линейных граничных задач в областях с мелкозернистой границей [3]. Сохраним для обозначения функции v термин «емкостный потенциал» и установим для этих функций точные априорные оценки.

Применяемый в работе метод доказательства поточечных оценок является модификацией метода Мозера [4] получения оценок максимума решений квазилинейных эллиптических уравнений. Аналогично изложенному ниже можно получить априорные оценки решений соответствующих модельных задач для параболических уравнений и некоторых квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка.

2. Сформулируем сейчас предположения и основной результат работы. Пусть F – произвольное замкнутое ограниченное множество в R^n. Обозначим через d минимум радиусов шаров, содержащих F, и пусть x_0 – центр такого шара радиуса d, что $F \subset B_d(x_0)$.

Здесь и далее через $B_r(x)$ обозначаем шар радиуса r с центром в точке x. Можем считать дальше, что $x_0 = 0$. Пусть $B = B_a(0)$ – шар некоторого фиксированного радиуса $a,\ a > 2d$.

Рассмотрим граничную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in B \setminus F; \tag{5}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial B \tag{6}$$

$$u(x) = k, \quad x \in F \tag{7}$$

при выполнении следующих условий: 1) функции $a_i(x,p)\ i = 1,\ldots,n$ определены при $x \in \overline{B},\ p \in R^n$, непрерывны по p при почти всех $x \in \overline{B}$, измеримы по x при любых $p \in R^n$; 2) существуют положительные постоянные $\lambda, m, 2 \le m < n$, такие, что при $x \in \overline{B},\ p,\ q \in R^n$ выполнены оценки

$$| a_i(x,p) | \le \lambda(1 + | p |)^{m-2} \cdot | p |;$$

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,p) - a_i(x,q)](p_i - q_i) \ge 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,p) p_i \ge \lambda^{-1}(1 + | p |)^{m-2} \cdot | p |^2 .$$

В этих условиях легко определить решение задачи (5)–(7) и установить его существование. Пусть $\chi : R^1 \to R^1$ – бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t \le 1$ и нулю при $t > \frac{3}{2}$.

Функцию $v(x,k) \in W_m^1(B)$ называем решением задачи (5)–(6), если $v(x,k) - k\chi\left(\frac{| x |}{d}\right) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(B \setminus F)$ и для произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(B \setminus F)$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int_B a_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{dx_i} dx = 0. \tag{8}$$

Существование так определенного решения просто доказывается методами теории монотонных операторов. Основным результатом работы является теорема.

Теорема. *При выполнении условий* 1), 2) *существует постоянная* c*, зависящая только от* m, n, λ*, такая, что для решения* $v(x,k)$ *задачи* (5)–(7) *выполнена оценка*

$$| v(x,k) | \le c | k | \left(\frac{d}{| x |}\right)^{\frac{n-m}{m-1}}. \tag{9}$$

Замечание 1. Элементарно доказывается, что $| v(x,k) | \le | k |$. И основной интерес заключается в следующей из (9) зависимости значения $v(x,k)$ от $\frac{d}{| x |}$ для того случая, когда $\frac{d}{| x |}$ мало. Подчеркнем, что постоянная c от d не зависит.

Замечание 2. Оценка (9) является точной в том смысле, что в условиях теоремы показатель степени $\frac{n-m}{m-1}$ в правой части не улучшаем. Например, этот показатель получается для представимого в явном виде решения модельной задачи в случае $F = B_d(0)$ для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\right] = 0.$$

Замечание 3. В отличие от уравнения (2), уравнение (5) не содержит постоянной k_1. Дело в том, что явная зависимость $v(x,k_1,k_2)$ от k_1 не является принципиальной. Из теоремы просто следует оценка вида (9) для $v(x,k_1,k_2)$ с постоянной c, зависящей дополнительно от k_1.

Замечание 4. Используемыми ниже рассуждениями можно получить оценку вида (9) при определенных условиях и для решения задачи вида (1), (6), (7). Также получается оценка при $n = m$, только в этом случае вид оценки (9) изменится.

3. Вначале получим некоторые интегральные оценки для производных $v(x,k)$. Будем для определенности считать, что $k > 0$. В противном случае достаточно оценивать $-v(x,k)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда с некоторой постоянной* c_1, *зависящей лишь от* m, n, λ, *выполнена оценка*

$$\int_B \left(1+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \le c_1\{k^2 d^{n-2} + k^m d^{n-m}\}. \tag{10}$$

Доказательство получается подстановкой в интегральное тождество (8) вместо φ функции $v(x,k) - k\chi\left(\frac{|x|}{d}\right)$ и проведением элементарных преобразований.

Далее буквой c с индексом, не оговаривая дополнительно, обозначаем постоянную, зависящую только от m, n, λ.

Лемма 2. *Пусть* γ *– произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < \gamma < k$ *и* $E_\gamma = \{x \in B : 0 \le v(x,k) \le \gamma\}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{E_\gamma} \left(1+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \le c_2\gamma[kd^{n-2} + k^{m-1}d^{n-m}]. \tag{11}$$

Для доказательства (11) достаточно подставить в (8) вместо φ функцию $v_\gamma(x,k) - \gamma\chi\left(\frac{|x|}{d}\right)$, где $v_\gamma(x,k) = \min\{v(x,k),\gamma\}$, и проделать простые оценки, используя неравенство (10).

Отметим еще одно просто проверяемое неравенство.

Лемма 3. *Пусть* ρ_1, ρ_2 *– произвольные числа, удовлетворяющие условию* $0 < \rho_1 < \rho_2 < a$ *и* $D_{\rho_1,\rho_2} = \{x : \rho_1 \le |x| \le \rho_2\}$. *Существует постоянная* μ_1, *зависящая только от* m *и* n, *такая, что для произвольной функции* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}'_m(B)$ *выполнена оценка*

$$\int\limits_{D_{\rho_1,\rho_2}} |u(x)|^m\, dx \le \mu_1[\rho_2^m - \rho_1^m] \int\limits_{B_a} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^m dx. \tag{12}$$

4. Приступим к доказательству оценки (9). Пусть ρ – некоторое фиксированное число $d < \rho < a$, и будем получать оценку $\max\limits_{|x|=\rho} |v(x,k)|$. Можем считать, что $d < \frac{\rho}{2}$, иначе неравенство (9) выполняется с постоянной $2^{\frac{n-m}{m-1}}$. Можно считать также, что $\frac{3\rho}{2} < a$. В самом деле, если неравенство (9) выполнено при $|x| \le \frac{2a}{3}$ с постоянной c, то для $|x| \le a$ оно будет выполнено с постоянной $C\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-m}{m-1}}$, что следует из принципа максимума. Можем считать, следовательно, что

$$2d < \rho < \frac{2a}{3}. \tag{13}$$

Пусть $\psi(t)$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на R^1, равная единице при $t \le -1$ и нулю при $t \ge -\frac{1}{2}$. Определим при $j = 1,2,\dots$ функции

$$\varphi_j(x) = \psi\left(\frac{2^{j+1}}{\rho}\left[\| x| - \rho| - \frac{\rho}{2}\right]\right). \tag{14}$$

Функции $\varphi_j(x)$ обращаются в нуль вне $D_{\rho_{1,j+1},\rho_{2,j+1}}$ и равны единице в $D_{\rho_{1,j},\rho_{2,j}}$, где D_{ρ_1,ρ_2} – сферический слой, определенный в лемме 3,

$$\rho_{1,j} = \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2^{j+1}},\ \ \rho_{2,j} = \frac{3\rho}{2} - \frac{\rho}{2^{j+1}}.$$

Для производной функции $\varphi_j(x)$ выполнена оценка

$$\left|\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}\right| \le \frac{c_0 2^j}{\rho} \tag{15}$$

с абсолютной постоянной c_0.

Пусть $v(x,k)$ – решение задачи (5)–(7). Подставим в интегральное тождество (8)

$$\varphi(x) = |v|^r\, v\varphi_j^s,$$

где r, s – произвольные числа, удовлетворяющие условию $m < s \le c_3 r$, где c_3 – постоянная, аналогичная c_1. Используя условие 2) и неравенство Юнга, устанавливаем лемму.

Лемма 4. *Для произвольных чисел* r, s, *удовлетворяющих условию* $m < s \le c_3 r$, *для решения* $v(x,k)$ *задачи* (5)–(7) *выполнена оценка*

$$\int\limits_{D_{j+1}} \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 |v|^r \varphi_j^s(x)dx \le$$

$$\le c_4 \int\limits_{D_{j+1}} \left\{ |v|^{r+2} \varphi_j^{s-2}(x) \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right|^2 + |v|^{r+m} \varphi_j^{s-m}(x) \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right|^m \right\} dx, \tag{16}$$

где $D_j = D_{\rho_{1,j}, \rho_{2,j}}$.

Неравенство (16) является первым основным неравенством при получении оценки $|v(x,k)|$. Дальнейшее получение оценки будет зависеть от того, какое из следующих условий выполнено; а) $M_{j+1} \ge \rho$; б) $M_{j+1} < \rho$, где $M_{j+1} = \max\limits_{x \in D_{j+1}} |v(x,k)|$. Отметим, что $\{M_j\}$ – возрастающая последовательность.

Лемма 5. *Пусть* $v(x,k)$ – *решение задачи* (5)–(7) *и предположим, что при некотором* j_0 *выполнено неравенство* $M_{j_0+1} \ge \rho$. *Тогда при всех* $j \ge j_0$ *имеет место оценка*

$$M_j^{m+(m-2)\frac{n}{m}} \le c_5 \cdot 2^{nj} \cdot k^{m-1} \cdot M_{j+1}^{1+(m-2)\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-m}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $j \ge j_0$ и

$$I_{r,s} = \int\limits_{D_{j+1}} |v(x,k)|^r \cdot \varphi_j^s(x)dx. \tag{18}$$

Оценим $I_{r,s}$, используя вложение $W_m'(B) \to L_{\frac{mn}{m-n}}(B)$. Имеем при $p = \dfrac{nm}{n-m}$

$$I_{r,s} = \int\limits_{D_{j+1}} (|v|^{\frac{r}{p}} \varphi_j^{\frac{s}{p}})^p dx \le c_6 \left(\int\limits_{D_{j+1}} \left| \frac{\partial}{\partial x} (|v|^{\frac{r}{p}} \cdot \varphi_j^{\frac{s}{p}}) \right|^m dx \right)^{\frac{p}{m}} \le$$

$$\le c_7 r^p \left\{ \int\limits_{D_{j+1}} |v|^{m\frac{r}{p}-m} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^m \varphi_j^{\frac{s}{p}m} dx + \int\limits_{D_{j+1}} |v|^{m\frac{r}{p}} \cdot \varphi_j^{\frac{s}{p}m-m} \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{p}{m}}. \tag{19}$$

Для оценки первого интеграла в фигурной скобке применим неравенство (16). Получим

$$\int\limits_{D_{j+1}} |v|^{m\frac{r}{p}-m} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^m \varphi_j^{\frac{s}{p}m} dx \le c_8 \frac{2^{mj} M_{j+1}^{m-2}}{\rho^m} \int\limits_{D_{j+1}} |v|^{m\cdot\frac{r}{p}-m+2} \varphi_j^{\frac{s}{p}m-m} dx. \tag{20}$$

При получении неравенства (20) воспользовались тем, что в силу условий леммы

$$\left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right|^2 \le \frac{c_0^2 2^{2j}}{\rho^2} \le \frac{c_0^2 2^{2j} M_{j+1}^{m-2}}{\rho^m}.$$

Из неравенства (19), (20) следует

$$I_{r,s} \le c_9 \frac{r^p 2^{pj}}{\rho^p} M_{j+1}^{(m-2)\frac{p}{m}} I^{\frac{p}{m}}_{m\frac{r}{p}-m+2, \frac{s}{p}m-m}. \tag{21}$$

Подставим вместо r, s в (21) соответственно

$$r_i = \left(\frac{n}{n-m}\right)^i \left[m + \frac{n(m-2)}{m}\right] - \frac{n(m-2)}{m},\ i = 1,2,\ldots;$$

$$s_i = \left(\frac{n}{n-m}\right)^i [m+n] - n.$$

Тогда неравенство (21) переписывается в виде

$$J_i \le c_{10}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{pi} 2^{pj} \rho^{-p} M_{j+1}^{(m-2)\frac{p}{m}} J_{i-1}^{\frac{p}{m}}, \tag{22}$$

где $J_i = I_{r_i, s_i}$.

Последовательным применением неравенств вида (22) можно оценить J_i через J_0, откуда после соответствующих вычислений получим

$$\lim_{i\to\infty} J_i^{\left(\frac{m}{p}\right)^i} \le c_{11} M_{j+1}^{(m-2)\frac{n}{m}} 2^{nj} \rho^{-n} J_0. \tag{23}$$

Легко видеть, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} J_i^{\left(\frac{m}{p}\right)^i} \ge M_j^{m+\frac{n(m-2)}{m}}. \tag{24}$$

Для завершения доказательства леммы 5 осталось оценить J_0. Имеем

$$J_0 = \int\limits_{D_{j+1}} |v|^m \varphi_j^m dx \le \int\limits_{D_{j+1}} |v|^m dx \le \mu[\rho_{2,j+1}^m - \rho_{1,j+1}^m] \times$$

$$\times \int\limits_{D_{j+1}} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^m dx \le c_{12}\rho^m \int\limits_{E_{M_{j+1}}} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^m dx \le c_{13} M_{j+1} k^{m-1} d^{n-m} \rho^m. \tag{25}$$

При получении неравенства были применены леммы 2, 3, причем в условиях леммы 5 $k \ge d$. Так что в правой части (11) первое слагаемое в квадратных скобках не превосходит второе. Окончательно лемма 5 следует из (23)–(25).

Лемма 6. *В условиях леммы 5 выполнена оценка*

$$M_{j_0} \le c_{14} k \left(\frac{d}{\rho}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} 2^{\frac{nj_0}{m-1}}. \tag{26}$$

Доказательство. Из неравенства (17) следует при любом натуральном q оценка

$$M_{j_0} \le \left[c_5 k^{m-1}\left(\frac{d}{p}\right)^{n-m}\right]^{f_1(q)} 2^{nf_2(q)} M_{j_0+q+1}^{f_3(q)}, \tag{27}$$

где

$$f_1(q) = \frac{1}{m+\delta} + \sum_{l=0}^{q} \left(\frac{1+\delta}{m+\delta}\right)^l,\ \delta = (m-2)\frac{n}{m};$$

$$f_2(q) = \frac{1}{m+\delta}\sum_{l=0}^{q} (j_0 + l)\left(\frac{1+\delta}{m+\delta}\right)^l,\ f_3(q) = \left(\frac{1+\delta}{m+\delta}\right)^{q+1}.$$

Из (27) следует (26) предельным переходом по q при $q \to \infty$.

5. Сейчас будет рассматриваться случай б). Могут иметь место две возможности; α) существует j_0 такое, что $M_j < \rho$ при всех $j \le j_0$, $M_{j_0+1} \ge \rho$;

β) неравенство $M_j < \rho$ выполняется при всех j. Будем, кроме того, отдельно рассматривать случаи: A) $k \ge d$; B) $k < d$.

Лемма 7. *Пусть* $v(x,k)$ *– решение задачи* (5)–(7) *и пусть* $k \ge d$. *Тогда имеет место оценка*

$$M_1 \le c_{15} k \left(\frac{d}{\rho}\right)^{\frac{n-m}{m-1}}. \tag{28}$$

Доказательство. Если $M_2 \ge \rho_1$, то оценка (28) следует из леммы 6. Займемся оценкой определяемых равенством (18) интегралов $I_{r,s}$ для такого номера j, чтобы $M_{j+1} < \rho$. Повторяем доказательство леммы 5, только будем пользоваться вложением

$$W_2^{\prime}(B) \to L_q(B) \text{ при } q = \frac{2n}{n-2}.$$

Аналогично доказательству неравенства (21) получим

$$I_{r,s} \le c_{16} \frac{r^q 2^{q\frac{m}{2}j}}{\rho^q} I^{\frac{q}{2}}_{\frac{2r}{q},\frac{2s}{q}-m}. \tag{29}$$

Отметим только, что возникающую при применении леммы 4 производную $\left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right|^m$ нужно оценить следующим образом:

$$\left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right|^m \le \frac{c_0^m 2^{mj}}{\rho^m} \le \frac{c_0^m 2^{mj}}{M_{j+1}^{m-2}\rho^2}.$$

Подставляя далее в (29) вместо r, s соответственно

$$\bar{r}_i = \left(\frac{q}{2}\right)^i m; \; \bar{s}_i = \left(\frac{q}{2}\right)^i \left[m + \frac{mn}{2}\right] - \frac{mn}{2},$$

получим аналогично (23)

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \boldsymbol{J}_i^{\left(\frac{2}{q}\right)^i} \le c_{17} 2^{\frac{mn}{2}j} \rho^{-n} J_0, \tag{30}$$

где $\tilde{\boldsymbol{J}}_i = I_{\bar{r}_i,\bar{s}_i}$. Замечаем, что в силу условия леммы $k \ge d$, следовательно, для J_0 справедлива оценка (25). Тогда из (25), (30) следует

$$M_j^m \le c_{18} 2^{\frac{mn}{2}j} k^{m-1} M_{j+1} \left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-m}. \tag{31}$$

Далее, при завершении доказательства леммы 7 нужно рассматривать отдельно случаи α) и β). Если выполнено условие β), то неравенство (31) справедливо при всех j и оценка (28) получается аналогично доказательству неравенства (26).

Если выполняется условие $\alpha)$, то из (31) можно получить

$$M_1 \le c_{19}\left[k^{m-1}\left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-m}\right]^{\frac{1-\left(\frac{1}{m}\right)^{j_0-1}}{m-1}} M_{j_0}^{\left(\frac{1}{m}\right)^{j_0-1}}.$$

Продолжая далее оценку, используя (26), устанавливаем неравенство (28). Тем самым лемма 7 полностью доказана.

6. Для завершения доказательства теоремы осталось получить оценку вида (28) при $k < d$.

Лемма 8. *Пусть* $v(x,k)$ *– решение задачи* (5)–(7) *и пусть* $k \le d$. *Тогда имеет место оценка*

$$M_1 \le c_{20} k \left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-2}. \tag{32}$$

Доказательство. В условиях леммы 8 при всех j $M_j < \rho$. Воспользуемся оценкой (29), только будем r,s давать значения соответственно

$$\widetilde{r}_i = \left(\frac{q}{2}\right)^i 2,\ \widetilde{s}_i = \left(\frac{q}{2}\right)^i \left(2 + \frac{mn}{2}\right) - \frac{mn}{2}.$$

Тогда для $\widetilde{\mathbf{J}}_i = I_{\widetilde{r}_i, \widetilde{s}_i}$, аналогично (30), получим

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \widetilde{\mathbf{J}}_i^{\left(\frac{2}{q}\right)^i} \le c_{21} 2^{\frac{mn}{2}j} \rho^{-n} \widetilde{\mathbf{J}}_0. \tag{33}$$

Аналогично (25)

$$\widetilde{\mathbf{J}}_0 = \int_{D_{j+1}} |v|^2 \varphi_j^2\, dx \le c_{22}\rho^2 \int_{M_{j+1}} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \le c_{23} M_{j+1} k d^{n-2} \rho^2. \tag{34}$$

Нужно заметить только, что при применении неравенства (11) в условиях доказываемой леммы второе слагаемое в квадратной скобке в правой части (11) не превосходит первого.

Из (33), (34) следует

$$M_j^2 \le c_{24} k 2^{\frac{mn}{2}j} M_{j+i} \left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-2}, \tag{35}$$

и, так как последнее неравенство справедливо при всех j, то из него, аналогично доказательству леммы 6, следует оценка (32). Так как $n-2 > \dfrac{n-m}{m-1}$, то в условиях леммы 8 тем более

$$\max_{|x|=\rho} |v| \le M_1 \le ck \left(\frac{d}{\rho}\right)^{\frac{n-m}{m-1}}. \tag{36}$$

Окончательно из (28), (36) следует, что

$$M_1 \le c_{25} k \left(\frac{d}{\rho} \right)^{\frac{n-m}{m-1}},$$

что и доказывает теорему.

1. *Скрыпник И.В.* Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 12, с. 993–997.
2. *Литтман У., Стампаккья Г., Вейнбергер Г.Ф.* Регулярные точки для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. – Математика / Сб. переводов, 1965, **9**, № 2, с. 72–97.
3. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 279 с.
4. *Mozer I.* A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. – Comm. Pure and Appl. Math, 1960, **13**, N 3, p. 457–468.

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

(*Нелинейные граничные задачи. –1991. –Вып.3*)

Исследование усреднения нелинейных эллиптических граничных задач в перфорированных областях, изучение поведения решений нелинейных эллиптических уравнений вблизи негладкой границы стало возможным в последние годы благодаря поточечным оценкам решений нелинейных уравнений (см. [1]). Подобные оценки, метод доказательства которых в эллиптическом случае излагается в работе [2], представляют интерес и для параболических уравнений в связи с применениями к вопросам качественной теории, в частности, при изучении регулярности по Винеру граничных точек. Данная статья посвящена развитию метода доказательства поточечных оценок для нелинейного параболического уравнения.

1. Формулировка предположений и результата. Пусть $B(R)$ – шар радиуса R в R^n с центром в нуле, $n \ge 3$, E – замкнутое множество, содержащееся в $B(d)$, $d < \min\left(1, \frac{R}{8}\right)$ и обозначим $\Omega = B(R) \setminus E$,

$$Q = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in [0,\ T]\},\quad \Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t = \tau\},$$

$$Q_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in [0,\tau]\},\quad S = \{(x,t) : x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T]\}.$$

Будет получена оценка решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,\ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = k\, f(x),\ (x,t) \in S \cup \Omega_0, \tag{2}$$

при $k \in R^1$.

Предполагаем в дальнейшем, что функции $a_i(x,t,p),\, i = 1,\dots,n$ определены при $(x,t) \in Q$, $p \in R^n$ и удовлетворяют при рассматриваемых значениях аргументов условиям:

a$_1$) для почти всех x, t функции $a_i(x,t,p)$ непрерывны по p и для всех p эти функции измеримы по x,t; $a_i(x,t,0) = 0$ при $i = 1,\dots,n$;

a$_2$) с положительной постоянной v_1 выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,p)\, p_i \ge v_1 |p|^2,\ \sum_{i=1}^{n} |a_i(x,t,p)| \le v_1^{-1} \cdot |p|. \tag{3}$$

Предполагаем, что функция $f(x)$, содержащаяся в (2), определена при $x \in B(R)$, принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(B(R))$ и удовлетворяет условиям:

f$_1$) $f(x) \equiv 1$ при $x \in E$;

f$_2$) с положительной постоянной v_2 выполнены неравенства

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dx \le v_2 d^{n-2}, \quad 0 \le f(x) \le \min\left[1, v_2\left(\frac{d}{|x|}\right)^{n-2}\right]. \tag{4}$$

Замечание 1. Ограничиваемся в данной статье модельным уравнением (1) ради простоты изложения метода доказательства. Специальный характер условий f$_1$), f$_2$) обусловлен интересами, связанными с применениями поточечных оценок в качественной теории.

При сформулированных предположениях просто доказывается разрешимость задачи (1), (2) в пространстве $V_2(Q)$, норма в котором описывается равенством

$$\|u\|^2_{V_2(Q)} = \underset{0\le t\le T}{\operatorname{vrai\,max}} \int_\Omega u^2(x,t)\,dx + \int_Q \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 dx\,dt.$$

Определение $V_2(Q)$ и используемых ниже пространств $\overset{\circ}{V}_2(Q)$, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q)$, $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$ содержится в [3]. Аналогично [3] под решением задачи (1), (2) понимаем функцию $u(x,t) \in V_2(Q)$, такую, что $u(x,t) - kf(x) \in \overset{\circ}{V}_2(Q)$ и при любых $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, $\tau \in [0,T]$ справедливо интегральное тождество

$$\int_\Omega u(x,\tau)\,\varphi(x,\tau)\,dx - k\int_\Omega f(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int_0^\tau \int_\Omega \left\{-u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\}dx\,dt = 0. \tag{5}$$

Следуя [3], можно показать, что $u(x,t) \in V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$. Отметим еще интегральное тождество

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega \left\{\frac{\partial}{\partial t}u_{(h)}(x,t)\psi(x,t) + \sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{(h)} \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\right\}dx\,dt = 0, \tag{6}$$

справедливое при $h > 0$, $0 < t_1 < T - h$ для произвольной функции $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_t)$. В (6) использовано обозначение

$$\varphi_{(h)}(x,t) = [\varphi(x,t)]_{(h)} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varphi(x,s)\,ds$$

для усреднения по t.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* a$_1$), a$_2$), f$_1$), f$_2$). *Тогда существует постоянная* c, *зависящая лишь от* R, T, n, v_1, v_2, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *имеет место оценка*

$$|u(x,t)| \le |k| \min\left\{1, c\left(\frac{d}{|x|}\right)^{n-2}\right\} \quad \text{при} \quad (x,t) \in Q. \tag{7}$$

Замечание 2. Просто показать, что для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$0 \le sign\, k \cdot u(x,t) \le |k|. \tag{8}$$

Для проверки второго неравенства, например, при $k>0$ достаточно подставить в (6) $\psi(x,t)=\max\left\{u_{(h)}(x,t)-k,0\right\}$ и воспользоваться условием а$_2$). Поэтому в дальнейшем нуждается в доказательстве только оценка

$$|u(x,t)| \le c|k|\left(\frac{d}{|x|}\right)^{n-2}, \quad (x,t)\in Q. \tag{9}$$

Замечание 3. В дальнейшем достаточно оценить решение задачи (1), (2) при $k>0$, так как в случае отрицательного k можно перейти к оценке функции $v(x,t)=-u(x,t)$, являющейся решением задачи вида (1), (2) с заменой в условии (2) k на $-k$.

Замечание 4. Развитым в настоящей работе методом можно получить оценку решения задачи (1), (2) и при $n<3$. В частности, при $n=2$ в оценке (9) выражение $\left(\frac{d}{|x|}\right)^{n-2}$ заменяется на $\ln\frac{d}{|x|}$.

2. Оценка $I_r(s,\tau)$. Доказательству оценки (8) предшествует получение более простых интегральных оценок для $u(x,t)$. Будем обозначать для функции $g(x,t)$ через $\left[g(x,t)\right]_+$ следующее выражение: $\max\left\{g(x,t),0\right\}$.

Определим при $r\in(d,R]$

$$\begin{aligned} m_r &= \operatorname*{vrai\,max}_{|x|=r,\, t\in[0,T]} u(x,t),\ u_r(x,t)=\left[u(x,t)-m_r\right]_+, \\ E_r &= \left\{(x,t)\in Q: u(x,t)>m_r\right\},\ E_r^{(\tau)}=E_r\cap\Omega_\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Аналогично доказательству неравенства (8) можно получить $u(x,t)\le m_r$ при $r\le|x|\le R$, $t\in[0,T]$ так, что справедливо включение

$$E_r \subset \overline{(B(r)\setminus E)}\times[0,T]. \tag{11}$$

Зафиксируем в дальнейшем функцию $\lambda(t)$ класса $C^\infty(R^1)$, равную единице при $|t|\le\frac{1}{2}$, нулю при $|t|\ge 1$, удовлетворяющую условиям

$$sign\ t\lambda'(t)\le 0,\quad |\lambda'(t)|\le 3,\quad 0\le\lambda(t)\le 1.$$

И пусть $\lambda_s(t)=\lambda\left(\frac{t}{s}\right)$ для $s>0$. Отметим, что при $s_1<s_2$ справедливо неравенство $\lambda_{s_1}(t)\le\lambda_{s_2}(t)$.

Обозначим при $r\in(d,R]$, $\tau\in[0,T]$, $s\in(0,T]$

$$I_r(s,\tau)=\operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T}\int_\Omega u_r^2(x,t)\lambda_s^2(t-\tau)\,dx+\int_{E_r}\left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt, \tag{12}$$

где $u(x,t)$ – решение задачи (1), (2) и использованы обозначения (10).

Будет доказана

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* a1), a2), f1), f2) *и* $k>0$. *Тогда существуют постоянные* $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$, *зависящие только от* R, T, n, v_1, v_2, *такие, что при*

$$2d \le r \le R, \quad \boldsymbol{K}_1 r^2 \le s \le T, \quad 0 \le \tau \le T \tag{13}$$

для решения $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$I_r(s,\tau) \le \boldsymbol{K}_2\, sk(k-m_r)\, d^{n-2}. \tag{14}$$

Получению оценки (14) будет предшествовать получение предварительных интегральных оценок. В следующих ниже леммах через $c^{(i)}$, c_j, $i, j = 1, 2, ...$ будем обозначать постоянные, зависящие лишь от R, T, n, v_1, v_2. Далее $\varphi(y)$ бесконечно дифференцируемая функция на R^1, равная единице при $y \le 1$, нулю при $y \ge 2$ и такая, что $0 \le \varphi(y) \le 1$, $|\varphi'(y)| \le 2$. Обозначим $\varphi_d(x) = \varphi\left(\frac{|x|}{d}\right)$.

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2. *Тогда существуют постоянные* $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$, *такие, что имеют место оценки*

а) $\|u\|^2_{V_2(Q)} \le c^{(1)} k^2 d^{n-2}$, (15)

б) $\|u_r\|^2_{V_2(Q)} \le c^{(2)} k(k-m_r)\, d^{n-2}$ при $r \in [2d, R]$, (16)

в) $\int\limits_Q \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 \varphi_d^2(x) \lambda_s^2(t-\tau)\, dx\, dt \le c^{(3)} s k^2 d^{n-2}.$ (17)

при $r \in [2d, R]$, $s \in [d^2, T]$, $\tau \in [0, T]$.

Для доказательства (15) подставим в (6)

$$\psi(x,t) = u_{(h)}(x,t) - k\, f(x).$$

В полученном равенстве интегрируем по частям в интегралах, содержащих $\frac{\partial}{\partial t} u_{(h)}$, переходим к пределу при $h \to 0$ и оцениваем, используя неравенства (3). В результате

$$\int\limits_\Omega u^2(x,t_1)\,dx + \int\limits_{Q_{t_1}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\,dt \le c_1 k^2 \left\{ \int\limits_\Omega f^2(x)\,dx + \int\limits_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dx \right\}.$$

Отсюда (15) следует в силу неравенств (4).

Для получения неравенства (16) подставляем в (6)

$$\psi(x,t) = [u_{(h)}(x,t) - m_r]_+ - (k-m_r)\, f(x).$$

Переходя к пределу по h и оценивая, получаем

$$\int\limits_Q u_r^2(x,t_1)\,dx + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{E_r^{(t)}} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 dx\,dt \le \int\limits_\Omega \left\{ \left[kf(x) - m_r\right]_+^2 + (k-m_r) u(x,t_1) f(x) \right\} dx +$$

$$+c_2(k-m_r)\int\limits_{Q_{t_1}}\left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|dx\,dt. \qquad (18)$$

Далее применяя неравенство $[kf(x)-m_r]_+\le(k-m_r)f(x)$, оценки (4) и (15), получаем из (18) неравенство (16).

Доказательство (17) получается стандартными рассуждениями после подстановки в (6) функции

$$\psi(x,t)=u_{(h)}(x,t)\,\varphi_d^2(x)\lambda_s^2(t-\tau)-k\varphi_d^2(x)\,\lambda_s^2(t-\tau).$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Предположим, что при некоторых* $r\in[2d,R]$, $s'\in(2r^2,T]$, $\tau\in[0,T]$ *имеет место неравенство*

$$I_r(s',\tau)\le \boldsymbol{K}s'k(k-m_r)d^{n-2}. \qquad (19)$$

Тогда при произвольном $s\in\left[r^2,\frac{s'}{2}\right]$ справедлива оценка

$$I_r(s,\tau)\le c^{(4)}\left\{s+\boldsymbol{K}\frac{r^2}{s}s'\right\}k(k-m_r)\,d^{n-2}. \qquad (20)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (6)

$$\psi(x,t)=\left[u_{(h)}(x,t)-m_r\right]_+\lambda_s^2(t-\tau)-(k-m_r)\,\varphi_d^2(x)\,\lambda_s^2(t-\tau).$$

Переходя к пределу по h и оценивая на основании условий (3), имеем

$$\int\limits_\Omega\left\{\frac{1}{2}u_r^2(x,t)-(k-m_r)\,u(x,t)\,\varphi_d^2(x)\right\}\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,|_0^{t_1}-$$

$$-2\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega\left\{\frac{1}{2}u_r^2(x,t)-(k-m_r)\,u(x,t)\,\varphi_d^2(x)\right\}\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt+ \qquad (21)$$

$$+\nu_1\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\le c_3(k-m_r)\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\varphi_d\left|\frac{d\varphi_d}{dx}\right|\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt.$$

Используя неравенство (17) при оценке правой части (21) и условия на $f(x),\varphi_d(x),\lambda_s(t-\tau)$, получаем из (21)

$$I_r(s,\tau)\le c_4\left\{k\,(k-m_r)\,s\,d^{n-2}+\frac{1}{s}\int\limits_{E_r}u_r^2(x,t)\,\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\right\}. \qquad (22)$$

Интеграл в (22) оценим по неравенству Пуанкаре, учитывая (11)

$$\int\limits_{E_r}u_r^2(x,t)\,\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\le c_5r^2\int\limits_{E_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt. \qquad (23)$$

Теперь оценка (20) является следствием неравенств (19), (22), (23).

Перейдем к получению оценки $I_r(s,\tau)$.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что $\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{K}_2+1,\ \ \boldsymbol{K}_2=2\max\left\{\frac{c^{(2)}}{T},2c^{(4)}\right\}, \qquad (24)$$

где $c^{(2)}, c^{(4)}$ – постоянные, определенные в леммах 1, 2.

Определим конечную числовую последовательность

$$s_j = 2^{-j+1}T, \quad j = 1, 2, ..., J$$

с J, удовлетворяющим условию $2^{-J}T < K_1 r^2 \le 2^{-J+1}T$.

Будем вначале доказывать оценки

$$I_r(s_j, \tau) \le \frac{1}{2}\boldsymbol{K}_2\, s_j\, k\,(k - m_r)\, d^{n-2} \tag{25}$$

для $j = 1, 2, ..., J$. При $j = 1$ оценка (25) следует из (16). Пусть неравенство (25) справедливо для $j \le j_0 - 1,\ 2 \le j_0 \le J$, покажем, что оно имеет место и для $j = j_0$. Применим лемму 4, полагая в ней s', s соответственно равными $s_{j_0-1},\ s_{j_0}$. Используя оценку (25) при $j = j_0 - 1$, получаем

$$I_r(s_{j_0}, \tau) \le c^{(4)}\left\{s_{j_0} + \frac{1}{2}\boldsymbol{K}_2 \frac{r^2}{s_{j_0}} \cdot s_{j_0-1}\right\} k(k - m_r)\, d^{n-2} \le c^{(4)} s_{j_0}\left\{1 + \frac{\boldsymbol{K}_2}{\boldsymbol{K}_1}\right\} k(k - m_r)\, d^{n-2} \le \frac{\boldsymbol{K}_2}{2} s_{j_0} k(k - m_r) d^{n-2}.$$

Тем самым неравенства (25) доказаны при $j = 1, 2, ..., J$. Для произвольного $s \in [\boldsymbol{K}_1 r^2, T]$ определим целое число $j(s)$ так, чтобы $2^{-j(s)}T < s \le 2^{-j(s)+1}T$. Тогда $1 \le j(s) \le J$ и

$$I_r(s, \tau) \le I_r(s_{j(s)}, \tau) \le \frac{\boldsymbol{K}_2}{2} s_{j(s)} k(k - m_r)\, d^{n-2} \le \boldsymbol{K}_2 s k(k - m_r) d^{n-2},$$

что доказывает неравенство (14), а следовательно, теорему 2.

3. Оценка $I_{r,\mu}(s, \tau)$**.** Далее μ – произвольное число из интервала $(0, k - m)$, и введем обозначения

$$[u_r]_\mu = \min\{u_r(x,t), \mu\},\ E_{r,\mu} = \{(x,t) \in Q : 0 \le u_r(x,t) \le \mu\},\ E_{r,\mu}^{(\tau)} = E_{r,\mu} \cap \Omega_\tau,$$

$$I_{r,\mu}(s, \tau) = \int\limits_{E_{r,\mu}} \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right|^2 \cdot \lambda_s^2(t - \tau)\, dx\, dt, \quad F_{r,\mu} = \{(x,t) \in Q : u_r(x,t) > \mu\}.$$

Будет доказана

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия* a1), a2), f1), f2 *и пусть* $k > 0$. *Существует постоянная* $\boldsymbol{K}_3$, *зависящая лишь от* R, T, n, ν_1, ν_2, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *при* $q \in (1, 2)$, $\mu \in (0, k - m_r), r, s, \tau$, *удовлетворяющих неравенствам* (13), *справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(s, \tau) \le \boldsymbol{K}_3\left\{\frac{r^2}{s} I_{r,\mu}(2s, \tau) + \frac{1}{(q-1)^2}\left[\mu k s d^{n-2} + \frac{1}{s\sqrt{s}}\mu^{2-q} \int\limits_{F_{r,\mu}} |\, x\, |\, u_r^q(x,t)\, \lambda_{2s}^2(t - \tau)\, dx\, dt\right]\right\}. \tag{26}$$

Доказательству теоремы предшествует получение предварительных оценок. Как и ранее, через $c^{(i)}, c_j$ обозначаем постоянные, зависящие лишь от R, T, n, ν_1, ν_2.

Лемма 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3. *Тогда с некоторой постоянной* $c^{(5)}$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{E_{r,\mu}} \left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|^2 dx\,dt \le c^{(5)}\mu k d^{n-2}. \tag{27}$$

Доказательство. Подставим в (6)

$$\psi(x,t) = \left\lfloor u_{(h),r} \right\rfloor_{\mu} - \frac{\mu}{k-m_r} u_{(h),r}(x,t), \tag{28}$$

где $\left\lfloor u_{(h),r} \right\rfloor_{\mu} = \min\left\lfloor u_{(h),r}(x,t)\,,\mu\right\rfloor$, $u_{(h),r}(x,t) = \left\lfloor u_{(h)}(x,t) - m_r \right\rfloor_{+}$.

В полученном равенстве интегрируем по частям в слагаемых, содержащих производные по t, и переходим к пределу при $h \to 0$. Используя оценки (3), получаем

$$\int\limits_{\Omega} G_{r,\mu}(u(x,t))\,dx\,|_0^{t_1} + \nu_1 \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{E^t_{r,\mu}(t)} \left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|^2 dx\,dt \le \frac{1}{2}\frac{\mu}{k-m_r} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega} u_r^2(x,t)\,dx\,|_0^{t_1} + c_6 \frac{\mu}{k-m_r} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{E_r^{(t)}} \left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|^2 dx\,dt. \tag{29}$$

Здесь $G_{r,\mu}(y)$ – функция, определенная на R^1 и равная соответственно нулю при $y \le m_r$, $\frac{1}{2}(y - m_r^2)$ при $m_r \le y \le m_r + \mu$, $\frac{\mu^2}{2} + \mu(y - m_r - \mu)$ при $y \ge m_r + \mu$.

В силу оценки (16) правая часть (29) не превосходит $c_7\,\mu\, k\, d^{n-2}$. Покажем, что аналогичным образом оценивается значение первого слагаемого левой части (28) при $t = 0$, и тем самым лемма будет доказана.

Пусть $\boldsymbol{D}^{(1)}_{r,\mu} = \left\{x \in \Omega : m_r \le kf(x) \le m_r + \mu\right\}$, $\boldsymbol{D}^{(2)}_{r,\mu} = \left\{x \in \Omega : kf(x) > m_r + \mu\right\}$.

Имеем

$$\int\limits_{\boldsymbol{D}^{(1)}_{r,\mu}} \boldsymbol{G}_{r,\mu}(kf(x))\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\boldsymbol{D}^{(1)}_{r,\mu}} \left[kf(x) - m_r\right]^2 dx \le \frac{\mu}{2} \int\limits_{\boldsymbol{D}^{(1)}_{r,\mu}} \left[kf(x) - m_r\right] dx \le$$

$$\le \frac{\mu}{2} k \int\limits_{B(r)} f(x)\,dx\,, \quad \int\limits_{\boldsymbol{D}^{(2)}_{r,\mu}} G_{r,\mu}(kf(x))\,dx = \int\limits_{\boldsymbol{D}^{(2)}_{r,\mu}} \left[\mu k f(x) - \mu m_r - \frac{\mu^2}{2}\right] dx \le \mu k \int\limits_{B(r)} f(x)\,dx.$$

В силу (4) отсюда следует

$$\int\limits_{\Omega} G_{r,\mu}(kf(x))\,dx \le c_8 \mu k r^2 d^{n-2},$$

что и заканчивает доказательство леммы.

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3. *Тогда существует постоянная* $c^{(6)}$ *такая, что для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(s,\tau) \le c^{(6)} \left\{ \frac{r^2}{s} I_{r,\mu}(2s,\tau) + \mu k s d^{n-2} + \frac{\mu}{s} \int\limits_{F_{r,\mu}} (u_r - \mu)\,\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt \right\} \tag{30}$$

при r, s, τ *удовлетворяющих неравенствам* (13).

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (6)

$$\psi(x,t)=\left[u_{(h),r}\right]_\mu \lambda_s^2(t-\tau)-\frac{\mu}{k-m_r}u_{(h),r}(x,t)\,\lambda_s^2(t-\tau),$$

где использованы обозначения (28).

Как и при получении неравенства (28), имеем

$$\int_\Omega G_{r,\mu}(u)\,\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,|_0^{t_1}-2\int_0^{t_1}\int_\Omega G_{r,\mu}(u)\,\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt+$$

$$+\nu_1\int_0^{t_1}\int_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2\,(t-\tau)\,dx\,dt\le\frac{1}{2}\frac{\mu}{k-m_r}\int_\Omega u_r^2\,\lambda_s^2\,(t-\tau)\,dx\,|_0^{t_1}-$$

$$-\frac{\mu}{k-m_r}\int_0^{t_1}\int_\Omega u_r^2\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt+c_9\frac{\mu}{k-m_r}\int_0^{t_1}\int_{E_r^{(t)}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt.\qquad(31)$$

Правая часть (31) не превосходит $c_{10}\mu ksd^{n-2}$ в силу (14) и (4). Оцениваем второй интеграл в левой части (31), используя неравенство Пуанкаре

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega G_{r,\mu}(u)\,\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\le\frac{c_{11}}{s}\left\{\int_Q\left[u_r\right]_\mu^2\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\mu\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\,\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\right\}\le\frac{c_{12}}{s}\left\{r^2\int_{E_{r,\mu}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt+\mu\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\,\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\right\}.$$

Отсюда и из полученной при доказательстве леммы 3 оценки для значения при $t=0$ первого интеграла левой части (31) следует неравенство (30), что и доказывает лемму 4.

Лемма 5. *Предположим, что выполнены все условия теоремы* 3. *Существует постоянная* $c^{(7)}$ *такая, что при* $1<q<2$ *и* r,s,τ, *удовлетворяющих неравенствам* (13), *справедлива оценка*

$$\int_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\le\frac{c^{(7)}}{(q-1)^2}\mu^{1-q}\left\{ksd^{n-2}+\frac{\mu^{1-q}}{rs}\int_{F_{r,\mu}}|\,x\,|\cdot u_r^q\;\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\right\}.\qquad(32)$$

Доказательство. Пусть $u_r^{(\mu)}(x,t)=\max\{u_r(x,t),\,\mu\}$, $u_{(h),r}^{(\mu)}(x,t)=\max\{u_{(h),r}(x,t),\mu\}$ и подставим в (6)

$$\psi(x,t)=\left\{\mu^{1-q}-\left[u_{(h),r}^{(\mu)}(x,t)\right]^{1-q}\right\}\lambda_s^2(t-\tau)+\left\{(k-m_r)^{1-q}-\mu^{1-q}\right\}\frac{1}{k-m_r}u_{(h),r}(x,t)\,\lambda_s^2(t-\tau).$$

В равенстве, полученном из (6) после указанной подстановки, интегрируем по частям в слагаемых, содержащие производные по t и переходим к пределу при $h\to 0$. Используя оценки (3), получаем

$$\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\,\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,|_0^{t_1}-2\int_0^{t_1}\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\,\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{k-m_r}\left\{(k-m_r)^{1-q}-\mu^{1-q}\right\}\left\{\int_\Omega u_r^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,|_0^{t_1}-\right.$$

$$-2\int_0^{t_1}\int_\Omega u_r^2\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\Bigg\}+(q-1)\,\nu_1\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\times$$

$$\times\,dx\,dt\le c_{13}\mu^{1-q}\,\frac{1}{k-m_r}\int_0^{t_1}\int_{E_r^{(t)}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\,, \tag{33}$$

где $H_{r,\mu}(y)$ – определенная на R^1 функция, равная

$$\mu^{1-q}(y-m_r-\mu)+\frac{1}{2-q}\mu^{2-q}-\frac{1}{2-q}(y-m_r)^{2-q}$$

при $y>m_r+\mu$ и нулю при $y\le m_r+\mu$.

Используя оценку (14), из неравенства (33) получаем

$$\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\le\frac{c_{14}}{q-1}\left\{\mu^{1-q}skd^{n-2}+\int_\Omega H_{r,\mu}(kf)\,\lambda_s^2(-\tau)\,dx+\frac{2}{s}\int_0^{t_1}\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\right\}. \tag{34}$$

Оценим интегралы в правой части (34), замечая, что

$$H_{r,\mu}(y)\le\mu^{1-q}(y-m_r-\mu)\qquad\text{при}\qquad y>m_r+\mu.$$

Имеем

$$\int_\Omega H_{r,\mu}(kf)\,\lambda_s^2(-\tau)\,dx\le\mu^{1-q}\int_{\boldsymbol{D}_{r,\mu}^{(2)}}\big[kf(x)-m_r-\mu\big]dx\le c_{15}\mu^{1-q}ksd^{n-2}, \tag{35}$$

где $\boldsymbol{D}_{r,\mu}^{(2)}$ – множество, введенное при доказательстве леммы 3.

Применяя неравенство Коши, получаем при $\varepsilon>0$

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega H_{r,\mu}(u)\,\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\le\mu^{1-q}\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\,\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\le$$

$$\le\varepsilon r\int_{F_{r,\mu}}|\,x\,|^{-1}\,u_r^{-q}\cdot(u_r-\mu)^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt+\frac{\mu^{2-2q}}{\varepsilon r}\int_{F_{r,\mu}}|\,x\,|u_r^q\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\,. \tag{36}$$

И далее оценим первый интеграл правой части по неравенству Пуанкаре

$$\int_{F_{r,\mu}}|\,x\,|^{-1}\,u_r^{-q}(u_r-\mu)^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\le c_{16}r\int_{F_{r,\mu}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[u_r^{-\frac{q}{2}}(u_r-\mu)\right]\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\le$$

$$\le c_{16}\,r\int_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2\,(t-\tau)\,dx\,dt\,, \tag{37}$$

так как при $u_r>\mu$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}\left[u_r^{-\frac{q}{2}}(u_r-\mu)\right]\right|\le u_r^{-\frac{q}{2}}.$$

Выбирая соответствующим образом ε, получаем из неравенств (34) – (37) оценку (32), что и доказывает лемму 5.

Доказательство теоремы 3. Оценивая интеграл в неравенстве (30), используя (32), (37), получим

$$\frac{\mu}{s}\int\limits_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\le\frac{\mu^q}{\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|^{-1}u_r^{-q}(u_r-\mu)^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt+$$

$$+\frac{\mu^{2-q}}{s\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|\,u_r^q\,\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\le c_{16}\,\mu^q\,\frac{r}{\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt+$$

$$+\frac{\mu^{2-q}}{s\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|\,u_r^q\,\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\le c_{17}\,\frac{1}{(q-1)^2}\,\mu\left\{ksd^{n-2}+\mu^{1-q}\,\frac{1}{s\sqrt{s}}\int\limits_{F_{r,\mu}}|x|u_r^q\,\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\right\},$$

что и доказывает теорему 3.

4. Предварительная поточечная оценка. Переходим от интегральных неравенств к получению поточечных оценок. Доказательство неравенства (9) будет проведено в несколько этапов: вначале получим огрубленную предварительную оценку, затем укажем способ ее уточнения и наконец, докажем теорему 1.

При получении локальной оценки решения в следующей лемме применяется итерационный процесс, предложенный в эллиптическом случае Мозером [4] и используемый в дальнейшем для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений многими авторами.

Лемма 6. *Пусть* $k>0$ *и выполнены условия* a$_1$), a$_2$), f$_1$), f$_2$), *тогда с некоторой постоянной* $c^{(8)}$ *для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$m_{2^{-1}r}-m_r\le c^{(8)}k\,\frac{d^{n-2}}{r^n}\qquad\text{при}\qquad r\in[8d,R]. \tag{38}$$

Доказательство. Определим при $j=1,2,...$ числовые последовательности

$$r_j^{(1)}=\frac{r}{4}(1+2^{-j}),\quad r_j^{(2)}=\frac{r}{4}(3-2^{-j}),$$

$$t_j^{(1)}(s,\tau)=\tau-\frac{s}{16}-(1-2^{1-2j})\,r^2,\quad t_j^{(2)}(s,\tau)=\tau+\frac{s}{16}+(1-2^{1-2j})\,r^2.$$

Здесь $\tau\in[0,T]$, $r\in[8d,\,R]$, $\boldsymbol{K}_1r^2\le s\le T$ с постоянной $\boldsymbol{K}_1$ из теоремы 2.

В дальнейшем $\psi_j(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $\boldsymbol{D_j}=\left\{x:r_j^{(1)}\le|x|\le r_j^{(2)}\right\}$, нулю вне $\boldsymbol{D}_{j+1}$ и такая, что $0\le\psi_j(x)\le1$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}\psi_j(x)\right|\le\frac{1}{r}2^{j+4}.$ Определим еще бесконечно дифференцируемую функцию $\chi_j(t,s,\tau)$, равную единице при $t\in\left[t_j^{(1)}(s,\tau),t_j^{(2)}(s,\tau)\right]$, нулю при $t\notin\left[t_{j+1}^{(1)}(s,\tau),t_{j+1}^{(2)}(s,\tau)\right]$, такую, что $0\le\chi_j(t,s,\tau)\le1$, $\left|\frac{d}{dt}\chi_j(t,s,\tau)\right|\le\frac{2^{2j}}{r^2}$. Обозначим $\varphi_j(x,t,s,\tau)=\psi_j(x)\chi_j(t,s,\tau)$.

Подставим в интегральное тождество (6)

$$\psi(x,t)=\left[u_{(h),r}(x,t)\right]^{\rho+1}\left[\varphi_j(x,t,s,\tau)\right]^{\sigma+2},$$

где использовано обозначение (28) и ρ,σ – произвольные неотрицательные числа.

После стандартных преобразований и оценок получаем

$$\frac{1}{\rho+2}\int_{\Omega} u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma+2}dx\,|_0^{t_1} - \frac{\sigma+2}{\rho+2}\int_0^{t_1}\int_{\Omega} u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma+1}\frac{d}{dt}\varphi_j\,dx\,dt + (\rho+1)\nu_1 \times$$

$$\times\int_0^{t_1}\int_{E_r^{(t)}} u_r^{\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\varphi_j^{\sigma+2}\,dx\,dt \le c_{18}\frac{(\sigma+2)2^j}{r}\int_0^{t_1}\int_{\Omega} u_r^{\rho+1}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\varphi_j^{\sigma+1}dx\,dt.$$

Здесь $u_r = u_r(x,t)$ определяется согласно (10).

Из последнего неравенства, используя условие (4), следует оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T}\int_{\Omega} u_r^{\rho+2}(x,t)\,\varphi_j^{\sigma+2}(x,t,s,\tau)\,dx + (\rho+1)^2\int_Q u_r^{\rho}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\varphi_j^{\sigma+2}\,dx\,dt \le$$

$$\le c_{19}\frac{(\sigma+2)^2(\rho+2)^2}{r^2}2^{2j}\int_Q u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma}dx\,dt + c_{19}\left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^{\rho+2} r^n.$$

Используя полученное неравенство и вложения $V_2(Q)$ в $L_{\frac{2(n+2)}{n}}(Q)$, получаем при

$\sigma = \left(\frac{n}{2}+2\right)\rho$

$$\int_Q u_r^{\rho+2}\varphi_j^{\sigma+2}dx\,dt \le c_{20}\left\{\frac{(\rho+2)^4}{r^2}2^{2j}\int_Q u_r^{\frac{\rho+2}{n+2}n}\,\varphi_j^{\frac{\sigma+2}{n+2}\cdot n-2}\,dx\,dt + r^n\left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^{\frac{\rho+2}{n+2}n}\right\}^{\frac{n+2}{n}}. \tag{39}$$

Далее выбирая значения ρ,σ в виде

$$\rho = \rho_i = 2\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - 1\right],\quad \sigma = \sigma_i = (n+4)\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - 1\right],$$

получаем из (39) для

$$J_i = J_i(j,r,s,\tau) = \int_Q u_r^{\rho_i+2}(x,t)\varphi_j^{\sigma_i+2}(x,t,s,\tau)\,dx\,dt + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^{\rho_i+2} r^{n+2} \tag{40}$$

оценку

$$J_i^{\theta^i} \le c_{21}^{\theta^i}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{4i\theta^{i-1}}\left(\frac{2^{2j}}{r^2}\right)^{\theta^{i-1}} J_{i-1}^{\theta^{i-1}}$$

при $\theta = \dfrac{n}{n+2}$, $i = 1,2,\ldots$

Последовательное применение последнего неравенства дает

$$J_i^{\theta^i} \le c_{21}^{\theta^i+\theta^{i-1}+\ldots+\theta}\cdot\left(\frac{n+2}{n}\right)^{4(i\theta^{i-1}+\ldots+1)}\cdot\left(\frac{2^{2j}}{r^2}\right)^{\theta^{i-1}+\ldots+1} J_0,$$

откуда при $i\to\infty$ получаем оценку

$$\mu_j^2(s,\tau) \le c_{22}\left(\frac{2^j}{r}\right)^{n+2}\left\{\int_Q u_r^2\varphi_j^2\,dx\,dt + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{n-2}\right]^2 r^{n+2}\right\}. \tag{41}$$

Здесь

$$\mu_j(s,\tau) = \operatorname*{vraimax}_{(x,t)\in G_j(s,\tau)} u_r(x,t),$$

$$G_j(s,\tau) = \left\{(x,t) : x \in D_j\,,\quad t \in [t_j^{(1)}(s,\tau)\,,\ t_j^{(2)}(s,\tau)]\right\}.$$

Оцениваем интеграл в правой части (43), используя неравенство Пуанкаре и оценку (27)

$$\int_Q u_r^2(x,t)\,\varphi_j^2(x,t,s,\tau)\,dx\,dt \le \int_Q [u_r]^2_{\mu_{j+1}}(s,\tau)\,\chi_j^2(t,s,\tau)\,dx\,dt \le c_{23}r^2 \times \qquad (42)$$

$$\times \int_{E_{r,\mu_{j+1}(s,\tau)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \cdot \chi_j^2(t,s,\tau)\,dx\,dt \le c_{24}\mu_{j+1}(s,\tau)\,kr^2d^{n-2}.$$

Из (43), (44) получаем для $\tilde{\mu}_j = \mu_j(s,\tau) + k\left(\dfrac{d}{r}\right)^{n-2}$ оценку

$$\tilde{\mu}_j^2 \le c_{25}2^{j(n+2)}\frac{kd^{n-2}}{r^n}\tilde{\mu}_{j+1},$$

откуда последовательной итерацией по j следует неравенство

$$\mu_1(s,\tau) \le c_{26}\frac{kd^{n-2}}{r^n},$$

доказывающее лемму 6.

Лемма 7. *Предположим, что для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1), (2) *при* $k>0$, $R_0 \in [8d,R]$ *выполнено неравенство*

$$m_{2^{-1}r} - m_r \le \frac{A}{r^n} \quad \text{для} \quad r \in [8d,R_0] \qquad (43)$$

с некоторой положительной A. Тогда справедлива оценка

$$u(x,t) \le \frac{2^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{A}{|x|^n} + m_{R_0} \quad \text{при} \quad (x,t)\in Q,\ |x|\ge 8d. \qquad (44)$$

Доказательство. В силу (11) достаточно оценить $u(x,t)$ только при $|x| \le R_0$. Для произвольного натурального числа l такого, что $2^{-l}R_0 \ge 4d$ из неравенства (43) следует

$$m_{2^{-l}R_0} = \sum_{j=1}^{l}(m_{2^{-j}R_0} - m_{2^{-j+1}R_0}) + m_{R_0} \le \sum_{j=1}^{l}\frac{A}{\left[2^{-j+1}R_0\right]^n} + m_{R_0} \le \frac{A}{\left[2^{-l}R_0\right]^n(2^n-1)} + m_{R_0},$$

Теперь при $8d \le |x| \le R_0$ определим $l = l(|x|)$ так, чтобы $2^{-l}R_0 < |x| \le 2^{-l+1}R_0$. Для такого x имеем

$$u(x,t) \le m_{2^{-l}R_0} \le \frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{A}{|x|^n} + m_{R_0},$$

что и доказывает лемму 7.

Следствие 1. Пусть $k>0$ и выполнены условия a$_1$), a$_2$), f$_1$), f$_2$). Тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$u(x,t) \le c^{(9)} kT \cdot \frac{d^{n-2}}{|x|^n} \quad \text{при} \quad (x,t) \in Q \tag{45}$$

с $c^{(9)} = \frac{1}{T} \max\left\{8^n, \frac{2^n}{2^n - 1} c^{(8)}\right\}$, где $c^{(8)}$ – постоянная, определенная в лемме 6.

Достаточно применить лемму 7 при $R = R_0$ и при $|x| < 8d$ воспользоваться оценкой (8).

5. Уточнение поточечных оценок. Введем при произвольных положительных $\boldsymbol{K}, r, \mu, s$ и постоянных $n, k, d,$ имеющих то же значение, что и выше, обозначение

$$R_{r,\mu}(\boldsymbol{K}, s) = \boldsymbol{K}\, s\, \mu\, k\, d^{n-2} + \mu^2 \frac{r}{\sqrt{s}} \left\{\boldsymbol{K}\, k\, \mu^{-1} s \frac{d^{n-2}}{r^n}\right\}^{\frac{2n+1}{2n}} r^n. \tag{46}$$

Теорема 4. *Пусть* $k > 0$ *и выполнены условия* a1), a2), f1), f2). *Существуют постоянные* $\boldsymbol{K}_4, \boldsymbol{K}_5, \boldsymbol{K}_6,$ *зависящие лишь от* R, T, n, v_1, v_2, *такие, что из справедливости при некоторых* $r' \in [8d, R],\ s' \in (0, T]$ *оценок*

$$u(x,t) \le \boldsymbol{K}_4 k \frac{s' d^{n-2}}{|x|^n} \quad \text{для} \quad (x,t) \in Q,\ \ |x| \le r', \tag{47}$$

$$I_{r,\mu}(s', \tau) \le R_{r,\mu}(\boldsymbol{K}_5, s') \tag{48}$$

с произвольными $r \in [2d, r'],\ \mu \in (0, k - m_r),\ \tau \in [0, T]$ *и из неравенства*

$$\boldsymbol{K}_6 (r')^2 \le s' \tag{49}$$

следует выполнение оценок

$$u(x,t) \le \boldsymbol{K}_4 k \frac{s'' d^{n-2}}{|x|^n} \quad \text{для} \quad (x,t) \in Q,\ \ |x| \le r'', \tag{50}$$

$$I_{r,\mu}(s'', \tau) \le R_{r,\mu}(\boldsymbol{K}_5, s'') \quad \text{для} \quad r \in [2d, r''] \tag{51}$$

при $s'' = \frac{s'}{4},\ \ r'' = \frac{r'}{2}$ *и тех же, что и в* (49), *значениях* μ, τ.

Доказательство. Будем заранее подчинять искомые числа $\boldsymbol{K}_4, \boldsymbol{K}_5, \boldsymbol{K}_6$ условиям

$$\boldsymbol{K}_4 \ge \max\left\{c^{(9)}, 8^{n-2}\right\},\ \ \boldsymbol{K}_5 \ge \frac{c^{(5)}}{T},\ \ \boldsymbol{K}_6 \ge \max\left\{\boldsymbol{K}_1, 16\right\}, \tag{52}$$

где $c^{(9)}, c^{(5)}$ – постоянные, определенные соответственно в следствии 1 и лемме 3.

Предположим выполнение неравенств (47), (48) и оценим $I_{r,\mu}(s'', \tau)$. Для этого будет использована теорема 3, в которой выберем $q = \frac{2n+1}{2n}$. Предварительно оценим интеграл в правой части (26) при $s = s''$, применяя неравенство (47). Получаем при $r \le r'' = \frac{r'}{2}$

$$\int_{F_{r,\mu}} |x|\, u_r^q\, \lambda_{2s''}(t-\tau)\, dx\, dt \le 4s'' (\boldsymbol{K}_4 k s' d^{n-2})^q \int_{B(r)} \frac{dx}{|x|^{n-\frac{1}{2}}} \le c_{27} s'' (\boldsymbol{K}_4 k s'' d^{n-2})^q \sqrt{r} = c_{27} s'' \left(\boldsymbol{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n}\right)^q r^{n+1}.$$

Здесь и далее считаем $q = \frac{2n+1}{2n}$, через c_j обозначаем постоянные, зависящие лишь от R, T, n, v_1, v_2.

Из последнего неравенства и неравенств (26), (48) при $r \in [2d, r'']$, $\mu \in (0, k - m_r)$, $\tau \in [0, T]$ следует оценка

$$I_{r,\mu}(s'', \tau) \le \boldsymbol{K}_3 \left\{ \left[4\frac{r^2}{s''} + \frac{c_{28}}{\boldsymbol{K}_5} \right] \boldsymbol{K}_5 \mu k s'' d^{n-2} + \mu^{2-q} \left[4\frac{r^2}{s''} + c_{28} \left(\frac{\boldsymbol{K}_4}{\boldsymbol{K}_5} \right)^q \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{r}{\sqrt{s''}} \left[\boldsymbol{K}_5 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n} \right]^q r^n \right\}. \tag{53}$$

И доказываемое сейчас неравенство (51) будет выполнено, если подчиним искомые постоянные $\boldsymbol{K}_4, \boldsymbol{K}_5, \boldsymbol{K}_6$ условиям

$$4\boldsymbol{K}_6^{-1} + c_{28}\boldsymbol{K}_5^{-1} < \boldsymbol{K}_3^{-1},\ 4\boldsymbol{K}_6^{-1} + c_{28}\boldsymbol{K}_4^{q}\boldsymbol{K}_5^{-q} < \boldsymbol{K}_3^{-1}. \tag{54}$$

Таким образом, доказана оценка (51) при $\boldsymbol{K}_4, \boldsymbol{K}_5, \boldsymbol{K}_6$, удовлетворяющих неравенствам (52), (54).

Далее получим условия, при которых выполняется оценка (50). Из неравенств (41), (42) при $r \le r'$

$$\mu_j^2(s', \tau) \le c_{29} \left(\frac{2^j}{r} \right)^{n+2} \left\{ r^2 \int\limits_{E_{r,\mu_{j+1}(s',\tau)}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \chi_j^2(t, s', \tau)\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \left[k \left(\frac{d}{r} \right)^{n-2} \right]^2 r^{n+2} \right\} \le c_{29} \left(\frac{2^j}{r} \right)^{n+2} \left\{ r^2 I_{r,\mu_{j+1}(s',\tau)}(s'', \tau) + \left[k \left(\frac{d}{r} \right)^{n-2} \right]^2 r^{n+2} \right\}. \tag{55}$$

Здесь воспользовались также неравенством (52) и определением функций $\chi_j(t, s, \tau)$, $\lambda_s(t - \tau)$.

Продолжим неравенство (55), используя оценку (53). Получаем

$$\mu_j^2(s', \tau) \le c_{29} 2^{j(n+2)} \left\{ \left[4\frac{r^2}{s''} + \frac{c_{28}}{\boldsymbol{K}_5} \right] \boldsymbol{K}_5 \mu_{j+1}(s', \tau) k \frac{s'' d^{n-2}}{r^n} + \right.$$

$$\left. + \left[\mu_{j+1}(s', \tau) \right]^{2-q} \left[4\frac{r^2}{s''} \left(\frac{\boldsymbol{K}_5}{\boldsymbol{K}_4} \right)^q + c_{28} \right] \frac{r}{\sqrt{s''}} \left[\boldsymbol{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n} \right]^q + \left[k \left(\frac{d}{r} \right)^{n-2} \right]^2 \right\}. \tag{56}$$

Обозначим

$$z_j = \mu_j(s', \tau) \left[\boldsymbol{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n} \right]^{-1}. \tag{57}$$

Из (56) для z_j следует неравенство

$$z_j^2 \le c_{29} 2^{j(n+2)} \left\{ \left[4\boldsymbol{K}_6^{-1}\boldsymbol{K}_5 + c_{28} \right] \frac{1}{\boldsymbol{K}_4} z_{j+1} + \left[4\boldsymbol{K}_6^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{K}_5}{\boldsymbol{K}_4} \right)^q + c_{28} \right] \boldsymbol{K}_6^{-\frac{1}{2}} z_{j+1}^{2-q} + \frac{1}{\boldsymbol{K}_5^2} \boldsymbol{K}_6^{-2} \right\}. \tag{58}$$

Покажем сейчас существование числа $\alpha \in (0,1)$, зависящего лишь от R, T, n, v_1, v_2, такого, что из условия

$$\left[4\boldsymbol{K}_6^{-1}\boldsymbol{K}_5 + c_{28} \right] \frac{1}{\boldsymbol{K}_4} < \alpha, \quad \left[4\boldsymbol{K}_6^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{K}_5}{\boldsymbol{K}_4} \right)^q + c_{28} \right] \boldsymbol{K}_6^{-\frac{1}{2}} < \alpha, \quad \boldsymbol{K}_5^{-2}\boldsymbol{K}_6^{-2} < \alpha. \tag{59}$$

Следует оценка

$$z_1 < \frac{1}{2} \frac{2^n - 1}{2^n}. \tag{60}$$

Если выполнены условия (59), то из неравенства Юнга, имеем

$$z_j \le \left\{ c_{29} 2^{j(n+2)} 2\alpha (z_{j+1} + 1) \right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{ c_{29} 2^{j(n+2)} 2\sqrt{\alpha} (z_{j+1} + \sqrt{\alpha}) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$z_j + \sqrt{\alpha} \le \left\{ (2c_{29} + 1) 2^{j(n+2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}} (z_{j+1} + \sqrt{\alpha})^{\frac{1}{2}}.$$

Последовательно применяя полученное неравенство и используя ограниченность последовательности $\{z_j\}$, убеждаемся в возможности указанного выбора α, при котором из условий (59) следует оценка (60).

Из оценки (60) и произвольности $\tau \in [0, T]$ получаем при $8d \le r \le r'$ неравенство

$$m_{2^{-1}r} - m_r \le \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n} K_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{r^n}. \tag{61}$$

Для дальнейшей оценки применяем лемму 7, выбирая R_0 равным r^q.

Тогда из (61), (44), (47) при $8d \le |x| \le r''$ имеем

$$u(x,t) \le \frac{1}{2} \boldsymbol{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{|x|^n} + \frac{1}{2^n} \boldsymbol{K}_4 k s'' \frac{d^{n-2}}{|x|^n},$$

что и доказывает (50) при $|x| \ge 8d$. Для $|x| < 8d$ оценка (50) следует из неравенства (8) и условия (52).

Окончательно находим, что справедливо утверждение теоремы 4 при $\boldsymbol{K}_4, \boldsymbol{K}_5, \boldsymbol{K}_6$, удовлетворяющих условиям (52), (54), (59). Удовлетворить же последние условия, например, можно выбрав $\boldsymbol{K}_5 = \boldsymbol{K}_4^2$, $\boldsymbol{K}_6 = \boldsymbol{K}_4^3$ и взяв достаточно большим, зависящим лишь от R, T, n, v_1, v_2 число $\boldsymbol{K}_4$. Этим заканчивается доказательство теоремы 4.

6. Доказательство теоремы 1. Пусть $r_1^2 = \left\{ \frac{T}{\boldsymbol{K}_6}, R^2 \right\}$, где $\boldsymbol{K}_6$ – число в теореме 4. Введем две конечные числовые последовательности

$$r_i = 2^{-i+1} r_1, \quad s_i = 2^{-2(i-1)} T, \quad i = 1, 2, \ldots, I,$$

так, чтобы $2^{-I} r_1 < 8d \le 2^{-I+1} r_1$.

Покажем, что при $i = 1, 2, \ldots, I$ выполняются неравенства

$$u(x,t) \le \boldsymbol{K}_4 k \cdot \frac{s_i d^{n-2}}{|x|^n} \quad \text{для} \quad (x,t) \in Q, \ \ |x| \le r_i \,, \tag{62}$$

$$I_{r,\mu}(s_i, \tau) \le R_{r,\mu}(\boldsymbol{K}_5, s_i) \tag{63}$$

при произвольных $r \in [2d, r_i]$, $\mu \in (0, k - m_r)$, $\tau \in [0, T]$. Здесь сохранены обозначения теоремы 4.

При $i = 1$ неравенства (62), (63) следуют соответственно из оценок (45), (27) и условий (52). Выбор чисел r_i, s_i обеспечивает выполнение неравенства $\boldsymbol{K}_6 r_i^2 \le s_i$, и поэтому в силу теоремы 4 из справедливости оценок (62), (63) при некотором значении i следуют эти оценки для номера $i+1$. Тем самым установлены неравенства (62), (63) для $i = 1, 2, \ldots, I$.

Перейдем к оценке $u(x_0, t_0)$ в произвольной точке $(x_0, t_0) \in Q$. Пусть вначале $r_I < |x_0| \le r_1$. Определим номер i_0 так, чтобы $r_{i_0+1} < |x_0| \le r_{i_0}$, $1 \le i_0 \le I - 1$. Тогда из (62) имеем

$$u(x_0, t_0) \le \boldsymbol{K}_4 k \frac{s_{i_0}}{|x_0|^n} d^{n-2} \le 4\boldsymbol{K}_4 k \frac{T}{r_1^2} \left(\frac{d}{|x_0|} \right)^{n-2} \le 4\boldsymbol{K}_4 k \left(\boldsymbol{K}_6 + \frac{T}{R^2} \right) \left(\frac{d}{|x_0|} \right)^{n-2}. \tag{64}$$

Если $|x_0| \le r_I$, то из (8) следует оценка

$$u(x_0, t_0) \le 16^n \cdot k \left(\frac{d}{|x_0|} \right)^{n-2}. \tag{65}$$

При $|x_0| > r_1$ оценим $u(x_0, t_0)$ по неравенству (45):

$$u(x_0, t_0) \le c^{(9)} kT \frac{d^{n-2}}{|x_0|^n} \le c^{(9)} k \frac{T}{r_1^2} \left(\frac{d}{|x_0|} \right)^{n-2} \le c^{(9)} k \left(\boldsymbol{K}_6 + \frac{T}{R^2} \right) \left(\frac{d}{|x_0|} \right)^{n-2}. \tag{66}$$

Из неравенства (64) – (66) следует (9), что и заканчивает доказательство теоремы 1.

1. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problems.– Liepzig: BSB Teubner, 1986. – 232 S.
2. *Скрыпник И.В.* О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов // Общая теория граничных задач.– Киев: Наук. думка, 1983.– С. 198 – 206.
3. *Ладыженская О.*А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.– 736 с.
4. *Moser T.* A new proof of de Georgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.– Comm. Pure and Appl. Math.– 1960. – **13**, № 3. – P. 457 – 468.

ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ЕМКОСТИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

*(Украинский математический журнал. – 1997. – **49**, № 1)*

1. Введение. При изучении усреднения для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в последовательности перфорированных областей принципиальную роль играют поточечные оценки решений модельных нелинейных задач. На этих оценках основывается построение асимптотического разложения решений в областях с мелкозернистой границей [1] и в областях с каналами [2]. В последнее время оценки такого типа сделали возможным изучение асимптотического поведения решений нелинейных граничных задач в перфорированных областях без геометрических предположений относительно последовательности областей [3,4].

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в R^n и F – некоторое замкнутое подмножество множества Ω. Будем обозначать через $B(x_0,r)$ шар радиуса r с центром x_0 и $B(r)=B(0,r)$. Предполагаем, что при некоторых d, R справедливы включения

$$F\subset B(d)\subset B(1)\subset B(2)\subset\Omega\subset B(R). \qquad (1)$$

Напомним поточечную оценку для уравнения второго порядка. Пусть функции $a_i(x,\xi^{(1)})$ определены для $x\in\Omega,\ \xi^{(1)}=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in R^n$, измеримы по x для всех $\xi^{(1)}$, непрерывны по $\xi^{(1)}$ для почти всех x и удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi^{(1)})\xi_i \ge \nu_1\,(1+|\xi^{(1)}|)^{q-2}|\xi^{(1)}|^2, \qquad (2)$$

$$|a_i(x,\xi^{(1)})|\le \nu_2\,(1+|\xi^{(1)}|)^{q-2}|\xi^{(1)}| \qquad (3)$$

с некоторыми положительными числами $q,\nu_1,\nu_2,\ 2\le q<n$.

Рассмотрим модельную граничную задачу

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}a_i\left(x,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\quad x\in D=\Omega\setminus F, \qquad (4)$$

$$u(x)-kf(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_q(D), \qquad (5)$$

где $k\in R^1,\ \ f(x)$ – функция класса $C^\infty(\Omega)$, равная единице в $B(1)$ и нулю вне $B(2)$.

Соответствующая поточечная оценка решения $u(x)$ задачи (4), (5) имеет вид

$$|u(x)|\le C\,|k|\left\{\frac{C_q(F)}{|x|^{n-q}}\right\}^{1/(q-1)},\ |x|\ge 2d, \qquad (6)$$

где $C_q(F)$ обозначает q-емкость множества F. Оценки такого вида доказаны в [5,2,6]. Они полезны не только при изучении проблем усреднения, но и при изучении регулярности граничной точки для нелинейных эллиптических уравнений [6] и устойчивости решения нелинейных задач Дирихле относительно вариации области.

Целью данной работы является установление оценки вида (6) для решений нелинейных эллиптических уравнений высшего порядка. Рассматривается уравнение

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}(x,u,\ldots,D^{m}u)=0,\quad x\in D,\tag{7}$$

удовлетворяющее условию эллиптичности в форме

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m}A_{\alpha}(x,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)})\xi_{\alpha}\ge\nu_{1}\left[\sum_{|\alpha|=m}|\xi_{\alpha}|^{p}+\sum_{|\alpha|=1}|\xi_{\alpha}|^{q}\right]\tag{8}$$

с $q>mp$. Дальше используются следующие обозначения: $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – мультииндекс с неотрицательными целыми компонентами,

$$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\quad D^{\alpha}u(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}u(x),$$

$$D^{k}u(x)=\{D^{\alpha}u(x),|\alpha|=k\},$$
$$|D^{k}u(x)|^{2}=\sum_{|\alpha|=k}|D^{\alpha}u(x)|^{2}.$$

Предполагаются также соответствующие условия роста функций $A_{\alpha}(x,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)})$, обеспечивающие возможность определения решения уравнения (7) из пространства $W_p^m(D)\cap W_q^1(D)$. Существенность условия (8), более сильного, чем обычно предполагаемое условие эллиптичности, следует из того, что для квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка невозможно доказать без условия (8) даже ограниченность решения, если размерность области достаточно велика [6]. Уравнения (7) с условием вида (8) введены в [5], где доказана ограниченность и гельдеровость решений без условий на n.

Рассматривается решение уравнения (7), удовлетворяющее граничному условию в форме

$$u(x)-kf(x)\in\overset{\circ}{W}{}_{p}^{m}(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_{q}^{1}(D),\tag{9}$$

где $f(x)$ – такая же функция, как и в (5). В данной работе доказывается оценка

$$|u(x)|\le C(1+|k|)^{a_0}\left\{\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{|x|^{n-q}}+|x|^{\delta}\right\}\tag{10}$$

для $|x|\ge 8d$, где $C_{p,q}^{m,1}(F)$ – соответствующая емкость высшего порядка множества F, C,a_0,δ – положительные постоянные, зависящие только от известных параметров.

Модельным уравнением для рассматриваемого в статье класса уравнений может служить уравнение Эйлера для функционала

$$\int_{D}\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}u(x)|^{p}+\sum_{|\alpha|=1}|D^{\alpha}u(x)|^{q}\right\}dx$$

с $q > mp$. Тем самым из оценки (10) следует поточечная оценка для потенциальной функции, соответствующей емкости $C^{m,1}_{p,q}(F)$.

2. Формулировка результатов. Предполагаем, что функции $A_\alpha(x,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)}),\ 1 \le |\alpha| \le m$, определены для $x \in \Omega$, $\xi^{(j)} = \{\xi_\gamma, |\gamma| = j\}$, $\xi_\gamma \in R^1$, и удовлетворяют условиям:

A_1) $A_\alpha(x,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)})$ – непрерывные функции $\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)}$ для почти всех x и измеримые функции x для всех $\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)}$;

A_2) существуют положительные числа ν_1, ν_2 такие, что для всех значений $x, \xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)}$ справедливы неравенство (8) и оценка

$$|A_\alpha(x,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)})| \le \nu_2 \left[\sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^{p_\beta} + 1 \right]^{(p_\alpha - 1)/p_\alpha} \tag{11}$$

с $p \ge 2$ и p_α определяемыми условиями

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{|\alpha|-1}{m-1}\,\frac{1}{p} + \frac{m-|\alpha|}{m-1}\,\frac{1}{q_1} \quad \text{для} \quad 1 < |\alpha| \le m, \tag{12}$$

$$p_\alpha = q \quad \text{для} \quad |\alpha| = 1, \quad p_0 < \frac{nq}{n-q}, \tag{13}$$

и q, q_1, удовлетворяющими неравенству

$$mp < q_1 < q < n. \tag{14}$$

Будем говорить, что функция $u(x) \in W^m_p(D) \cap W^1_q(D)$ является решением задачи (7), (9), если выполнено включение (9) и для произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(D) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(D)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{1 \le |\alpha| \le m} \int_D A_\alpha(x,u(x),\ldots,D^m u(x))\, D^\alpha \varphi(x)\, dx = 0. \tag{15}$$

Используя неравенство Ниренберга–Гальярдо, просто проверить, что в сформулированных условиях на функции $A_\alpha(x,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)}), u(x), \varphi(x)$ интеграл в левой части (15) конечен. Существование решения задачи (7), (9) просто следует из теории монотонных операторов.

Продолжим решение $u(x)$ на Ω, полагая $u(x) = k$ для $x \in F$. Тогда справедливо включение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(D) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(D)$. Следующий результат доказан в [5].

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2)$, (1) *и* $u(x)$ *– решение задачи* (7), (9). *Тогда существует постоянная* M, *зависящая лишь от* $n,k,m,p,q,q_1,\nu_1,\nu_2,R$ *такая, что справедлива оценка*

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u(x)|,\ x \in D\} \le M. \tag{16}$$

Будем доказывать поточечную оценку решения $u(x)$ в терминах некоторой емкости множества F, связанной с рассматриваемым классом уравнений. Определим емкость $C^{m,1}_{p,q}(F)$ множеств F равенством

$$C^{m,1}_{p,q}(F) = \inf \int_{R^n} \{| D^m \varphi(x)|^p + | D^1 \varphi(x)|^q\} dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, равным единице на F.

Вначале будет оценена норма $u(x)$ в терминах введенной емкости, а в п. 3 будет доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные постоянные* K_1, a_1, *зависящие только от* $n, k, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что справедливо неравенство*

$$\sum_{1 \le |\alpha| \le m} \int_D | D^\alpha u(x)|^{p_\alpha} dx \le K_1 |k| (1+|k|)^{a_1} C^{m,1}_{p,q}(F). \tag{17}$$

Основным результатом статьи является следующая теорема, доказываемая в п. 5.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные постоянные* $K_2, a_2, \delta_1, \delta_2$, *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что для* $8d \le r \le R$ *справедлива оценка*

$$\text{ess sup}\{| u(x)|,\ x \in D \setminus B(r)\} \le K_2 (1+|k|)^{a_2} \left\{ \left[\frac{C^{m,1}_{p,q}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C^{m,1}_{p,q}(F)}{r^{n-q}} \right]^{\delta_1} r^{\delta_2} \right\}. \tag{18}$$

3. Оценки нормы решения. Определим вспомогательную функцию $v(x)$ как решение граничной задачи

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (| D^\alpha v|^{p-2} D^\alpha v) - \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha (| D^\alpha v|^{q-2} D^\alpha v) = 0, \quad x \in D, \tag{19}$$

$$v(x) - f(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(D) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(D), \tag{20}$$

где $f(x)$ – та же функция, что и в (5). Просто проверяется оценка

$$\int_D \{| D^m v(x)|^p + | D^1 v(x)|^q\} dx \le C_1 C^{m,1}_{p,q}(F). \tag{21}$$

Здесь и в дальнейшем через C_j, $j = 1,2,\ldots$, обозначаем постоянные, зависящие лишь от n, m, p, q, q_1, ν_1, ν_2, R. Из [5] следует оценка

$$\text{ess sup}\{| v(x)|,\ x \in D\} \le M_1 \tag{22}$$

с постоянной M_1, зависящей лишь от n, m, q, q_1.

Лемма 1. *Существует постоянная* K_3, *зависящая лишь от* n, m, p, q, *такая, что справедливо неравенство*

$$\sum_{1<|\alpha|<m}\int_D \{|D^\alpha v(x)|^{p_\alpha}+|D^\alpha v(x)|^{mp/|\alpha|}\}\,dx\le K_3\, C^{m,1}_{p,q}(F) \tag{23}$$

с показателями p_α, *определенными равенством* (12).

Оценка (23) следует из (21) и неравенства Ниренберга-Гальярдо [7].

Доказательство теоремы 2. Подставим в интегральное тождество (15) пробную функцию

$$\varphi(x)=u(x)-k\,|v(x)|^{q-1}\,v(x). \tag{24}$$

Просто проверяется оценка

$$|D^\alpha\{|v(x)|^{q-1}\,v(x)\}|\le C_2\sum_{1\le|\gamma|\le|\alpha|}|v(x)|^{q-|\alpha|/|\gamma|}\,|D^\gamma v(x)|^{|\alpha|/|\gamma|}\,.$$

Используя эту оценку, условие A_2 и неравенство Юнга, из (15) с функцией $\varphi(x)$, определенной в (24), получаем

$$\int_D\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u(x)|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u(x)|^q\right\}dx\le$$

$$\le C_3\,|k|(1+|k|)^{q-1}\left\{\int_D\sum_{1<|\beta|<m}|D^\beta u|^{p_\beta}|v(x)|^q\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_D\left[\sum_{1\le|\alpha|\le m}\sum_{1\le|\gamma|\le|\alpha|}|v(x)|^{q-|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}\,|D^\gamma v(x)|^{|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}+|v(x)|^q\right]dx\right\}. \tag{25}$$

Из определения p_α в (12) следует неравенство

$$|\gamma|\,p_\gamma>|\alpha|\,p_\alpha\quad\text{для}\quad 1\le|\gamma|<|\alpha|\le m\,. \tag{26}$$

Оценим второй интеграл в правой части (24), используя неравенство Юнга, Пуанкаре и оценки (21)–(23):

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m}\ \sum_{1\le|\gamma|\le|\alpha|}\int_D(|v|^{q-|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}\,|D^\gamma v|^{|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}+|v|^q)\,dx\le$$

$$\le C_4\sum_{1\le|\gamma|\le m}\int_D(|v|^{q-p_\alpha}\,|D^\gamma v|^{p_\gamma}+|v|^q)\,dx\le$$

$$\le C_5\sum_{1\le|\gamma|\le m}\int_D|D^\gamma v|^{p_\gamma}\,dx\le C_6\,C^{m,1}_{p,q}(F)\,. \tag{27}$$

Теперь оценим первый интеграл в правой части (25). Пусть $|\beta|=j,\ 1<j<m,$ и представим β в виде $\beta=\beta'+\beta'',$ где $|\beta'|=j-1,\ |\beta''|=1$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_D|D^\beta u|^{p_\beta}|v(x)|^q\,dx=\int_D|D^\beta u|^{p_\beta-2}\,D^\beta u\,D^{\beta'+\beta''}u\,|v|^q\,dx=$$

$$=-\int_D\{(p_\beta-1)\,|D^\beta u|^{p_\beta-2}\,D^{\beta+\beta''}u\,D^{\beta'}u\,|v|^q+q\,D^\beta u|\,D^\beta u\,|^{p_\beta-2}\,D^{\beta'}u\,D^{\beta''}v\,|v(x)|^{q-2}\,v\}\,dx. \tag{28}$$

Используя неравенство Юнга с ε, оценим слагаемые правой части (28). Возможность применения неравенства Юнга следует из равенств

$$\frac{p_\alpha-2}{p_\alpha}+\frac{1}{p_{\alpha+\gamma}}+\frac{1}{\widetilde{p}_\beta}=1, \qquad \frac{p_\alpha-1}{p_\alpha}+\frac{1}{\widetilde{p}_\beta}+\frac{1}{\widetilde{p}_\gamma}=1, \tag{29}$$

справедливых при $2\le|\alpha|\le m$, $|\beta|=|\alpha|-1,\ |\gamma|=1$. В (29) $\widetilde{p}_\beta=p_\beta$ для $2\le|\beta|\le m$, $\widetilde{p}_\beta=q_1$ для $|\beta|=1$. Получаем из (28) оценку

$$I(\beta)\le\varepsilon I(\beta+\beta')+C_6\varepsilon^{-k_1}\left\{\widetilde{I}(\beta'')+\int\limits_D|v(x)|^{q-q_1}|D^1v(x)|^{q_1}\,dx\right\}, \tag{30}$$

где

$$I(\beta)=\int\limits_D|D^\beta u|^{p_\beta}|v|^q\,dx, \qquad \widetilde{I}(\beta'')=\int\limits_D|D^\beta u|^{\widetilde{p}_\beta}|v|^q\,dx. \tag{31}$$

В (30) и далее через k_i, $i=1,2,\dots$, обозначены положительные постоянные, зависящие только от m, p, q, q_1.

Из (30) следует, что для $1<j<m$ и произвольного положительного δ справедливо неравенство

$$\sum_{|\beta|=j}I(\beta)\le\delta\left[\sum_{|\beta|=j+1}I(\beta)+\sum_{|\beta|=1}I(\beta)\right]+C_7\,\delta^{-k_j}\int\limits_D\{|D^1v|^{q_1}|v|^{q-q_1}+|v|^q\}\,dx. \tag{32}$$

Для $j=2$ неравенство (32) получаем из (30), оценивая $\widetilde{I}(\beta'')$ по неравенству Юнга. Для $j>2$ устанавливаем (32) индукцией по j. Если оценка (32) справедлива при $j\le j_0,\ j_0\ge2$, то используем оценку (30) с $j=j_0+1$ оцениваем $\widetilde{I}(\beta'')=I(\beta'')$ по неравенству (32) с $j=j_0,\ \ \delta=\varepsilon^{-k_1+1}$, используя предположение индукции.

Суммируя неравенства вида (32) по j от 2 до $m-1$, получаем оценку

$$\sum_{1<|\beta|<m}I(\beta)\le\delta\left[\sum_{|\beta|=m}I(\beta)+\sum_{|\beta|=1}I(\beta)\right]+C_8\,\delta^{-k_m}\int\limits_D\{|D^1v|^{q_1}|v|^{q-q_1}+|v|^q\}\,dx. \tag{33}$$

Неравенство (17) следует сейчас из оценок (25), (27), (33), леммы 1 и неравенств Юнга и Пуанкаре. Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

Пусть μ,ν – произвольные положительные числа, удовлетворяющие для фиксированного числа $r\in[4d,R]$ неравенствам

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u(x)|,\ x\in\Omega\setminus B(r)\}\le\mu\le M,\quad \nu\le M, \tag{34}$$

где M – постоянная из теоремы 1. Обозначим

$$E_\pm(\mu,\nu)=\{x\in D:\mu<\pm u(x)<\mu+\nu\} \tag{35}$$

и $[f(x)]_+=\max\,[f(x),0]$ для произвольной функции $f(x)$.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные числа* K_4, a, b, *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2$ *и* R, *такие, что* $b\ge q$ *и для произвольного числа* $\sigma\ge b$ *выполнена оценка*

$$\int\limits_{E_{\pm}(\mu,\nu/2)} [\pm u-\mu]_+^{\sigma-1}\{|D^m u|^p+|D^1 u|^q\}\,dx\le$$

$$\le K_4(1+|k|)^a\,\sigma^{2m}\left\{\nu^\sigma C_{p,q}^{m,1}(F)+\nu^{\sigma-\beta}\left[C_{p,q}^{m,1}(F)\right]^{1/q}[r^n]^{1-1/q}\right\}. \qquad (36)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (15) пробную функцию

$$\varphi_{\pm}(x)=\left[\nu^\sigma-[\pm u-\mu]_+^\sigma\right]_+^\sigma-\nu^{\sigma^2}-\left\{\left[\nu^\sigma-[\pm k-\mu]_+^\sigma\right]^\sigma-\nu^{\sigma^2}\right\}v(x), \qquad (37)$$

где $v(x)$ – решение задачи (19), (20). Просто проверяется, что определяемая равенством (37) функция $\varphi_{\pm}(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^m_p(D)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_q(D)$. В дальнейшем рассматриваем только случай функции $\varphi_+(x)$, так как для $\varphi_-(x)$ все оценки полностью аналогичны.

Производные первого слагаемого в (37) представим в виде

$$D^\alpha[T_1(u)]^\sigma=-\sigma^2[T_1(u)]^{\sigma-1}[T_2(u)]^{\sigma-1}D^\alpha u+R_\alpha^{(1)}, \qquad (38)$$

где

$$T_1(u)=\left[\nu^\sigma-[u-\mu]_+^\sigma\right]_+,\qquad T_2(u)=[u-\mu]_+ \qquad (39)$$

и $R_\alpha^{(1)}\equiv 0$ при $|\alpha|=1$, и при $2\le|\alpha|\le m$ выполнена оценка

$$|R_\alpha^{(1)}|\le C_9\,\sigma^{2|\alpha|}\sum_{j=1}^{|\alpha|}\sum_{1\le|\gamma|<|\alpha|}[T_1(u)]^{\sigma-j}[T_2(u)]^{\sigma j-|\alpha|/|\gamma|}|D^\gamma u|^{|\alpha|/|\gamma|}\,. \qquad (40)$$

Подставляя функцию $\varphi_+(x)$ в интегральное тождество (15) и оценивая стандартным образом, получаем неравенство

$$\int\limits_D [T_1(u)]^{\sigma-1}[T_2(u)]^{\sigma-1}\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}dx\le$$

$$\le C_{10}\sum_{1\le|\alpha|\le m}\int\limits_D\left[\sum_{1\le|\beta|\le m}|D^\beta u|^{p_\beta}+1\right]^{(p_\alpha-1)/p_\alpha}\times$$

$$\times\left\{\nu^{\sigma^2}|D^\alpha v|+\sigma^{2|\alpha|}\sum_{j=1}^{|\alpha|}\sum_{1\le|\gamma|<|\alpha|}[T_1(u)]^{\sigma-j}[T_2(u)]^{\sigma j-|\alpha|/|\gamma|}|D^\gamma u|^{|\alpha|/|\gamma|}\right\}dx. \qquad (41)$$

Перейдем к оценке различных слагаемых правой части (41). Из неравенств (17), (21), (23) имеем

$$\int\limits_D\left[\sum_{1\le|\beta|\le m}|D^\beta u|^{p_\beta}\right]^{(p_\alpha-1)/p_\alpha}|D^\alpha v|\,dx\le C_{11}(1+|k|)^{(a_1+1)(p_\alpha-1)/p_\alpha}C_{p,q}^{m,1}(F). \qquad (42)$$

Используя неравенства Гельдера и (21), (23) при $1\le|\alpha|\le m$ получаем оценку

$$\int\limits_D|D^\alpha v|\,dx\le C_{12}\left[C_{p,q}^{m,1}(F)\right]^{1/p_\alpha}[r^n]^{1-1/p_\alpha}\,. \qquad (43)$$

Из (17), (26) и неравенства Гельдера следует

$$\int\limits_D[T_2(u)]^{\sigma-j}[T_1(u)]^{\sigma j-|\alpha|/|\gamma|}\left[\sum_{1\le|\beta|\le m}|D^\beta u|^{p_\beta}\right]^{(p_\alpha-1)/p_\alpha}|D^\gamma u|^{|\alpha|/|\gamma|}\,dx\le$$

$$\le C_{13}\,v^{\sigma^2-|\alpha|/|\gamma|}\,r^n\left\{(1+|k|)^{1+a_1}r^{-n}C_{p,q}^{m,1}(F)\right\}^{(p_\alpha-1)/p_\alpha+|\alpha|/|\gamma|p_\gamma}\,. \qquad (44)$$

Из (41)–(44) и неравенства Юнга получаем оценку

$$\int_D [T_1(u)]^{\sigma-1}[T_2(u)]^{\sigma-1}\left\{\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q\right\}dx \le$$

$$\le C_{14}(1+|k|)^{a_3}\sigma^{2m}\left\{v^{\sigma^2}C^{m,1}_{p,q}(F) + v^{\sigma^2-b}\left[C^{m,1}_{p,q}(F)\right]^{1/q} r^{n(1-1/q)}\right\} \tag{45}$$

с некоторыми положительными постоянными a, b. Принимая во внимание, что

$$T_2(u) \ge \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^\sigma\right]v^\sigma \quad \text{для} \quad x \in E_+\left(\mu, \frac{v}{2}\right),$$

из (45) получаем неравенство (36), и следовательно, лемма 2 доказана.

4. Итерационное неравенство для $m_j - m(r)$. Обозначим

$$m(r) = \text{ess sup}\{|u(x)|,\ x \in D \setminus B(r)\}, \tag{46}$$

где $u(x)$ – решение задачи (7), (9). Пусть r – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $4d \le r \le R$. Выберем последовательность

$$r_j = \frac{r}{4}(1+2^{-j}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

и неотрицательные функции $\psi_j(x)$ из пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, равные единице вне шара $B_j = B(r_j)$ и нулю в B_{j+1}. Можем предполагать, что с некоторой, зависящей лишь от n, m, постоянной C_0 выполнены неравенства

$$|D^\alpha \psi_j(x)| \le [2^j C_0 r^{-1}]^{|\alpha|} \quad \text{для} \quad 0 \le |\alpha| \le m. \tag{47}$$

Обозначим $m_j = \text{ess sup}\ \{|u(x)|,\ x \in D \setminus B_j\}$.

При доказательстве оценки для $m_j - m(r)$ будет использована следующая лемма, доказательство которой полностью аналогично доказательству леммы 1.3 из гл. 8, в [6].

Лемма 3. *Предположим, что для ограниченной функции* $g(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_q(\Omega)$, *неотрицательной функции* $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ *и положительного числа* λ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |g(x)|^{p-1}|D^1 g(x)|^q \varphi^\tau(x)\,dx \le A[\rho+\tau]^B \int_\Omega |g(x)|^{p-\lambda}\varphi^{\tau-q}(x)\,dx \tag{48}$$

при произвольных $\rho \ge \lambda,\ \tau \ge q$ *с положительными числами* A, B, *не зависящими от* ρ, τ. *Тогда справедлива оценка*

$$\text{ess sup}\left\{|g(x)|^{\bar{q}+n(q+\lambda-1)/q},\ x \in \Omega_1\right\} \le$$

$$\le \mathrm{C}\left\{\mathrm{A} + \text{ess sup}\left\{|g(x)|^{q+\lambda-1},\ x \in \Omega_2\right\}L^q\right\}^{n/q}\int_\Omega |g|^{\bar{q}}\,|\varphi|^{\bar{q}}\,dx, \tag{49}$$

где $\Omega_1 = \{x \in \Omega,\ \varphi \ge 1\}$, Ω_2 *– носитель функции* $\varphi(x)$,

$$L = \max\left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|,\ x \in \overline{\Omega}\right\},$$

$\overline{q}$ – *произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\overline{q}\geq 1$, C – *постоянная, зависящая только от* $n, q, \overline{q}, B, \lambda, R$.

Основная в дальнейшем оценка для $m_j - m(r)$ дана в следующей лемме.

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Существуют положительные числа* K_5, λ, *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что для* $j = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$[m_j - m(r)]^{b+q+n(q+\overline{\lambda}-1)/q} \leq K_5\,(1+|k|)^a r^q \left\{[m_{j+1} - m(r)]^{q-1+\overline{\lambda}}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q + 1\right\}^{n/q} \times$$

$$\times \left\{[m_{j+1} - m(r)]^{b+1} C^{m,1}_{p,q}(F) + [m_{j+1} - m(r)][C^{m,1}_{p,q}(F)]^{1/q}[r^n]^{1-1/q}\right\} \tag{50}$$

с постоянными a, b, *определенными в лемме* 2.

Доказательство. Можем считать, что

$$m_j - m(r) = \operatorname{ess\,sup}\{[u(x) - m(r)]_+,\quad x\in D\setminus B_j\}. \tag{51}$$

В противном случае в дальнейших рассуждениях нужно только изменить $u(x)$ на $-u(x)$.

Подставим в интегральное тождество (15) пробную функцию

$$\varphi_j(x) = [u(x) - m(r)]_+^{\rho}\,\psi_j^{\tau}(x) \tag{52}$$

с $\rho\geq q+b$, $\tau\geq q+b$, где b – число, определенное в лемме 2. Производные функции $\varphi_j(x)$ можем представить в виде

$$D^{\alpha}\varphi_j(x) = \rho[u(x) - m(r)]_+^{\rho-1} D^{\alpha}u\psi_j^{\tau}(x) + R_{\alpha}^{(2)}, \tag{53}$$

где $R_{\alpha}^{(2)}$ удовлетворяет оценке

$$|R_{\alpha}^{(2)}| \leq C_{15}\,(\rho+\tau)^{|\alpha|}\left\{\sum_{1\leq|\beta|<\alpha}[u(x) - m(r)]_+^{\rho-|\alpha|/|\beta|}|D^{\beta}u|^{|\alpha|/|\beta}\ \psi_j^{\tau}(x) + \right.$$

$$\left. + [u(x) - m(r)]_+^{\rho}\left(\frac{2^j}{r}\right)^{|\alpha|}\psi_j^{\tau-|\alpha|}(x)\right\}. \tag{54}$$

Используя условие $A_2)$, неравенство Юнга и (47), (54), получаем из (15) с $\varphi(x) = \varphi_j(x)$ следующую оценку:

$$\int_D [m_j - m(r)]_+^{\rho-1}\left\{|D^m u|^p + |D^1 u|^q\right\}\psi_j^{\tau}(x)\,dx \leq$$

$$\leq C_{16}(\rho+\tau)^q\int_D\left\{[u - m(r)]_+^{\rho-1}\sum_{1<|\alpha|<m}|D^{\alpha}u|^{p_{\alpha}}\ \psi_j^{\tau}(x) + \right.$$

$$\left. + [u - m(r)]_+^{\rho-1+q}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q\psi_j^{\tau-q} + [u - m(r)]_+^{\rho-\lambda_1}\psi_j^{\tau}(x)\right\}dx. \tag{55}$$

Здесь и дальше λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, – положительные числа, зависящие только от m, p, q, q_1. Предполагаем также, что $\rho\geq\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Оценим член правой части (55) с произвольными $u(x)$. Обозначим

$$I_j(\alpha)=\int_D [u-m(r)]_+^{\rho-1}\,|D^\alpha u|^{p_\alpha}\,\psi_j^\tau(x)\,dx. \tag{56}$$

Пусть $|\alpha|\ge 2$ и представим α в виде $\alpha=\alpha'+\alpha''$, где $|\alpha'|=1,\ |\alpha''|=|\alpha|-1$. Используя интегрирование по частям, получаем

$$I_j(\alpha)=-\int_D D^{\alpha''}u\Big\{(\rho-1)|D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\,D^\alpha u\,D^{\alpha'}u\,[u-m(r)]_+^{\rho-2}\,\psi_j^\tau(x)+$$

$$+(p_\alpha-1)|D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\,D^{\alpha+\alpha'}u\,[u-m(r)]_+^{\rho-1}\,\psi_j^\tau(x)+$$

$$+\tau[u-m(r)]^{\rho-1}+\tau|D^\alpha u|^{p_\alpha-2}\,D^\alpha u\,D^{\alpha'}\psi_j\,\psi_j^{\tau-1}(x)\Big\}dx. \tag{57}$$

Оценим слагаемые правой части (57) по неравенству Юнга с положительным ε. Возможность применения неравенства Юнга следует из (29). Получаем оценку

$$I_j(\alpha)=\varepsilon I_j(\alpha+\alpha')+C_{17}\,\varepsilon^{-k|\alpha|}\,I_j(\alpha'')+$$

$$+C_{17}(\tau+\rho)^{q_1}\int_D\left\{[u-m(r)]_+^{\rho-1+q_1}|D^{\alpha'}u|^{q_1}\,\psi_j^\tau(x)+[u-m(r)]_+^{\rho-1}\,\psi_j^{\tau-q_1}(x)\left(\frac{2^j}{r}\right)^{q_1}\right\}dx. \tag{58}$$

Отсюда, используя индукцию по $|\alpha|$, устанавливаем следующую оценку с произвольным положительным δ:

$$\sum_{|\alpha|=i} I_j(\alpha)\le\delta\left\{\sum_{|\alpha|=i+1}I_j(\alpha)+\sum_{|\alpha|=1}I_j(\alpha)\right\}+$$

$$+C_{18}(\tau+\rho)^q\,\delta^{-k(i)}\int_D\left\{[u-m(r)]_+^{\rho+q-1}\,\psi_j^{\tau-q}(x)\left(\frac{2^j}{r}\right)^q+[u-m(r)]_+^{\rho-\lambda_i}\,\psi_j^\tau(x)\right\}dx \tag{59}$$

с некоторыми положительными числами $\lambda_i,\ k(i),\ i=1,2,\dots,m-1$.

Суммируя последнее неравенство по i от 2 до $m-1$, получаем оценку

$$\sum_{2\le|\alpha|\le m-1} I_j(\alpha)\le\delta\left\{\sum_{|\alpha|=m}I_j(\alpha)+\sum_{|\alpha|=1}I_j(\alpha)\right\}+$$

$$+C_{19}(\tau+\rho)^q\,\delta^{-k(m)}\int_D\left\{[u-m(r)]_+^{\rho+q-1}|\psi_i|^{\tau-q}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q+[u-m(r)]_+^{\rho-\lambda_m}\,\psi_j^\tau(x)\right\}dx. \tag{60}$$

Из неравенств (55), (60) при соответствующем выборе δ имеем

$$\int_D [u-m(r)]_+^{\rho-1}\{|D^m u|^p+|D^1 u|^q\}\psi_j^\tau(x)\,dx\le$$

$$\le C_{20}(\tau+\rho)^B\int_D\left\{[u-m(r)]_+^{\rho+q-1}\psi_j^{\tau-q}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q+[u-m(r)]_+^{\rho-\bar\lambda}\,\psi_j^\tau(x)\right\}dx \tag{61}$$

с $B=q(k(m)+1),\quad \bar\lambda=\max\{\lambda_i,\lambda_m,q+b\}$.

Функцию $[u-m(r)]_+$ на носителе $\psi_j(x)$ можем оценить сверху постоянной $m_{j+1}-m(r)$, что следует из выборов $m_{j+1},\psi_j(x)$. Следовательно, из (61) получаем неравенство

$$\int_D [u(x)-m(r)]_+^{\rho-1} | D^1 u |^q \psi_j^\tau(x)\,dx \le$$

$$\le C_{21}(\rho+\tau)^B \left\{ [m_{j+1}-m(r)]^{q-1+\bar\lambda} \left(\frac{2^j}{r}\right)^q + 1 \right\} \int_D [u(x)-m(r)]_+^{\rho-\bar\lambda} \psi_j^{\tau-q}(x)\,dx, \tag{62}$$

справедливое для всех ρ, τ при $\rho \ge \bar\lambda$, $\tau \ge q$.

Применяя лемму 3 при $g(x)=[u(x)-m(r)]_+$, устанавливаем оценку

$$[m_j - m(r)]^{b+q+n(q+\bar\lambda-1)/q} \le$$

$$\le C_{22} \left\{ [m_{j+1}-m(r)]^{q-1+\bar\lambda} \left(\frac{2^j}{r}\right)^q + 1 \right\}^{n/q} \int_D [u(x)-m(r)]_+^{b+q} \psi_j^{b+q}(x)\,dx. \tag{63}$$

Последний интеграл оценим, используя неравенство Пуанкаре и лемму 2. Получаем при $\nu = 2[m_{j+1}-m(r)]$:

$$\int_D [u(x)-m(r)]_+^{b+q} \psi_j^{b+q}(x)\,dx \le \int_D \left[\min\left\{ [u(x)-m(r)]_+, \frac{\nu}{2} \right\} \right]^{b+q} dx \le$$

$$\le C_{23} r^q \int_{E\left(m(r),\frac{\nu}{2}\right)} [u(x)-m(r)]_+^b |D^1 u|^q \,dx \le C_{24} r^q (1+|k|)^a \times$$

$$\times \left\{ [m_{j+1}-m(r)]^{b+1} C_{p,q}^{m,1}(F) + [m_{j+1}-m(r)][C_{p,q}^{m,1}(F)]^{1/q} [r^n]^{1-1/q} \right\}. \tag{64}$$

Теперь неравенство (50) следует из оценок (63), (64), и следовательно, лемма 4 доказана.

5. Доказательство поточечной оценки. Вначале докажем оценку для $m(r/2)-m(r)$, используя оценку (5) и следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\{y_j\}$ *– ограниченная последовательность, удовлетворяющая неравенству*

$$0 \le y_j \le \left[A_1 y_{j+1}^{\alpha_1} + A_2 y_{j+1}^{\alpha_2} \right] A_3^j, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{65}$$

с $A_3 \ge 1$, *положительными числами* A_1, A_2 *и числами* α_1, α_2 *из интервала* $(0,1)$. *Тогда справедлива оценка*

$$y_j \le A_4 \left\{ [2A_1]^{1/(1-\alpha_1)} + [2A_2]^{1/(1-\alpha_2)} \right\} \tag{66}$$

с постоянной A_4, *зависящей лишь от* α_1, α_2, A_3.

Доказательство. Для произвольного $j = 1, 2, \dots$ можно определить неотрицательные целые числа $z_1(j), z_2(j)$ так, чтобы $z_1(j) + z_2(j) = j-1$ и при произвольном $J = 1, 2, \dots$ выполнялась оценка

$$y_1 \le \left[(2A_1)^{1/(1-\alpha_1)} + (2A_2)^{1/(1-\alpha_2)} \right]^{1-\alpha_1^{z_1(J)}\alpha_2^{z_2(J)}} \times$$

$$\times A_3^{\sum_{j=2}^J (j-1)\alpha_1^{z_1(j-1)}\alpha_2^{z_2(j-1)}} y_J^{\alpha_1^{z_1(J)}\alpha_2^{z_2(J)}}. \tag{67}$$

Доказательство оценки (67) проведем индукцией по J. Для $J=2$ рассмотрим две возможности:

$$\begin{array}{ll} 1) & A_1 y_2^{\alpha_1} \le A_2 y_2^{\alpha 2}; \\ 2) & A_1 y_2^{\alpha_1} > A_2 y_2^{\alpha 2}. \end{array} \tag{68}$$

Определим $z_1(2)=0,\ \ z_2(2)=1$, если выполнено первое неравенство в (68), и $z_1(2)=1,\ \ z_2(2)=0$ в противоположном случае. Непосредственно из (65), (68) следует неравенство (67) при $J=2$.

Предположим, что неравенство (67) справедливо при $J \le J_0$ при соответствующем выборе $z_1(j),\ z_2(j)$ для $2 \le j \le J_0$ и докажем (67) при $J = J_0+1$. Рассмотрим две возможности:

$$\begin{array}{ll} 1) & A_1 y_{J_0+1}^{\alpha_1} \le A_2 y_{J_0+1}^{\alpha 2}; \\ 2) & A_1 y_{J_0+1}^{\alpha_1} > A_2 y_{J_0+1}^{\alpha 2}. \end{array} \tag{69}$$

Если выполнено первое неравенство в (69), определим $z_1(J_0+1) = z_1(J_0),\ z_2(J_0+1) = z_2(J_0)+1$. В противном случае определяем $z_1(J_0+1) = z_1(J_0)+1,\ \ z_2(J_0+1) = z_2(J_0)$. Проверим неравенство (67) при $J = J_0+1$, например, если выполнено первое неравенство в (69). В этом случае из неравенства (65) при $j = J_0$ имеем

$$y_{J_0} \le 2A_2 y_{J_0+1}^{\alpha_2} A_3^{J_0} \le \left[(2A_1)^{1/(1-\alpha_1)} + (2A_2)^{1/(1-\alpha_2)}\right]^{1-\alpha_2} y_{J_0+1}^{\alpha_2} A_3^{J_0}.$$

Используя оценку (67) с $J = J_0$, получаем неравенство

$$y_1 \le \left[(2A_1)^{1/(1-\alpha_1)} + (2A_2)^{1/(1-\alpha_2)}\right]^{1-\alpha_1^{z1(J_0)}\alpha_2^{z2(J_0)} + (1-\alpha_2)\alpha_1^{z1(J_0)}\alpha_2^{z2(J_0)}} \times$$
$$\times A_3^{\sum_{j=2}^{J_0} (j-1)\alpha_1^{z1(j-1)}\alpha_2^{z2(j-1)} + J_0\alpha_1^{z1(J_0)}\alpha_2^{z2(J_0)}} y_{J_0+1}^{\alpha_1^{z1(J_0)}\alpha_2^{z2(J_0)+1}},$$

совпадающее с (67) при $J = J_0+1$. Следовательно, неравенство (67) доказано.

Используя ограниченность последовательности $\{y_j\}$, получаем из (67) оценку (66) при $j \to \infty$, что доказывает лемму 5.

Далее будем рассматривать две возможности:

$$\begin{array}{ll} 1) & \left(\dfrac{2}{r}\right)^q [m_2 - m(r)]^{q-1+\bar{\lambda}} \le 1; \\ 2) & \left(\dfrac{2}{r}\right)^q [m_2 - m(r)]^{q-1+\bar{\lambda}} > 1, \end{array} \tag{70}$$

где $\bar{\lambda}$ определено в лемме 4.

Лемма 6. *Предположим, что выполнены первое неравенство в* (70) *и все условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные постоянные* $K_6, a(1), b(1), c(1)$, *зависящие только от* $m, n, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что справедливо неравенство*

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le K_6 (1+|k|)^{a(1)} \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}}\right]^{b(1)} r^{c(1)}. \tag{71}$$

Доказательство. Заметим, что из определения m_j следует $m(r/2) \le m_1$. Если справедливо первое неравенство в (70), то из леммы 4 получаем

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le [2^{n/q} K_5 (1+|k|)^a]^\theta \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^\theta \times \right.$$

$$\left. \times\, r^{[n+(b+1)q/(q-1+\bar{\lambda})]\theta} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{\theta/q} r^{[nq+q-1+q/(q-1+\bar{\lambda})]\theta} \right\}, \tag{72}$$

где

$$\theta = \left[b + q + \frac{n}{q}(q + \bar{\lambda} - 1) \right]^{-1}.$$

Принимая во внимание, что справедливы неравенства

$$C_{p,q}^{m,1}(F) \le C^{(0)} r^{n-q}, \quad r \le R, \tag{73}$$

с постоянной $C^{(0)}$, зависящей только от n, m, p, q, из (72) получаем оценку (71).

Лемма 7. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1 *и второе неравенство в* (70). *Тогда существуют положительные постоянные* $K_7, a(2), b(2), c(2)$, *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что справедлива оценка*

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le K_7 (1+|k|)^{a(2)} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{b(2)} r^{c(2)} \right\}. \tag{74}$$

Доказательство. Отметим, что в условиях леммы для всех $j = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{2^j}{r}\right)^q [m_{j+1} - m(r)]^{q-1+\bar{\lambda}} > 1. \tag{75}$$

В самом деле, левая часть (75) является возрастающей функцией j и при $j = 1$ неравенство (75) совпадает со вторым неравенством в (70).

Используя (75) и лемму 4, при $j = 1, 2, \ldots$ получаем неравенство

$$m_j - m(r) = 2^{jn\theta} [2^{n/q} K_5 (1+|k|)^a]^\theta \times$$

$$\times \left\{ [m_{j+1} - m(r)]^{[b+1+n(q-1+\bar{\lambda})/q]\theta} \left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^\theta + \right.$$

$$\left. + [m_{j+1} - m(r)]^{[1+n(q-1+\bar{\lambda})/q]\theta} \left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{\theta/n} r^{(q-1)\theta} \right\}, \tag{76}$$

где θ – то же число, что и в оценке (72).

Так как последовательность $m_j - m(r)$ ограничена, то, применяя лемму 5, оцениваем

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le m_1 - m(r) \le C_{25} (1+|k|)^{a/(q-1)} \times$$

$$\times \left\{ \left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{1/(q-1)} + \left(\left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{1/n} r^{q-1} \right)^{1/(b+q-1)}, \right. \tag{77}$$

что и доказывает утверждение леммы 7.

Из лемм 6, 7 получаем, что при выполнении каждого из неравенств в (70) справедлива оценка

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le \overline{K}(1+|k|)^{\overline{a}} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{\overline{b}} r^{\overline{c}} \right\} \tag{78}$$

с положительными $\overline{K}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, зависящими лишь от $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$.

Доказательство теоремы 3. Можем предполагать, что постоянная $\overline{c}$ в (78) настолько мала, что справедливо неравенство

$$(n-q)\overline{b} - \overline{c} > 0. \tag{79}$$

Обозначим через I_0 целую часть числа $\log_2(R/4d)$. Используя (78) при $1 \le i \le I_0$ и принимая во внимание, что $m(r) = 0$, получаем

$$m(2^{-i}R) = \sum_{j=1}^{i} \{m(2^{-j}R) - m(2^{1-j}R)\} \le$$

$$\le \overline{K}(1+|k|)^{\overline{a}} \left\{ \left[R^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F)\right]^{1/(q-1)} \sum_{j=1}^{i} 2^{((j-1)n-q)/(q-1)} + \right.$$

$$\left. + \left[R^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F)\right]^{\overline{b}} R^{\overline{c}} \sum_{j=1}^{i} 2^{(j-1)[\overline{b}(n-q)-\overline{c}]} \right\} \le$$

$$\le C_{26}(1+|k|)^{\overline{a}} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{(2^{-i}R)^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{(2^{-i}R)^{n-q}} \right]^{\overline{b}} (2^{-i}R)^{\overline{c}} \right\}. \tag{80}$$

Далее для r из интервала $[8d, R]$ определим целое число $i(r)$ так, чтобы выполнялось неравенство $2^{-i(r)}R \le r < 2^{1-i(r)}R$. Тогда из (80) получаем оценку

$$\operatorname{ess\,sup}\{|\mathrm{u(x)}| : x \in \Omega \setminus B(r)\} \le m(2^{-i(r)}R) \le$$

$$\le C_{27}(1+|k|)^{\overline{a}} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{\overline{b}} r^{\overline{c}} \right\},$$

из которого следует утверждение теоремы 3.

1. *Скрыпниик И.В.* Квазилинейная задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–25.
2. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: Teubner Verlag, 1986. – 242 p.
3. *Dal Maso G., Skrypnik I.V.* Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1994. – 49 p. (Preprint SISSA).

4. *Скрыпник И.В*. Усреднение нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 8. – С. 125–157.
5. *Скрыпник И.В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104–1119.
6. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
7. *Gagliardo E.* Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili // Ric. Mat. – 1959. – **8**. – P. 24–51.
8. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1959. – **3**, № 13. – P. 115–162.

УСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

(Доклады Академии наук УССР, Сер. А. – 1982. – № 2)

1. Постановка задачи. Сообщение посвящено изучению сходимости решений задач Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в последовательности областей с мелкозернистой границей.

Пусть Ω – произвольная ограниченная область в n-мерном эвклидовом пространстве R^n и предположим, что при каждом натуральном значении s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}\,(i=1,\ldots,I(s))$, содержащихся в Ω.

Дальше будут сформулированы условия на $F_i^{(s)}$, из которых, в частности, следует, что при $s\to\infty$ диаметры $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю. Следуя работе [1], последовательностью областей с мелкозернистой границей называем последовательность $\Omega^{(s)}=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{I(s)}F_i^{(s)}$. Будем предполагать, что при каждом $s\;\partial\Omega^{(s)}$ граница области $\Omega^{(s)}$ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$ при некотором $\alpha>0$.

В области $\Omega^{(s)}$ рассматривается квазилинейная эллиптическая задача

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)-a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\;\; x\in\Omega^{(s)}, \tag{1}$$

$$u(x)=f(x),\;\; x\in\partial\Omega^{(s)}, \tag{2}$$

где $f(x)$ – известная, определенная в $\overline{\Omega}$ функция.

Сложная структура области $\Omega^{(s)}$ не вносит дополнительных затруднений в изучение разрешимости и единственности решения задачи (1)–(2). Для каждого s при определенных предположениях относительно данных задачи (1), (2) существование решения можно доказать известными методами (см. [1]). Однако для таких задач при больших s практически невозможно реализовать приближенные методы нахождения решений, и поэтому актуальным становится вопрос о возможности приближенной замены задачи (1), (2) более простой задачей того же вида в фиксированной области, к решению которой стремятся решения задач (1), (2) при $s\to\infty$.

В связи с этим возникает необходимость выяснить условия, при которых сходятся решения задачи (1), (2) при $s \to \infty$, и указать граничную задачу для предельной функции. Решению этих вопросов и посвящено настоящее сообщение.

Отметим, что указанные задачи описывают различные реальные процессы, протекающие в средах с инородными включениями. Эти задачи возникают в теореии упругости, теории композиционных материалов, теории фильтрации и в теории многих других разделов физики и механики.

Линейные задачи для областей с мелкозернистой границей подробно изучены в работах В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова и их учеников (см., например, [2]). Отметим также многочисленные работы по теории усреднения для дифференциальных уравнений в частных производных. Эти результаты изложены в обзорной статье О.А. Олейник и др. [3].

2. Формулировка предположений. Далее Ω_0 – область в R^n, такая, что $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \Omega_0$, и обозначим через δ расстояние от $\overline{\Omega}$ до $\partial\Omega_0$ – границы области Ω_0. Будем предполагать выполнение следующих условий относительно функций $a_i(x,u,p),\ a(x,u,p)$:

A$_1$) функции $a_i(x,u,p),\ a(x,u,p) i = 1,\ldots,n$ определены при $x \in \overline{\Omega}, u \in R^1,\ p \in R^n$, непрерывны по (u, p) при почти всех $x \in \overline{\Omega}$, измеримы по x при любых $u,\ p;\ a_i(x,u,0) \equiv 0$ при $x \in \Omega,\ u \in R^1$;

A$_2$) существуют положительные постоянные $c_1, c_2, \varepsilon, 1 < m < n,\ \mu < \dfrac{mn}{n-m}$ и функция $\varphi(x) \in L_r(\Omega),\ r > \dfrac{n}{m}$, такие, что при всех значениях $x \in \overline{\Omega},\ u,v \in R',\ p,q \in R^r$ выполнены неравенства:

$$|a_i(x,u,p) - a_i(x,v,q)| \le c_1[(1+|u|^\mu + |v|^\mu + |p|^m + |q|^m)^{\frac{m-2}{m}}|p-q| +$$

$$+(1+|u|^\mu + |v|^\mu + |p|^m + |q|^m)^{1-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{m}}|u-v|],\ |a(x,u,p)| \le$$

$$\le c_1(|u|^\mu + |p|^m)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \varphi(x),\ \sum_{i=1}^{n}[a_i(x,u,p) - a_i(x,u,q)](p_i - q_i) \ge$$

$$\ge c_2(1+|p-q|)^{m-2}|p-q|^2,\ a(x,u,p)u \ge -(c_2 - \varepsilon)\cdot|p|^m - \varphi(x)\cdot(1+|u|). \tag{3}$$

Замечание 1. При рассмотрении последовательности задач (1), (2) в случае $m = n$ требуются другие предположения относительно функций $a_i(x,u,p),\ a(x,u,p)$ и также изменятся формулировки результатов. Поэтому далее для простоты изложения рассматривается только случай $m < n$. При $m > n$ нахождение предельной функции для последовательности решений задач (1), (2) упрощается, благодаря компактности вложения $W_m'(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$.

Перейдем к формулировке условий на множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ минимальный из радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $x_i^{(s)}$ – центр такого шара радиуса

$d_i^{(s)}$, что $F_i^{(s)} \subset B_{d_i^{(s)}}(x_i^{(s)})$. Через $B_\rho(x_0)$ здесь и далее обозначается шар радиуса ρ с центром в точке x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B_i^{(s)} = B_{d_i^{(s)}}(x_i^{(s)})$ до $\bigcup_{j \neq i} B_j^{(s)} \cup \partial\Omega$.

Будем предполагать, что числа $d_i^{(s)}, r_i^{(s)}$ удовлетворяют условиям:

B1) $d_i^{(s)} \le c_3 r_i^{(s)}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \max\limits_{1\le i\le I_s} r_i^{(s)} = 0$;

B2) $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{I_s} \dfrac{(d_i^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}m}}{(r_i^{(s)})^{\frac{n}{m-1}}} < \infty$,

где $c_3 > 1$.

Для формулировки еще одного условия на $F_i^{(s)}$ нам понадобятся дополнительные функции $v_i^{(s)}$, определяемые ниже и играющие фундаментальную роль в данной работе. Для произвольных вещественных чисел k_1, k_2 обозначим через $v_i^{(s)}(x, k_1, k_2)$ функцию, принадлежащую $W_m'(B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus F_i^{(s)})$, и являющуюся обобщенным решением задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, k_1, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,\ x \in B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus F_i^{(s)}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \text{ при } |x - x_i^{(s)}| = \delta \\ u(x) &= k_2 \text{ при } x \in \partial F_i^{(s)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Существование и единственность решения задачи (4) следует, например, из работы [1].

Будем предполагать выполнение условия

C) существует непрерывная функция $c(x, k_1, k_2)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j \in I_{(s)}^{(B)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_2} \int_\Omega a_i\left(x, k_1, \frac{dv_j^{(s)}}{dx}(x, k_1, k_2)\right) \frac{dv_j^{(s)}}{dx_i}(x, k_1, k_2)\, dx = \int_B c(x, k_1, k_2)\, dx, \tag{5}$$

где $I_s^{(B)}$ – множество тех номеров $1 \le j \le I_s$, для которых $x_j^{(s)} \in B$.

Легко видеть, что в широких предположениях, например, в случае вариационных задач, правая часть (5) допускает инвариантную емкостную трактовку, не зависящую от специального определения функций $v_i^{(s)}$. Функция c, существование которой предполагается, характеризует плотность распределения множеств $F_i^{(s)}$.

3. Формулировка результата. Предположения A1), A2) обеспечивают существование обобщенного решения задачи (1), (2) при произвольной функции $f(x) \in W_m'(\Omega)$.

Функцию $u(x) \in W_m'(\Omega^{(s)})$ называем обобщенным решением задачи (1)–(2), если $u(x) - f(x) \in \overset{0}{W}{}_m'(\Omega^{(s)})$ и для произвольной функции $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_m'(\Omega^{(s)})$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi \right\} dx = 0. \quad (6)$$

Существование обобщенного решения задачи (1), (2) можно доказать известными методами, основанными на теории монотонных операторов [4]. Сформулированные предположения относительно функций $a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right), a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ не гарантируют единственность решения задачи (1), (2). Дополнительных условий для единственности не будем накладывать.

Теорема 1. *При выполнении условий* A_1, A_2 *при каждом* s *задача* (1)–(2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u_s(x)$. *Существует постоянная* R, *не зависящая от* s, *такая, что при всех* s *выполнена оценка:*

$$\| u_s \|_{W_s'(\Omega_p^{(s)})} \leq R.$$

Если дополнительно предполагать функцию $f(x)$ *ограниченной, то с независящей от* s *постоянной* M *справедливо неравенство*

$$\max_{x\in\Omega^{(s)}} | u_s(x) | \leq M.$$

Оценка максимума модуля решения получена методом Мозера [4].

Далее через $u_s(x)$ обозначим одно из возможных решений задачи (1), (2), удовлетворяющее указанным оценкам. Тем самым последовательность $\{u_s(x)\}$ будем считать фиксированной. Функции $u_s(x)$, определенные при $x \in \Omega^{(s)}$, продолжим на Ω, полагая $u_s(x) = f(x)$ при $x \in \bigcup_{i=1}^{I_s} F_i^{(s)}$. Так, получающиеся функции $u_s(x)$, определенные при $x \in \Omega$, принадлежат $W_m'(\Omega)$ и для них выполнена оценка

$$\| u_s \|_{W_m'(\Omega)} \leq R_1 \quad (7)$$

с независящей от s постоянной R_1. Из (7) следует, что последовательность $u_s(x)$ содержит слабо сходящиеся подпоследовательности.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* A_1, A_2, B_1, B_2, C, $f(x)$ *– непрерывная функция из* $W_m'(\Omega)$ *и* $u_s^{(x)}$ *– последовательность решений задачи* (1)–(2), *удовлетворяющих условию* (7). *Существует подпоследовательность* $\{u_{s_k}(x)\}$ *последовательности* $\{u_s(x)\}$ *такая, что:*

1) *подпоследовательность* $u_{s_k}(x)$ *слабо сходится в* $W_m'(\Omega)$ *к некоторой функции* $u_0(x) \in W_m'(\Omega)$ *и сильно сходится в* $W_p'(\Omega)$ *при* $p < m$;

2) *функция* $u_0(x)$ *является ограниченным обобщенным решением задачи*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x, u, f - u) = 0, \;\; x \in \Omega,$$

$$u(x) = f(x), \;\; x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Замечание 2. 1. Если предельная задача (8) имеет единственное решение, то вся последовательность $u_s(x)$ сходится к $u_0(x)$. 2. Отметим, что характер условий B_1, B_2, С, в которых рассматривается линейный случай, полностью согласуется с условием работы [2]. Так что в случае линейного уравнения (1) накладываемые нами условия полностью совпадают с условиями работы [2]. 3. Теорема 2 содержит более сильные утверждения относительно сходимости последовательности $\{u_{s_k}(x)\}$, чем работа [2], даже для линейной задачи. А именно новым для линейного случая является сильная сходимость последовательности в W_p', т.е. сильная сходимость производных решений.

SUMMARY. Conditions of convergence of the Dirichlet problem solutions are established for quasi-linear elliptic second-order equations in the sequence of fields with a fine-grained boundary. The boundary problem is obtained for the limit function.

1. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. 576 с.
2. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. 279 с.
3. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. – Успехи мат. наук, 1979, 34: 5, с. 135–210.
4. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев: Наук. думка, 1973. 219 с.

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПРИ ИЗМЕЛЬЧЕНИИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

*(Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций: Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1982. - **115**)*

Работа посвящена изучению сходимости решений задач Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в последовательности областей с мелкозернистой границей в случае концентрации мелкозернистой границы вблизи некоторой гладкой поверхности.

Пусть Ω – произвольная ограниченная область в n-мерном эвклидовом пространстве R^n и предположим, что при каждом натуральном значении s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$ $(i = 1,...,I_s)$, содержащихся в Ω. Дальше будут сформулированы условия на $F_i^{(s)}$, из которых, в частности, следует, что при $s \to \infty$ диаметры $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю. Используя терминологию монографии [1], последовательность областей $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I_s} F_i^{(s)}$ называем последовательностью областей с мелкозернистой границей.

В области $\Omega^{(s)}$ рассматривается квазилинейная эллиптическая задача

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in \Omega^{(s)} \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega^{(s)}, \tag{2}$$

где $f(x)$ – некоторая известная, определенная в $\overline{\Omega}$, функция.

Сложная структура области $\Omega^{(s)}$ не вносит дополнительных затруднений в изучении разрешимости задачи (1), (2). При определенных предположениях относительно функций a_i, a, f для каждого s существование решения задачи (1)–(2) можно доказать известными методами (см., например, [2]). Однако для таких задач при больших s практически невозможно реализовать численные методы нахождения решений и в связи с этим принципиальное значение приобретает вопрос о возможности приближенной замены задачи (1), (2) более простой задачей того же вида в фиксированной области, к решению которой стремятся решения задач (1), (2) при $s \to \infty$.

В связи с этим возникают вопросы: выяснить условия, при которых сходятся решения задач (1), (2) при $s \to \infty$, выяснить характер сходимости и указать для предельной функции граничную задачу. Решению этих вопросов в том случае, когда множества $F_i^{(s)}$ сосредоточены вблизи некоторой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности Γ, расположенной внутри Ω, и посвящена настоящая работа. Случай объемного расположения множеств $F_i^{(s)}$ был рассмотрен автором в работе [3]. Из результатов данной работы следует, что в определенных условиях при больших s решения задачи (1), (2) можно приближенно заменять предельной функцией, которую можно находить, не решая последовательность задач (1), (2).

Отметим, что линейные задачи для областей с мелкозернистой границей подробно изучены в работах В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова (см., например, [1]). Большое число работ посвящено близким вопросам, связанным с усреднениями для дифференциальных уравнений в частных производных. Существенным дополнительным условием является при этом предположение об определенной периодичности расположения множеств $F_i^{(s)}$. Обзор этих результатов имеется в монографии [3] и статье [4].

Отметим также, что указанные задачи описывают различные реальные процессы, протекающие в средах с инородными включениями. Эти задачи возникают в теории упругости, теории фильтрации и многих других разделах физики и механики.

1. Формулировка результата. Будем предполагать выполнение следующих условий относительно функций $a_i(x,u,p),\ a(x,u,p),\ f(x)$:

A$_1$) функции $a_i(x,u,p),\ a(x,u,p),\ i=1,\dots,n$ определены при $x\in\overline{\Omega},\ u\in R^1,\ p\in R^n$, непрерывны по u, p при почти всех $x\in\overline{\Omega}$, измеримы по x при любых u, p; $a_i(x,u,0)\equiv 0$ при $x\in\overline{\Omega},\ u\in R^1$; $f(x)\in W_m^1(\Omega)$;

A$_2$) существуют положительные постоянные $c_1, c_2, \varepsilon, m, \mu$, удовлетворяющие условиям $2\le m<n,\ \mu<\dfrac{mn}{n-m}$, и функции $\varphi(x)\in L_r(\Omega),\ r>\dfrac{n}{m}$, такие, что при всех значениях $x\in\overline{\Omega},\ u,v\in R^1,\ p,q\in R^n$ выполнены неравенства:

$$|a_i(x,u,p)-a_i(x,v,q)|\le c_1\{(1+|u|^\mu+|v|^\mu|+|p|^m+|q|^m)^{\frac{m-2}{m}}|p-q|+$$

$$+(1+|u|^\mu+|v|^\mu+|p|^m+|q|^m)^{1-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{m}}|u-v|\}, \tag{3}$$

$$|a(x,u,p)|\le c_1(|u|^\mu+|p|^m)^{\frac{\mu-1}{\mu}}+\varphi(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n}[a_i(x,u,p)-a_i(x,u,q)](p_i-q_i)\ge c_2(1+|p-q|)^{m-2}|p-q|^2,$$

$$a(x,u,p)u\ge-(c_2-\varepsilon)|p|^m-\varphi(x)(1+|u|).$$

Замечание 1. Рассмотрение последовательности задач (1), (2) в случае $m=n$ может быть проведено аналогично изложенному ниже, только нужно изменить формулировку некоторых предположений. При $m>n$ нахождение предельной функции для последовательности решений задач (1), (2) упрощается благодаря компактности вложения $W_m^1(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$.

При выполнении условий A1), A2) разрешимость задачи (1), (2) в $W_m^1(\Omega^{(s)})$ следует из известных результатов, основанных на теории монотонных операторов (см. [2, 6]). Функция $u(x)\in W_m^1(\Omega^{(s)})$ называется решением задачи (1), (2), если $u(x)-f(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$ и для произвольной функции $\varphi(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega^{(s)}}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi\right\}dx=0. \tag{4}$$

Из [2] следует, что при выполнении условий A1), A2) при каждом s задача (1), (2) имеет, по крайней мере, одно решение $u_s(x)$, удовлетворяющее оценке

$$\| u_s \|_{W_m^1(\Omega^{(s)})}\le R \tag{5}$$

с постоянной R, не зависящей от s. Продолжим эти решения $u_s(x)$ на Ω, полагая $u_s(x)=f(x)$ при $x\notin\Omega^{(s)}$. Так получающиеся функции $u_s(x)$ принадлежат пространству $W_m^1(\Omega)$ и для них выполнена оценка

$$\| u_s \|_{W_m^1(\Omega)}\le R+\| f \|_{W_m^1(\Omega)}. \tag{6}$$

Перейдем к формулировке условий на множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ минимум радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $B_i^{(s)}$ – шар радиуса $d_i^{(s)}$, содержащий $F_i^{(s)}$, и $x_i^{(s)}$ – его центр. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B_i^{(s)}$ до $\bigcup\limits_{j\ne i} B_j^{(s)}$.

Дальше также используются обозначения : $B_\rho(x_0)=\{x\in R^n : |x-x_0|\le\rho$ – шар радиуса ρ с центром в x_0, для произвольного множества $\Gamma\subset R^n$ через $U_p(\Gamma)$ обозначаем множество точек пространства R^n, удаленных от Γ на расстояние, не большее, чем ρ.

Будем предполагать выполненными условия:

B1) существуют замкнутая поверхность Ляпунова Γ, расположенная внутри Ω, и последовательность положительных чисел $\gamma^{(s)}, s=1,2,\ldots$, такие, что при $i=1,\ldots,I_s$, $F_i^{(s)}\subset U_{\gamma^{(s)}}(\Gamma)$;

B2) существует число $c_3>1$ такое, что при $s=1,2,\ldots,$ $i=1,\ldots,I_s$ выполнены условия:

$$d_i^{(s)}\le c_3 r_i^{(s)},\ \ \max_{1\le i\le I_s} r_i^{(s)}\le c_3\gamma^{(s)},\ \ \lim_{s\to\infty}\gamma^{(s)}=0, \tag{7}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}[\gamma^{(s)}]^{\frac{1}{m-1}}\sum_{i=1}^{I_s}\frac{(d_i^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}\cdot m}}{(r_i^{(s)})^{\frac{n}{m-1}}}<\infty. \tag{8}$$

Для формулировки еще одного условия на $F_i^{(s)}$ понадобятся дополнительные функции $v_i^{(s)}$, определяемые ниже аналогично [3] и играющие фундаментальную роль в данной работе.

Для произвольных вещественных чисел k_1, k_2 обозначим через $v_i^{(s)}(x, k_1, k_2)$ функцию, принадлежащую $W_m^1(B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus F_i^{(s)})$, являющуюся решением задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, k_1, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in B_\delta(x_i^{(s)}) \setminus F_i^{(s)}, \tag{9}$$

$$u(x) = 0 \text{ при } |x - x_i^{(s)}| = \delta, \quad u(x) = k_2 \text{ при } x \in \partial F_i^{(s)}. \tag{10}$$

Здесь δ – фиксированное число, $\delta \le \frac{\rho}{2}$, где ρ – расстояние от Γ до $\partial\Omega$. Функции $v_i^{(s)}$ и все рассмотрения дальше можно вести при достаточно больших s, так, чтобы $d_i^{(s)} + r_i^{(s)} < \delta$. Существование и единственность решения задачи (9), (10) следует, например, из [2].

Будем предполагать выполнение условия:

C) существует непрерывная функция $C(x,k_1,k_2)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{j\in I_s(B)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_2} \int_{\Omega} a_i\left(x, k_1, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x}(x,k_1,k_2)\right) \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x_i}(x,k_1,k_2)\, dx = \int_{B\cap\Gamma} C(x,k_1,k_2)\, ds, \tag{11}$$

где $I_s(B)$ – множество тех номеров j, $1 \le j \le I_s$, для которых $x_j^{(s)} \in B$.

Легко видеть, что в случае вариационного уравнения (1) правая часть (11) допускает инвариантную емкостную трактовку, не зависящую от специального выбора $v_j^{(s)}$, функция $C(x,k_1,k_2)$, существование которой предполагается условием C), может рассматриваться как плотность предельной меры для определенной последовательности мер.

Замечание 2. Определение функций $v_j^{(s)}(x,k_1,k_2)$ зависит от выбора числа δ. Используя оценки для $v_j^{(s)}$, можно показать, что левая часть (11) от δ не зависит. Тем самым и функция $C(x,k_1,k_2)$ не зависит от δ.

В данной работе будет дано доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* A$_1$), A$_2$), B$_1$), B$_2$), $f(x)$ *– ограниченная функция из* $W_m^1(\Omega)$, $u_s(x)$ *– последовательность решений задачи* (1), (2), *удовлетворяющих условию* (6), *и* $\{u_{s_k}(x)\}$ *– некоторая подпоследовательность последовательности* $\{u_s(x)\}$, *слабо сходящаяся в* $W_m^1(\Omega)$ *к некоторой функции* $u_0(x)$. *Тогда* $u_{s_k}(x)$ *сильно сходится к* $u_0(x)$ *в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p < m$.

Замечание 3.1. Легко видеть, что в условиях теоремы 1 сильная сходимость $u_{s_k}(x)$ к $u_0(x)$ может не иметь места.

2. Теорема 1 содержит новый результат даже для линейного случая. В [1] не установлена сильная L_p-сходимость градиентов решений. Отметим также, что предположения B$_1$), B$_2$), C) данного пункта полностью согласуются с условиями монографии [1] для линейного случая; эти условия превращаются в условия для линейной задачи, соответствующей $m = 2$.

Граничная задача для предельной функции $u_0(x)$ дается следующей теоремой, доказываемой аналогично случаю объемного распределения множеств $F_i^{(s)}$. В связи с этим ее доказательство в данной работе не приводится.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *условие C) и* $f(x)$ *– непрерывная функция. Тогда предельная функция* $u_0(x)$ *является решением следующей задачи сопряжения*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - a\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,\ x \in \Omega \setminus \Gamma, \tag{12}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{13}$$

$$u_i\big|_\Gamma = u_e\big|_\Gamma,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(\nu,x_j)\right]_e\Bigg|_\Gamma - \sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(\nu,x_j)\right]_i\Bigg|_\Gamma = C(x,u,f-u). \tag{14}$$

Здесь $u_i\big|_\Gamma, u_e\big|_\Gamma$ – соответственно предельные значения $u(x)$ на Γ со стороны внутренней области Ω_i, ограниченной поверхностью Γ, и области $\Omega_e = \Omega \setminus \overline{\Omega}_i$; $\nu(x)$ – нормаль к Γ в точке x, направленная в сторону области Ω_e.

2. Оценки решений и функций $\boldsymbol{v_i^{(s)}(x,k_1,k_2)}$. Используя метод Мозера получения оценки максимума модуля решения, можно доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $u_s(x)$ *– последовательность обобщенных решений задачи* (1), (2), *удовлетворяющих неравенству* (6). *Предположим, что выполнены условия* A$_1$), A$_2$) *и* $f(x)$ *– ограниченная функция из* $W_m^1(\Omega)$. *Тогда с некоторой постоянной* M, *независящей от* s, *выполнена оценка*

$$\max_{x\in\Omega} |u_s(x)| \le M,\ s = 1,2,\dots. \tag{15}$$

Основой для доказательства теорем 1, 2 служат различные интегральные и точечные оценки вспомогательных функций $v_i^{(s)}$. Отметим некоторые из них, считая функцию $v_i^{(s)}$ продолженной постоянной k_2 на $F_i^{(s)}$.

Теорема 4. *Существует постоянная* C, *зависимая лишь от* m,n,μ,δ, *постоянных* C_1, C_2 *из условия* A$_2$) *и числа* N, *такая, что при* $|k_1| \le N,\ k_2 \in R^1,\ s = 1,2,\dots,\ i = 1,\dots,I_s$ *выполнены оценки:*

1) $$\int_{B_\delta(x_i^{(s)})} \left(1 + \left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \cdot \left|\frac{\partial v_i}{\partial x}\right|^2 dx \le C\left\{\left(\frac{k_2}{d_i^{(s)}}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{d_i^{(s)}}\right)^m\right\}(d_i^{(s)})^n, \tag{16}$$

где $v_i^{(s)} = v_i^{(s)}(x,k_1,k_2)$;

2) $$|v_i^{(s)}(x,k_1,k_2)|\le Ck_2\left(\frac{d_i^{(s)}}{|x-x_i^{(s)}|}\right)^{\frac{n-m}{m-1}},\ x\in B_\delta(x_i^{(s)}); \tag{17}$$

3) *при* $d_i^{(s)}<\rho<\delta$

$$\int\limits_{B_\delta(x_i^{(s)})\setminus B_\rho(x_i^{(s)})}\left(1+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\cdot\left|\frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x}\right|^2dx\le C\cdot k_2\cdot\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho}\right)^{\frac{n-m}{m-1}}\cdot\left\{k_2^m+k_2^2(d_i^{(s)})^{m-2}\right\}^{\frac{m-1}{m}}(d_i^{(s)})^{n-m}. \tag{18}$$

Наиболее важной и трудно устанавливаемой из этих оценок является вторая, доказываемая некоторой модификацией метода Мозера. Неравенства (16) и (18) получаются путем подстановки в интегральное тождество для $v_i^{(s)}$ некоторых стандартных пробных функций и проведения затем простых оценок. При этом при доказательстве неравенства (18) используется оценка (17).

Отметим точность оценки (17) – показатель степени $\frac{n-m}{m-1}$ является неулучшаемым, в чем легко убедиться на модельных уравнениях, в частности, в линейном случае на примере уравнения Лапласа.

3. Доказательство теоремы 1. Для краткости выбранную в условии теоремы 1 слабо сходящуюся последовательность будем обозначать через $u_s(x)$ без использования дополнительного индекса k.

Далее C_3 – число из условия B$_1$). Зафиксируем бесконечно дифференцируемую невозрастающую функцию $\chi:R^1\to R^1$, равную нулю при $t>\frac{2+4C_3}{3+4C_3}$, единице при $t<\frac{1+4C_3}{2+4C_3}$. И пусть $\psi_i^{(s)}(x)=\chi\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)$, где

$$\rho_i^{(s)}=\max\left\{d_i^{(s)}+\frac{d_i^{(s)}}{2C_3},\ \frac{(r_i^{(s)})^{\frac{n}{n-m}}}{(\gamma^{(s)})^{\frac{1}{n-m}}}\cdot\frac{\ln^2 r_i^{(s)}}{2\lambda}\right\},$$

$\lambda=C_3^{\frac{1}{n-m}}\cdot\max\limits_{0<t\le d}\left\{t^{\frac{m-1}{n-m}}\ln^2\frac{1}{t}\right\}$, d – диаметр множества Ω.

Обозначим $D_i^{(s)}=\left\{x\cdot|x-x_i^{(s)}|\le\frac{2+4C_3}{3+4C_3}\rho_i^{(s)}\right\}$, и пусть $f_i^{(s)}=(\mathrm{mes}\,D_i^{(s)})^{-1}\cdot\int\limits_{D_i^{(s)}}f(x)\,dx$, $u_i^{(s)}=(\mathrm{mes}\,D_i^{(s)})^{-1}\cdot\int\limits_{D_i^{(s)}}u_0(x)dx$, где $u_0(x)$ – предельная функция для последовательности $u_s(x)$.

Определим при $s=1,2,...,\ i=1,...,I_s$

$$r_1^{(s)}(x)=\sum_{i=1}^{I_s}[u_i^{(s)}-u_0(x)]\cdot\psi_i^{(s)}(x),$$

$$r_2^{(s)}(x)=\sum_{i=1}^{I_s}[f(x)-f_i^{(s)}]\cdot\psi_i^{(s)}(x), \tag{19}$$

$$r_3^{(s)}(x)=\sum_{i=1}^{I_s} v_i^{(s)}(x,u_i^{(s)},f_i^{(s)}-u_i^{(s)})\cdot\psi_i^{(s)}(x),$$

и запишем следующее разложение для $u_s(x)$:

$$u_s(x)=u_0(x)+\sum_{j=1}^{s} r_j^{(s)}(x)+w_s(x), \tag{20}$$

где $w_s(x)$ – остаточный член, определяемый равенством (20).

Доказательство теоремы 1 основано на изучении сходимости каждого из членов правой части равенства (20) при $s\to\infty$.

Сделаем предварительно несколько простых замечаний. Непосредственно из определений чисел $r_i^{(s)}, d_i^{(s)}$ следует, что

$$B_{\sigma_i^{(s)}}(x_i^{(s)})\cap B_{\sigma_j^{(s)}}(x_j^{(s)})=\varnothing \text{ при } i\neq j, \tag{21}$$

где $\sigma_i^{(s)}=d_i^{(s)}+\dfrac{r_i^{(s)}}{2}$. Отсюда и условий B$_1$), B$_2$) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{I_s}[r_i^{(s)}]^n\le C_4\cdot\gamma^{(s)}. \tag{22}$$

Здесь и дальше, не оговаривая особо, через C_k обозначаем постоянные, зависящие только от известных параметров.

Из определения чисел $\rho_i^{(s)}$ следует, что $\rho_i^{(s)}\le\sigma_i^{(s)}$. Отсюда и (21) получаем, что носители функций $\psi_i^{(s)}(x)$ между собой не пересекаются, $i=1,\ldots,I_s$.

Лемма 1. *Последовательности* $r_1^{(s)}(x), r_2^{(s)}(x)$ *сильно сходятся к нулю в* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s\to\infty$.

Доказательство достаточно провести для $r_1^{(s)}(x)$, так как сходимость $r_2^{(s)}(x)$ устанавливается аналогично. В силу неравенства (15) $|u_i^{(s)}-u_0(x)|\le 2M$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|r_1^{(s)}(x)\|_{L_m(\Omega)}^m&=\sum_{i=1}^{I_s}\|[u_i^{(s)}-u_0(x)]\psi_i^{(s)}(x)\|_{L_m(D_i^{(s)})}^m\le\\&\le(2M)^m\cdot\sum_{i=1}^{I_s}\operatorname{mes}D_i^{(s)}\le(2M)^m\cdot\left(C_3+\frac{1}{2}\right)^n\operatorname{mes}B_1(0)\sum_{i=1}^{I_s}(r_i^{(s)})^n\end{aligned} \tag{23}$$

и правая часть стремится к нулю в силу (22).

Отметим, что из последнего неравенства в (23) следует

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{I_s}\operatorname{mes}D_i^{(s)}=0. \tag{24}$$

Оценим L_m – нормы градиентов функций $r_1^{(s)}(x)$:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}r_1^{(s)}(x)\right\|_{L_m(\Omega)}^m\le C_5\sum_{i=1}^{I_s}\left\{\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_{L_m(D_i^{(s)})}^m+\frac{1}{(\rho_i^{(s)})^m}\|u_i^{(s)}-u_0(x)\|_{L_m(D_i^{(s)})}^m\right\}. \tag{25}$$

Второе слагаемое фигурной скобки оценим по хорошо известному аналогу неравенства Пуанкаре

$$\left\| v(x) - \frac{1}{\mathrm{mes}\, B_\rho(x_0)} \int_{B_\rho(x_0)} v(y)\, dy \right\|_{L_m(B_\rho(x_0))} \le k\rho \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L_m(B_\rho(x_0))}, \tag{26}$$

справедливому с независящей от ρ постоянной k для произвольной функции $v(x) \in W_m^1(\Omega)$ при $B_\rho(x_0) \subset \Omega$.

Получаем из (25)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} r_1^{(s)}(x) \right\|_{L_m(\Omega)}^m \le C_6 \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{L_m(E^{(s)})}^m, \tag{27}$$

где $E^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{I_s} D_i^{(s)}$. Теперь сходимость к нулю при $s \to \infty$ правой части (27) следует из свойства абсолютной непрерывности интеграла и (24).

Лемма 2. *Последовательность* $r_3^{(s)}(x)$ *слабо сходится к нулю в* $W_m^1(\Omega)$ *и сильно сходится в* $W_p^1(\Omega)$ *при* $p < m$.

Доказательство. В силу неравенства (15) имеем

$$| f_i^{(s)} - u_i^{(s)} | \le M + \max_{x \in \Omega} | f(x) | = M'.$$

Поэтому и модули функций $v_i^{(s)}(x, u_i^{(s)}, f_i^{(s)} - u_i^{(s)})$ ограничены постоянной M' и

$$\| r_3^{(s)}(x) \|_{L_m(\Omega)}^m \le \sum_{i=1}^{I_s} \| v_i^{(s)}(x, u_i^{(s)}, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}) \|_{L_m(D_i^{(s)})}^m \le (M')^m \cdot \sum_{i=1}^{I_s} \mathrm{mes} D_i^{(s)}.$$

В силу (24) получаем сильную сходимость к нулю $r_3^{(s)}(x)$ в $L_m(\Omega)$.

Оценим нормы градиентов $r_3^{(s)}(x)$ в $L_p(\Omega)$, разбивая множество номеров $i = 1, \dots, I_s$ на два подмножества $I'(s)$ и $I''(s)$ по следующему принципу: $i \in I'(s)$, если $\rho_i^{(s)} = d_i^{(s)} \left(1 + \frac{1}{2C_1} \right)$; $i \in I''(s)$ в противном случае.

Имеем при $p \le m$

$$\left\| \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x} \right\|_{L_p(\Omega)}^p \le C_7 \sum_{i=1}^{I_s} \left\| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right\|_{L_p(D_i^{(s)})}^p + C_7 \sum_{i=1}^{I_s} \| v_i^{(s)} \|_{L_p(K_i^{(s)})}^p \frac{1}{(\rho_i^{(s)})^p}, \tag{28}$$

где

$$K_i^{(s)} = \left\{ x \in R^n : \frac{1 + 4C_3}{2 + 4C_3} \cdot \rho_i^{(s)} \le | x - x_i^{(s)} | \le \frac{2 + 4C_3}{3 + 4C_3} \cdot \rho_i^{(s)} \right\}.$$

И будем дальше оценивать слагаемые правой части (28), группируя их по $i \in I'(s)$ и $i \in I''(s)$:

$$\begin{gathered} \sum_{i \in I'(s)} \| v_i^{(s)} \|_{L_p(K_i^{(s)})}^p \frac{1}{(\rho_i^{(s)})^p} \le (M')^p \cdot \sum_{i \in I'(s)} (\rho_i^{(s)})^{n-p} \le \\ \le C_8 \cdot \sum_{i \in I'(s)} (d_i^{(s)})^{n-p} \le C_8 \cdot \max_{1 \le i \le I_s} (d_i^{(s)})^{m-p} \sum_{i \in I'(s)} (d_i^{(s)})^{n-m}. \end{gathered} \tag{29}$$

Покажем, что последняя сумма стремится к нулю.

$$\sum_{i\in I'(s)} (d_i^{(s)})^{n-m} \le C_9 (\gamma^{(s)})^{\frac{1}{m-1}} \max_{1\le i\le I_s}\left[\ln\frac{1}{r_i^{(s)}}\right]^{\frac{-2(n-m)}{m-1}} \sum_{i\in I'(s)} \frac{(d_i^{(s)})^{\frac{(n-m)m}{m-1}}}{(r_i^{(s)})^{\frac{n}{m-1}}}. \tag{30}$$

Это неравенство следует из того, что при $i \in I'(s)$

$$d_i^{(s)} \ge \frac{C_3}{\lambda(2C_3+1)} \cdot (r_i^{(s)})^{\frac{n}{n-m}} (\gamma^{(s)})^{-\frac{1}{n-m}} \ln^2 \frac{1}{r_i^{(s)}}. \tag{31}$$

И правая часть (30) стремится к нулю в силу B$_2$).

Используя оценку (17), получаем при $p < m$

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I''(s)} \| v_i^{(s)} \|_{L_p(K_i^{(s)})}^p \cdot \frac{1}{(\rho_i^{(s)})^p} \le C_{10} \sum_{i\in I''(s)} \left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} (\rho_i^{(s)})^{n-p} \le \\ &\le C_{10} \left\{ \sum_{i\in I''(s)} \left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} (\rho_i^{(s)})^{n-m} \right\}^{\frac{p}{m}} \left\{ \sum_{i=1}^{I_s} (\rho_i^{(s)})^n \right\}^{1-\frac{p}{m}}. \end{aligned} \tag{32}$$

Отсюда, подставляя вместо $\rho_i^{(s)}$ его значение и используя условие B$_2$), получаем, что первый множитель правой части (32) стремится к нулю. Второй множитель также стремится к нулю в силу (24). Получаем, что при $p < m$ левая часть (32) стремится к нулю. Это же будет выполняться и при $p = m$. Достаточно при $p = m$ рассмотреть первое неравенство в (32) и воспользоваться сказанным.

Окончательно, из всего сказанного следует, что при $p \le m$ второе слагаемое правой части (28) стремится к нулю. Оценим первое слагаемое правой части (28) при $p = m$, используя оценку (16). Получим

$$\sum_{i=1}^{I_s} \left\| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right\|_{L_m(D_i^{(s)})}^m \le C_{11} \sum_{i=1}^{I_s} (d_i^{(s)})^{n-m} \le C_{11} \left\{ \sum_{i=1}^{I_s} \frac{(d_i^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}}}{(r_i^{(s)})^{\frac{n}{m-1}}} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left\{ \sum_{i=1}^{I_s} (r_i^{(s)})^n \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{33}$$

Здесь, при получении второго неравенства, воспользовались неравенством Гельдера. Применяя оценку (22) и условие B$_2$), получаем ограниченность правой части (33) постоянной, не зависящей от s.

При $p < m$ применим неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^{I_s} \left\| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right\|_{L_p(D_i^{(s)})}^p \le \sum_{i=1}^{I_s} \left\| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right\|_{L_m(D_i^{(s)})}^{\frac{p}{m}} (\operatorname{mes} D_i^{(s)})^{1-\frac{p}{m}} \le \left\{ \sum_{i=1}^{I_s} \left\| \frac{\partial v_i^{(s)}}{\partial x} \right\|_{L_m(D_i^{(s)})}^m \right\}^{\frac{p}{m}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{I_s} \operatorname{mes} D_i^{(s)} \right\}^{1-\frac{p}{m}}, \tag{34}$$

и правая часть стремится к нулю в силу (33) и (24).

Тем самым доказательство леммы 2 закончено.

Лемма 3. *Последовательность* $w_s(x)$ *сильно сходится к нулю в* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s \to \infty$.

Доказательство. Легко видеть, что $w_s(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega^{(s)})$, и, следовательно, w_s можно подставить вместо φ в интегральное тождество (4). Имеем

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx + \int\limits_{\Omega} a\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) w_s dx = 0. \tag{35}$$

Из лемм 1, 2 и представления (20) следует, что $w_s(x)$ стремится к нулю слабо в $W^1_m(\Omega)$ и сильно в $L_\mu(\Omega)$ при $\mu < \dfrac{mn}{n-m}$. Из условия A$_2$) получим тогда, что второй интеграл в (35) стремится к нулю при $s \to \infty$. Для изучения первого интеграла в (35) представим его в виде

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_i\left(x, u_s, \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx + \\
&+\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right) - a_i\left(x, u_s, \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx + \\
&+\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right) - a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx + \\
&+\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx = I_1^{(s)} + I_2^{(s)} + I_3^{(s)} + I_4^{(s)},
\end{aligned} \tag{36}$$

где через $I_k^{(s)}$ обозначим k-ое слагаемое в среднем члене равенства.

Используя условие A$_2$), имеем

$$I_4^{(s)} \geq C_2 \int\limits_{\Omega} \left\{\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m\right\}dx. \tag{37}$$

Применяя первое неравенство в (3) и леммы 1, 2, получаем

$$\lim_{s\to\infty} I_3^{(s)} = 0. \tag{38}$$

Для доказательства

$$\lim_{s\to\infty} I_2^{(s)} = 0 \tag{39}$$

преобразуем $I_2^{(s)}$, используя $\chi_{E^{(s)}}(x)$, характеристическую функцию множества $E^{(s)} = \bigcup\limits_{i=1}^{I_s} D_i^{(s)}$:

$$\begin{aligned}
I_2^{(s)} = &\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \chi_{E^{(s)}}(x)\left[a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right) - a_i\left(x, u_s, \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx + \\
&+\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} [1 - \chi_{E^{(s)}}(x)] a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s}{\partial x_i}dx.
\end{aligned} \tag{40}$$

Отсюда просто следует (39). Второй интеграл в (40) стремится к нулю в силу слабой сходимости $\dfrac{\partial w_s}{\partial x_i}$, для доказательства стремления к нулю первого интеграла нужно воспользоваться условием A$_2$), неравенством Гельдера и абсолютной непрерывностью интеграла от $\left|\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m$.

Осталось рассмотреть поведение при $s \to \infty$ $I_1^{(s)}$. Введем дополнительно функцию $\widetilde{\psi}_i^{(s)}(x) = \widetilde{\chi}\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho_i^{(s)}}\right)$, где $\widetilde{\chi}: R^1 \to R^1$ – бесконечно дифференцируемая невозрастающая функция, равная нулю при $t > \frac{1+4C_3}{2+4C_3}$ и единице при $t < \frac{1+4C_3}{3+4C_3}$. Представим

$$\begin{aligned} I_1^{(s)} &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left[a_i\left(x, u_s, \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right) - a_i\left(x, u_0 + r_1^{(s)}, \frac{\partial r_3^{(s)}}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial w_s}{\partial x_i} dx + \\ &+ \sum_{j=1}^{I_s} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left[a_i\left(x, u_0 + r_1^{(s)}, \frac{\partial}{\partial x}(v_j^{(s)} \psi_j^{(s)})\right) - a_i\left(x, u_0 + r_1^{(s)}, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x} \cdot \psi_j^{(s)}\right)\right] \frac{\partial w_s}{\partial x_i} dx + \\ &+ \sum_{j=1}^{I_s} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i\left(x, u_0 + r_1^{(s)}, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x} \cdot \psi_j^{(s)}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}[(1 - \widetilde{\psi}_j^{(s)}) w_s] dx + \\ &+ \sum_{j=1}^{I_s} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i\left(x, u_j^{(s)}, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\psi}_j^{(s)} \cdot w_s) dx = I_{1,1}^{(s)} + I_{1,2}^{(s)} + I_{1,3}^{(s)} + I_{1,4}^{(s)}, \end{aligned} \tag{41}$$

где через $I_{1,k}^{(s)}$ обозначено k-ое слагаемое средней части.

В силу выбора функций $v_j^{(s)}$ $I_{1,4}^{(s)} = 0$. Из леммы 1, условия A$_2$) следует, что $I_{1,1}^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$. Из условия A$_2$) и оценок (29)–(32) выводится просто, что $I_{1,2}^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$.

Оценим $I_{1,3}^{(s)}$. Применяя оценку (18) и неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^{I_s} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i\left(x, u_0 + r_1^{(s)}, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x} \cdot \psi_j^{(s)}\right)(1 - \widetilde{\psi}_j^{(s)}) \frac{\partial w_s}{\partial x_i} dx \right| \le \\ &\le C_{12} \left\{ \sum_{j=1}^{I_s} \frac{(d_j^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1} \cdot m}}{(\rho_j^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}}} \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left\| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)} + C_{12} \left\{ \sum_{j=1}^{I_s} \frac{(d_j^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1} m}}{(\rho_j^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial w_s}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Отсюда, из оценки (30) и сказанного относительно первого сомножителя правой части (32) следует стремление к нулю правой части (42) при $s \to \infty$.

Используемые дальше множества $I'(s), I''(s)$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве леммы 2. Из ограниченности w_s следует

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j \in I'(s)} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i\left(x, u_0 + r_1^{(s)}, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x} \cdot \psi_j^{(s)}\right) \cdot \frac{\partial \widetilde{\psi}_j^{(s)}}{\partial x_i} \cdot w_s \, dx \right| \le \\ &\le C_{13} \cdot \sum_{j \in I'(s)} \frac{1}{d_j^{(s)}} \int_{D_j^{(s)}} \left(1 + \left|\frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x}\right| dx. \end{aligned} \tag{43}$$

И, применяя оценку (16), (30), устанавливаем стремление к нулю правой части:

$$\left|\sum_{j\in I''(s)}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} a_i\left(x, u_0 + r_1^{(s)}, \frac{\partial v_j^{(s)}}{\partial x}\cdot\psi_j^{(s)}\right)\frac{\partial\widetilde{\psi}_j^{(s)}}{\partial x_i} w_s\, dx\right| \le$$

$$\le C_{13}\sum_{j\in I''(s)}\frac{(d_j^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}\cdot\frac{m}{2}}}{(\rho_j^{(s)})^{\frac{n-m}{m-1}\cdot\frac{1}{2}}}\cdot\left\{\frac{1}{(\rho_j^{(s)})^2}\cdot\int_{K_j^{(s)}} |w_s|^2\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \tag{44}$$

$$+C_{14}\sum_{j\in I''(s)}\frac{(d_j^{(s)})^{n-m}}{(\rho_j^{(s)})^{\frac{n-m}{m}}}\cdot\left\{\frac{1}{(\rho_j^{(s)})^m}\cdot\int_{K_j^{(s)}} |w_s|^m\, dx\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

При получении (44) применили неравенство Гельдера и оценку (18). Дальше воспользуемся следующим неравенством, доказываемым аналогично неравенству Пуанкаре:

$$\frac{1}{(\rho_j^{(s)})^p}\int_{K_j^{(s)}} |w_s|^p\, dx \le C_{15}\left\{\int_{B_{\sigma_j^{(s)}}(x_j^{(s)})}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^p dx + \frac{(\rho_j^{(s)})^{n-p}}{(\sigma_j^{(s)})^n}\int_{B_{\sigma_j^{(s)}}(x_j^{(s)})} |w_s|^p\, dx\right\}, \tag{45}$$

где $\sigma_j^{(s)}, k_j^{(s)}$ принимают те же значения, что и в (21).

Подставляя (45) в (44) и используя еще следующее легко устанавливаемое соотношение

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\gamma^{(s)}}\int_{U_{\gamma^{(s)}}(\Gamma)} |w_s|^p\, dx = 0,\ p\le m,$$

доказываем, что предел правой части (44) равен нулю.

Доказали, тем самым, что $I_{1,3}^{(s)}\to 0$, а, значит, и $I_1^{(s)}\to 0$. Вместе с (37)–(39) это доказывает лемму, а, следовательно, и теорему 1.

1. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – К., «Наукова думка», 1974.
2. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
3. *Скрыпник И.В.* Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей. – Докл. АН СССР, 1981, № 12.
4. *Bensoussan A., Lions I.L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. North-Holland Publ. Comp., 1978.
5. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Нгоан Ха Тьен.* Усреднения и G-сходимость дифференциальных операторов. – УМН, 1979, т. 34, № 5, с. 135–210.
6. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. К., «Наукова думка», 1973.

УСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТЯХ С КАНАЛАМИ

*(Доклады Академии наук СССР. – 1990. – **315**)*

В работе изучается сходимость решений задач Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в последовательности областей с каналами. В случае областей с мелкозернистой границей соответствующие условия сходимости получены в монографии В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова [1] для линейных уравнений и в статье [2] для нелинейных задач. Основой данной работы являются поточечные оценки модельных задач для цилиндрических областей, полученные путем развития методов работ [3, 4].

1. Будем предполагать, что функции $a_j(x,u,p),\ j=0,1,...,n$, определены при x, принадлежащем ограниченной области $\Omega\subset R^n$ класса $C^1, u\in R^1,\ p=(p_1,...,p_n)\in R^n$ и удовлетворяют условиям:

а1) $a_j(x,u,p)$ непрерывны по u,p при почти всех $x\in\Omega$, измеримы по x при любых $u,p;\ a_j(x,u,0)=0$ при $x\in\Omega,\ u\in R^1,\ j=1,...,n$;

а2) существуют положительные постоянные ν_1,ν_2,ε такие, что при некоторых $m\in[2,n-1), r_1\in(0,n/(n-m))$ и всех значениях $x\in\Omega, (u,p), (v,q)\in R^1\times R^n$ выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j(x,u,p)-a_j(x,u,q)]\,(p_j-q_j)\geq \nu_1(1+|p|+|q|)^{m-2}\cdot|p-q|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j(x,u,p)-a_j(x,v,q)|\leq \nu_2(1+|u|^{r_1}+|v|^{r_1}+|p|+|q|)^{m-2}[|p-q|+|u-v|],$$

$$a_0(x,u,p)u\geq -(\nu_1-\varepsilon)|p|^m-\varphi(x)(1+|u|),$$

$$|a_0(x,u,p)|\leq \nu_2(|u|^{r_1}+|p|)^{m-1/r_1}+\varphi(x),$$

где $\varphi(x)\in L_{r_2}(\Omega),\ r_2>n/m$.

Предположим, что для каждого натурального числа s определены линии $l_i^{(s)},\ i=1,...,I(s)$, в $\overline{\Omega}$ и положительные числа $r_i^{(s)},d_i^{(s)}$, удовлетворяющие с независящими от i,s положительными постоянными C_1,C_2,λ,p_0 следующим условиям:

б1) $(2+C_1)d_i^{(s)}\leq r_i^{(s)},\ \lim\limits_{s\to\infty} r^{(s)}=0,\ r^{(s)}=\lim\limits_{1\leq i\leq I(s)} r_i^{(s)}$,

$$\sum_{i=1}^{I(s)} \{[d_i^{(s)}]^{m(n-m-1)}[r_i^{(s)}]^{1-n}\}^{1/(m-1)}\leq C_2;$$

б2) при произвольных $s=1,2,...,\ i=1,...,I(s)$ существует конечное число точек $z_{il}^{(s)},\ l=1,2,...,L(i,s)$ таких, что при любых $t_i^{(s)}\in[d_i^{(s)},r_i^{(s)}]$ выполнено включение

$$\boldsymbol{U}(T(\{t_i^{(s)}\}),t_i^{(s)})\subset\bigcup_{l=1}^{L(i,s)} B(z_{il}^{(s)},\lambda t_i^{(s)}),$$

где

$$T(\{t_i^{(s)}\}) = \boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, t_i^{(s)}) \cap \left\{ \bigcup_{j \neq i} \boldsymbol{U}(l_j^{(s)}, t_j^{(s)}) \cup \partial\Omega \right\};$$

здесь и далее для множества $G \subset R^n$ обозначаем $\boldsymbol{U}(G,R) = \{x \in R^n : \rho(x,G) < R\}$, $\rho(x,G)$ – расстояние от точки x до множества $G, B(x_0, R)$ – шар радиуса R с центром в точке x_0;

б$_3$) при каждом $s = 1,2,...$ в семействах $\{\boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, r_i^{(s)}) : i = 1,...,I(s)\}$, $\{B(z_{il}^{(s)}, \lambda r_i^{(s)}) : i = 1,...,I(s),$ $l = 1,...,L(i,s)\}$ имеется не более p_0 множеств с общей точкой.

Кроме того, предполагаются условия регулярности линий:

1$_1$) при произвольных $s = 1,2,...,$ $i = 1,...,I(s)$ существуют диффеоморфизмы $g_i^{(s)} : \boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, 1) \to R^n$ класса C^1 такие, что $g_i^{(s)}(l_i^{(s)}) \subset \{y \in R^n : y_1 = ... = y_{n-1} = 0\}$;

1$_2$) существует не зависящая от i,s положительная постоянная κ такая, что при $x \in \boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, 1)$ выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} g_i^{(s)}(x) \right| \leq \kappa, \quad \det \frac{Dg_i^{(s)}(x)}{Dx} \geq \kappa^{-1},$$

где $\dfrac{Dg_i^{(s)}(x)}{Dx}$ – якобиева матрица отображения $g_i^{(s)}$ в точке x.

Рассмотрим последовательность граничных задач

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \ x \in \Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}; \tag{1}$$

$$u(x) - f(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega^{(s)}) \tag{2}$$

при некоторой функции $f(x) \in W^1_{p_1}(\Omega),$ $p_1 > n$,

$$F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}, \ F_i^{(s)} \subset \boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, d_i^{(s)}). \tag{3}$$

При условиях а$_1$), а$_2$) разрешимость задачи (1), (2) в $W_m^1(\Omega^{(s)})$ при каждом s может быть доказана методами теории монотонных операторов (см., например, [4]). Обозначим через $u_s(x)$ функцию, совпадающую в $\Omega^{(s)}$ с одним из решений задачи (1), (2) и равную $f(x)$ при $x \in F^{(s)}$. Просто проверяем ограниченность последовательности $u_s(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ и, переходя, если нужно, к последовательности, считаем, что $\{u_s(x)\}$ слабо сходится к некоторой функции $u_0(x) \in W_m^1(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* а$_1$), а$_2$), б$_1$)–б$_3$), 1$_1$), 1$_2$) *и* $u_s(x)$ *– слабо сходящаяся в* $W_m^1(\Omega)$ *к* $u_0(x)$ *последовательность решений задачи* (1), (2). *Тогда последовательность* $u_s(x)$ *сходится сильно в* $W_{m'}^1(\Omega)$ *при любом* $m' \in (1,m)$.

2. Принципиальный интерес представляет собой возможность нахождения предельной функции $u_0(x)$ решением новой усредненной задачи. Далее приводятся условия, обеспечивающие соответствующее усреднение.

Пусть

$$\boldsymbol{U}^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{I(s)} \boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, \overline{\rho}_i^{(s)}),\ \overline{\rho}_i^{(s)} = \frac{1}{2} d_i^{(s)} + [r_i^{(s)}]^{(n-1)/(n-2)}.$$

Проверяется, что $m_s = \mathrm{mes}\boldsymbol{U}^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$.

Определим при $s = 1,2,...,\ i = 1,...,I(s)$ числовые последовательности $\lambda_s, \mu_s, \rho_i^{(s)}$ равенствами

$$\lambda_s = \max\left\{ \left[\ln\frac{1}{r_s} \right]^{-1}, \left[\ln\frac{1}{m_s} \right]^{-1} \right\},\ \mu_s = \lambda_s^{-\frac{1}{n-m-1}\cdot\frac{m-1}{m+1}}; \tag{4}$$

$$\rho_i^{(s)} = \begin{cases} d_i^{(s)}, \text{ если } i \in I'(s) = \{i = 1,...,I(s);\ d_i^{(s)} \geq [r_i^{(s)}]^{(n-1)/(n-m-1)} \cdot \mu_s\}, \\ [r_i^{(s)}]^{(n-1)/(n-m-1)} \cdot \mu_s, \\ \text{если } i \in I''(s) = \{i = 1,...,I(s);\ d_i^{(s)} < [r_i^{(s)}]^{(n-1)/(n-m-1)} \cdot \mu_s\}. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим при $s = 1,2,...,i \in I''(s)$ множества

$$L_i^{(s)} = \{x \in l_i^{(s)} : \rho(x, T_i^{(s)}(\{2\rho_i^{(s)}\})) \geq 2\rho_i^{(s)}\}$$

и представим $L_i^{(s)} = L_{i,1}^{(s)} \cup L_{i,2}^{(s)}$. Здесь $L_{i,1}^{(s)}$ – объединение всех тех связных компонент множества $L_i^{(s)}$, длины которых не меньше $\lambda_s^{-1}\rho_i^{(s)}$. Разделим каждую из связных компонент множества $L_{i,1}^{(s)}$ на конечное число криволинейных отрезков равной длины с таким условием, чтобы длины отрезков возникающего подразбиения принадлежали сегменту $[{}^1\!/_2\lambda_s^{-1}\rho_i^{(s)}, \lambda_s^{-1}\rho_i^{(s)}]$. Обозначим так определенные криволинейные отрезки через $L_i^{(s)}(k),\ k = 1,...,K(i,s)$, и через $\alpha_{ik}^{(s)}, \beta_{ik}^{(s)}$ их концы.

Лемма 1. *Существует не зависящее от* s,i *число* c_0 *такое, что справедливы утверждения:*

а) *при фиксированных* s,i *множества* $G_{ik}^{(s)}(c_0),\ k = 1,...,K(i,s)$, *попарно не пересекаются, где*

$$G_{ik}^{(s)}(c) = \boldsymbol{U}(L_i^{(s)}(k), 2\rho_i^{(s)}) \setminus \overline{B(\alpha_{ik}^{(s)}, c\rho_i^{(s)}) \cup B(\beta_{ik}^{(s)}, c\rho_i^{(s)})};$$

б) *имеет место включение*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \subset \bigcup_{l=1}^{L(i,s)} B(z_{il}^{(s)}, 2\lambda\rho_i^{(s)}(2 + 1/\lambda_s)) \cup \\ \cup \bigcup_{k=1}^{K(i,s)} \{G_{ik}^{(s)}(c_0 + 1/3) \cup B(\alpha_{ik}^{(s)}, (c_0 + 2/3)\rho_i^{(s)}) \cup B(\beta_{ik}^{(s)}, (c_0 + 2/3)\rho_i^{(s)})\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Для построения усредненной задачи определим при $s = 1,2,...,\ i \in I''(s),\ k = 1,...,K(i,s),\ t \in R^1$ функцию $v_{ik}^{(s)}(x,t)$ как решение вспомогательной граничной задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \; x \in D_{ik}^{(s)}, \tag{7}$$

$$v(x) - t\psi_{ik}^{(s)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(D_{ik}^{(s)}), \tag{8}$$

где $D_{ik}^{(s)} = \boldsymbol{U}(G_{ik}^{(s)}(c_0), 1/2) \setminus F_i^{(s)} \cap G_{ik}^{(s)}(c_0)$, $\psi_{ik}^{(s)}(x)$ – фиксированная функция класса $C_0^\infty(\boldsymbol{U}(G_{ik}^{(s)}(c_0), 1/2))$, равная единице на $\boldsymbol{U}(G_{ik}^{(s)}(c_0), 1/4)$.

Сформулируем дополнительное условие.

в) Существует непрерывная функция $c(x,t)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\begin{gathered}\lim_{s\to\infty} \sum_{(i,k)\in I_s(B)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t} \int_{\Omega_{ik}^{(s)}} a_j\left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x} v_{ik}^{(s)}(x,t)\right) \frac{\partial}{\partial x_j} v_{ik}^{(s)}(x,t)\,dx = \\ = \int_B c(x,t)\,dx, \;\; \Omega_{ik}^{(s)} = \boldsymbol{U}(G_{ik}^{(s)}(c_0), 1/2),\end{gathered} \tag{9}$$

причем стремление к пределу в (9) является равномерным по t на любом ограниченном интервале. В (9) $I_s(B)$ – множество тех пар (i,k), для которых $i \in I''(s)$, $k = 1,\dots,K(i,s)$ и $x_{ik}^{(s)} \in B$, где $x_{ik}^{(s)}$ – середина криволинейного отрезка $L_{ik}^{(s)}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 *и условие* в). *Тогда функция* $u_0(x)$ *является решением задачи*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(x, f-u), \; x \in \Omega; \tag{10}$$

$$u(x) - f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega). \tag{11}$$

3. При $i \in I'(s)$ разобьем кривую $l_i^{(s)}$ на конечное число криволинейных отрезков равной длины таким образом, чтобы длина получающихся отрезков принадлежала сегменту $[\tfrac{1}{2} d_i^{(s)}, d_i^{(s)}]$. Обозначим так полученные криволинейные отрезки $l_i^{(s)}(r)$, $r = 1,\dots,R(i,s)$. Имеет место равенство

$$\boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) = \bigcup_{r=1}^{R(i,s)} \boldsymbol{U}(l_i^{(s)}(r), 2\rho_i^{(s)}), \;\; i \in I'(s). \tag{12}$$

Доказательства теорем 1, 2 связаны с построением асимптотического разложения последовательности $u_s(x)$, подчиненного определенному в (6), (12) покрытию множеств $\boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})$ (см. [4]). Как и в случае областей с мелкозернистой границей [4], изучая поведение членов асимптотического разложения, доказываем сильную сходимость $u_s(x)$ в $W_{m'}^1(\Omega)$ при $m' < m$. Это же асимптотическое разложение является основой вывода усредненного уравнения (10).

Построение асимптотического разложения связано с выделением главных членов, являющихся решениями локальных задач вида (7), (8), а также локальных задач в шарах.

Ключевую роль играют интегральные и поточечные решения модельных задач, укажем только основную оценку функции $v_{ik}^{(s)}(x,t)$.

Теорема 3. *Существует постоянная* "C", *зависящая только от* $\nu_1, \nu_2, m, n, \kappa$, *такая, что для решения задачи* (7), (8) *при* $x \in \boldsymbol{U}(G_{ik}^{(s)}(c_0), 1/2)$ *справедлива оценка*

$$|v_{ik}^{(s)}(x,t)| \le C|t| \left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho(x, l_i^{(s)})} \right]^{(n-m-1)/m-1}. \tag{13}$$

Отметим в заключение, что анализ асимптотического разложения позволяет выявлять влияние на поправочный член $c(x, f-u)$ в уравнении (10) как множеств $F_i^{(s)}$, так и слагаемых, входящих в уравнение (1). В частности, $c(x, f-u)$ не зависит от $F_i^{(s)}$ при $i \in I'(s)$.

1. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974, 279 с.
2. *Скрыпник И.В.* – Докл. АН УССР, сер. А, 1982, № 2, с. 21–26.
3. *Скрыпник И.В.* В кн.: Общая теория граничных задач. Киев: Наук. думка, 1983, с. 198–206.
4. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. Leipzig: B.G. Teubner Verlagsges., 1986, 232 p.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

*(Математический сборник. – 1993. – **184**, № 10)*

Эллиптические граничные задачи в областях с мелкозернистой границей изучены для линейных уравнений в работах В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова (см., например, [1]) и для нелинейных уравнений второго порядка в работах автора (см., например, [2], [3]).

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n с липшицевой границей и предположим, что при $s=1,2,...$ определены непересекающиеся замкнутые множества $F_i^{(s)}, i=1,...,I(s)$, содержащиеся в Ω, диаметры которых стремятся к нулю при $s\to\infty$. В области

$$\Omega_s=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{I(s)}F_i^{(s)}$$

рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}\,a_j\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=a_0\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad x\in\Omega_s, \tag{0.1}$$

$$u(x)=f(x),\qquad x\in\partial\Omega_s, \tag{0.2}$$

где $f(x)$ – некоторая известная, определенная в $\overline{\Omega}$, функция.

В [2] выяснены условия, при которых последовательность $u_s(x)$ решений задач (0.1), (0.2) при $s\to\infty$ сходится к предельной функции, и построена усредненная граничная задача в Ω для предельной функции. Эти построения связаны с изучением предложенного автором асимптотического разложения последовательности $u_s(x)$. При этом была доказана сильная сходимость в энергетической норме остаточного члена асимптотического разложения.

В связи с актуальностью изучения вопроса в характере приближения предельной функцией последовательности $u_s(x)$ в данной работе рассматривается поведение остаточного члена $w_s(x)$ асимптотического разложения. Доказывается равномерная сходимость $w_s(x)$ к нулю при $s\to\infty$.

§ 1. Формулировка основного результата

Будем предполагать, что функции

$$a_j(x,u,p),\quad j=0,1,...,n,$$

определены при

$$x\in R^n,\quad u\in R^1,\quad p\in R^n,$$

и удовлетворяют следующим условиям:

A₁) функции $a_j(x,u,p),\ j=0,1,...,n$ непрерывны по u,p при почти всех $x\in R^n$, измеримы по x при всех $(u,p)\in R^1\times R^n$;

$$a_j(x,0,0)\equiv 0$$

при $x\in R^n$, $j=1,...,n$;

A₂) существуют положительные постоянные ν,ν',μ такие, что $\nu'<\nu$ и при

$$x\in R^n,\quad p,q\in R^n\quad u,v\in R^1,$$

выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}[a_j(x,u,p)-a_j(x,u,q)](p_j-q_j)\ge\nu(1+|p|+|q|)^{m-2}|p-q|^2,\\
&\quad a_0(x,u,p)u\ge-\gamma'|p|^m-\mu(1+|u|),\\
&\sum_{j=1}^{n}|a_j(x,u,p)-a_j(x,v,q)|\\
&\le\quad \mu(1+|\mu|^{\overline{m}}+|v|^{\overline{m}}+|p|^m+|q|^m)^{(m-2)/m}(|p-q|+|u-v|),\\
&\quad |a_0(x,u,p)|\le\mu(1+|u|^{\overline{m}}+|p|^m)^{(\overline{m}-1)/\overline{m}}+\varphi(x),
\end{aligned}\tag{1.1}$$

где

$$2\le m<n,\quad m\le\overline{m}<\frac{nm}{n-m},$$
$$\varphi(x)\ge 0,\quad \varphi(x)\in L_{r_1}(\Omega)$$

с $r_1>\dfrac{n}{m}$;

A₃) функции $a_j(x,0,p),\ j=1,...,n$, дифференцируемы по x,p, и выполнена оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\ a_j(x,0,p)\right|\le\mu(1+|p|)^{m-2}|p|,\quad j,k=1,...,n\,.$$

При выполнении этих условий и в предположении

$$f(x)\in W_q^1(\Omega),\quad q>n$$

просто доказывается (см. [3, гл. 9, § 1]) существование обобщенного решения

$$u_s(x)\in f(x)+\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega_s)$$

задачи (0.1), (0.2). Продолжим функции $u_s(x)$ на Ω, полагая $u_s(x)=f(x)$ при $x\in\bigcup_{i=1}^{I(s)}F_i^{(s)}$. Так получающиеся функции $u_s(x)$ принадлежат $W_m^1(\Omega)$ и с некоторыми независящими от s постоянными M_0,M_1 выполнены оценки

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega)}\le M_1\,.\tag{1.2}$$

$$\mathrm{vrai}\max\{|u_s(x)|:x\in\Omega\}\le M_0\,.\tag{1.3}$$

Так же будем считать, что $|f(x)|\le M_0$ при почти всех $x\in\Omega$.

В силу (1.2), переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем считать последовательность $u_s(x)$ слабо сходящейся в $W_m^1(\Omega)$, и пусть $u_0(x)$ – предельная функция.

Формулировка условий на множества $F_i^{(s)}$ связана с размерами и расположением этих множеств. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $x_i^{(s)}$ – центр такого шара радиуса $d_i^{(s)}$, что

$$F_i^{(s)} \subset \overline{B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})}.$$

Здесь и далее $B(x_0, \rho)$ – открытый шар радиуса ρ с центром в точке x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от шара $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ до множества

$$\bigcup_{j \neq i} B(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}) \bigcup \partial\Omega.$$

Будем предполагать выполнение условия

$$B) \quad d_i^{(s)} \le C_0 [r_i^{(s)}]^{n/(n-m)}, \ i = 1, \ldots, I(s), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

$$\lim_{s \to \infty} r^{(s)} = 0, \text{ где } r^{(s)} = \max\{r_i^{(s)} : i = 1, \ldots, I(s)\} \tag{1.5}$$

с независящей от s постоянной C_0.

Отметим, что условие В) обеспечивает выполнение условий В$_1$), В$_2$) в § 1 гл. 9 [3]. Возможность построения граничной задачи для предельной функции устанавливается на основе изучения асимптотического разложения, для определения которого далее вводятся решения модельных граничных задач.

Пусть $\psi_0(x)$ – функция класса $C_0^\infty(B(0,1))$, равная единице в $B(0, \frac{1}{2})$ и пусть x_0 – некоторая точка в R^n, F – замкнутое множество, содержащееся в $B(x_0, d)$ при $d < \frac{1}{4}$. Для произвольного вещественного числа k обозначим через $v(x, k; x_0, F)$ обобщенное решение задачи

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{при} \quad x \in G = B(x_0, 1) \setminus F, \\ v(x) - k\psi_0(x - x_0) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(G). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Доопределим функцию $v(x, k; x_0, F)$ на все пространство R^n, полагая равной нулю вне $B(x_0, 1)$ и k на F. Будем обозначать в дальнейшем при $d_i^{(s)} < \dfrac{1}{4}$

$$v_i^{(s)}(x, k) \equiv (x, k; x_i^{(s)}, F_i^{(s)}).$$

Определим срезывающие функции $\varphi_i^{(s)}(x)$ равенством

$$\varphi_i^{(s)}(x) = g\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho_i^{(s)}}\right) \quad i = 1, \ldots, I(s), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{1.7}$$

где $g(t)$ – фиксируемая в дальнейшем бесконечно дифференцируемая функция, заданная на R^1 и удовлетворяющая условиям:

$$g(t) \equiv 1 \quad \text{при} \quad t \le 1,$$
$$g(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \ge 2,$$
$$0 \le g(t) \le 1, \ \left|\frac{dg(t)}{dt}\right| \le 2.$$

В (1.7) числа $\rho_i^{(s)}$ определяются равенством

$$\rho_i^{(s)} = [r_i^{(s)}]^{n/(n-1)}, \quad i = 1,\dots,I(s), \ s = 1,2,\dots. \tag{1.8}$$

Обозначим через $u_i^{(s)}, f_i^{(s)}$ следующие средние значения функций $u_0(x), f(x)$

$$\begin{aligned} u_i^{(s)} &= \frac{1}{\operatorname{mes} B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})} \int_{B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})} u_0(x)dx, \\ f_i^{(s)} &= \frac{1}{\operatorname{mes} B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})} \int_{B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)})} f(x)dx. \end{aligned} \tag{1.9}$$

При достаточно больших s таких, что

$$2d_i^{(s)} \le \rho_i^{(s)} \le \tfrac{1}{8} r_i^{(s)} \tag{1.10}$$

определим асимптотическое разложение последовательности

$$\begin{aligned} u_s(x) &= u_0(x) + r_s(x) + w_s(x), \\ r_s(x) &= \sum_{i=1}^{I(s)} v_i^{(s)}(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}) \varphi_i^{(s)}(x), \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $w_s(x)$ – остаточный член разложения, выяснение поведения которого при $s \to \infty$ и составляет основную цель работы.

Теорема 1. *Функция* $w_s(x)$*, определяемая равенством* (1.11), *принадлежит при каждом* s *пространству* $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$. *При выполнении условий* A_1, A_2, B *последовательность* $w_s(x)$ *сильно сходится к нулю в* $W_m^1(\Omega)$.

В § 3 гл. 9 [3] утверждение теоремы 1 доказано при отличном от (1.8) выборе $\rho_i^{(s)}$. Изменение в выборе $\rho_i^{(s)}$ не требует изменения в доказательстве теоремы, и поэтому его опускаем.

При доказательстве равномерной сходимости последовательности $w_s(x)$ будет использоваться усредненная задача для функции $u_0(x)$, и для этого предполагается выполнение условия

C) существует непрерывная функция $c(x,k)$, определенная при $x \in \Omega, k \in R^1$ такая, что для произвольных x_0, k выполнено равенство

$$c(x_0,k) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{s\to\infty} \frac{1}{k \operatorname{mes} B(x_0,\rho)} \sum_{i \in I_s(x_0,\rho)} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x_j} dx, \tag{1.12}$$

причем стремление к пределу в (1.12) является равномерным по k на любом ограниченном интервале изменения k. В (1.12) $I_s(x_0,\rho)$ – множество тех номеров $i, 1 \le i \le I(s)$, для которых

$$x_i^{(s)} \in B(x_0,\rho).$$

Аналогично § 4 гл. 9 [3] с учетом изменения в определении $\rho_i^{(s)}$, доказывается

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2, B, C, $q > n, f(x) \in W_q^1(\Omega)$, *и* $u_s(x)$ *– слабо сходящаяся к* $u_0(x)$ *последовательность решений задачи* (0.1), (0.2). *Тогда последовательность* $u_s(x)$ *сильно сходится в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p < m$, *и функция* $u_0(x)$ *является обобщенным решением задачи*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x, f(x) - u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.13}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.14}$$

Целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, A_3, B, C, *и*

$$f(x) \in W_q^1(\Omega), \quad q > n.$$

Тогда

$$\operatorname{vrai\,max}\{|w_s(x)| : x \in \Omega\} \to 0 \quad \textit{при} \;\; s \to \infty, \tag{1.15}$$

где $w_s(x)$ *– остаточный член асимптотического разложения* (1.11).

Замечание 1. Видом неравенств (1.1) в условии A_2 ограничились только для простоты изложения. Без существенных изменений можно рассмотреть задачу и при других ограничениях, в частности, выполняющихся для уравнения (0.1) при

$$a_j(x, u, p) = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(x, u) p_l.$$

Замечание 2. Также ради простоты изложения сделано предположения $2 \le m < n$. Может быть доказано утверждение теоремы 3 и в случаях $1 < m < 2$, $m = n$.

Замечание 3. Обозначим

$$G_s = \bigcup_{i=1}^{I(s)} B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}). \tag{1.16}$$

Тогда из (1.8) следует, что $\operatorname{mes} G_s \to 0$ при $s \to \infty$. Из равенства (1.11) имеем при $x \in \Omega \setminus G_s$

$$u_s(x) = u_0(x) + w_s(x)$$

и, следовательно, из теоремы 3 получаем

$$\operatorname{vrai\,max}\{|u_s(x) - u_0(x)| : x \in \Omega \setminus G_s\} \to 0 \;\; \text{при} \;\; s \to \infty.$$

Замечание 4. В данной работе доказывается теорема 3 для случая объемного распределения множеств $F_i^{(s)}$. Аналогично можно доказать соответствующий результат при поверхностном распределении множеств $F_i^{(s)}$, а также в случае перфорации более общего вида, например, когда $F_i^{(s)}$ содержатся в трубчатых окрестностях многообразий различной размерности.

Замечание 5. Для уравнения Лапласа близкий результат доказан И.Б. Симоненко в [4].

§ 2. Поточечные оценки вспомогательных функций

Доказательство теоремы 3 основывается на оценках решения модельной задачи (1.6). Ключевую роль при этом играют поточечные оценки самого решения и его градиента. Первая из этих оценок содержится в следующей теореме, доказанной в [5].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2. *Существует постоянная* C', *зависящая только от* ν,μ,n,m *такая, что для решения* $v(x,k)$ *задачи* (1.6) *выполнена оценка*

$$|v(x,k)| \le C'|k| \left(\frac{d}{|x-x_0|}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} \tag{2.1}$$

при почти всех

$$x \in \{x : d \le |x-x_0| \le 1\}.$$

Так как в дальнейшем будут использоваться поточечные оценки для функций

$$v_i^{(s)}(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}),$$

то формулируем последующие оценки в предположении $|k| \le 2M_0$, где M_0 – постоянная из неравенства (1.3).

В дальнейшем через C_i, $i = 1,2,...,$ не оговаривая особо, будут обозначаться постоянные, зависящие лишь от известных параметров. В частности, в данном параграфе эти постоянные зависят лишь от M_0,ν,μ,n,m.

Непосредственно из [5] также следует интегральная оценка

$$\int_{|x-x_0|\ge\rho} \left(1+\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^2 dx \le C_1 \left(\frac{d}{\rho}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} d^{n-m} \tag{2.2}$$

при

$$d < \rho \le 1, \quad |k| \le 2M_0.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $A_1 – A_3$. *Существует постоянная* C'', *зависящая только от* M_0,n,m,ν,μ *такая, что для решения* $v(x,k)$ *задачи* (1.6) *при*

$$|k| \le 2M_0, \quad 2d \le |x-x_0| \le \tfrac{3}{4}$$

выполнена оценка

$$\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right| \le \frac{C''}{|x-x_0|}\left(\frac{d}{|x-x_0|}\right)^{\frac{n-m}{m-1}}. \tag{2.3}$$

Доказательство. При выполнении условий $A_1 – A_3$ для любой внутренней подобласти G' области G функция $v(x,k)$ имеет обобщенные производные второго порядка, принадлежащие $L_2(G')$, и производные первого порядка $v(x,k)$ в G' ограничены (см. [6]).

Пусть $2d \le \rho \le \frac{3}{4}$ и $\psi(x)$ – функция класса $C_0^\infty(B(x_0,1))$, равная единице при

$$\frac{3}{4}\rho \le |x - x_0| \le \frac{5}{4}\rho,$$

нулю вне множества

$$\frac{2}{3}\rho \le |x - x_0| \le \frac{4}{3}\rho,$$

и такая, что

$$0 \le \psi(x) \le 1, \quad \left|\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\right| \le \frac{20}{\rho}.$$

Из интегрального тождества, соответствующего задаче (1.6), стандартными рассуждениями, основанными на применении разностных операторов и последующего предельного перехода, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_G \frac{\partial}{\partial x_i}\, a_j\left(x, 0, \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r}\frac{\partial v}{\partial x_i}\psi^{s+2}(x)\right]dx = 0, \tag{2.4}$$

где $v = v(x,k), r, s$ – произвольные положительные числа такие, что

$$(r+2)(n-2) \ge 2n, \quad (s+2)(n-2) > 2n.$$

Из (2.4), используя условия (1.1), имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_G \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r}\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2 \psi^{s+2}(x)\, dx \le C_2 \frac{s^2}{\rho^2}\int_G \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s}(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Так как справедливо включение

$$\left\{\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+2}(x)\right\}^{\frac{n-2}{2n}} \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2}(G),$$

то в силу теоремы вложения и неравенства (2.5) получаем

$$I(r,s) = \int_G \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+2}(x)\, dx$$

$$\le C_3\left\{r^2\sum_{i,j=1}^{n}\int_G \left[\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+2}(x)\right]^{\frac{n-2}{n}}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{-2}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2 dx\right.$$

$$\left.+\frac{s^2}{\rho^2}\int_G \left[\left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+2}(x)\right]^{\frac{n-2}{n}}\psi^{-2}(x)\, dx\right\}^{\frac{n}{n-2}}$$

$$\le \quad C_4 (r+s)^{\frac{4n}{n-2}}\rho^{-\frac{2n}{n-2}} \cdot \left\{\int_G \left(1 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{r\frac{n-2}{n} - \frac{2m}{n} + 2}[\psi(x)]^{s\frac{n-2}{n} - \frac{4}{n}} dx\right\}^{\frac{n}{n-2}}. \tag{2.6}$$

Выберем в неравенстве (2.6) следующие значения для r, s:

$$r = r_i = m\left(\frac{n}{n-2}\right)^i - m, \quad s = s_i = (n+4)\left(\frac{n}{n-2}\right)^i - n - 2, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Из неравенства (2.6) для $I_i = I(r_i, s_i)$ следует

$$I_i \le C_5 a^i \rho^{-\frac{2n}{n-2}} I_{i-1}^{\theta^{-1}}, \tag{2.7}$$

где

$$a = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{4n}{n-2}}, \quad \theta = \frac{n-2}{n}.$$

Последовательным применением неравенства (2.7) и переходом к пределу при $i \to \infty$, получаем

$$\operatorname{vrai}\max\left\{\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m : \frac{3\rho}{4} \le |x - x_0| \le \frac{5\rho}{4}\right\} \le C_6\, \rho^{-n} \int_G \left(1 + \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^2 \psi^2(x)\, dx.$$

И отсюда в силу (2.2) имеем

$$\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m \le C_7\, \rho^{-m} \left(\frac{d}{\rho}\right)^{\frac{n-m}{m-1}m}, \quad \frac{3\rho}{4} \le |x - x_0| \le \frac{5\rho}{4},$$

что и доказывает оценку (2.3).

§ 3. Интегральные оценки для остаточного члена

Хорошо известно (см. [6, гл. 4 § 1]), что ограниченное обобщенное решение задачи (1.13), (1.14) при выполнении сформулированных условий относительно функций $a_j(x,u,p)$, $c(x,u)$, и Ω удовлетворяет в $\overline{\Omega}$ условию Гёльдера. Поэтому имеет место неравенство

$$|u_0(x) - u_0(y)| \le L\,|x - y|^\alpha, \quad \alpha \in (0,1) \tag{3.1}$$

при произвольных $x, y \in \overline{\Omega}$ с некоторыми положительными постоянными L, α, зависящими лишь от известных параметров. Будем считать L, α выбранными так, чтобы выполнялось и неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y|^\alpha, \quad \text{при} \quad x, y \in \overline{\Omega}, \tag{3.2}$$

следующее из вложения пространства $W_q^1(\Omega), q > n$ в $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Определим $\bar{\rho}_i^{(s)}$ равенством

$$\bar{\rho}_i^{(s)} = [r_i^{(s)}]^{\frac{n-\alpha m}{n-m}}, \quad i = 1,\ldots,I(s), \quad s = 1,2,\ldots, \tag{3.3}$$

и пусть

$$\psi_i^{(s)}(x) = g\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\bar{\rho}_i^{(s)}}\right),$$

где $g(t)$ – та же функция, что и в (1.7).

Будем также считать, что $\alpha < 1 - \frac{1}{m}$, и поэтому при достаточно больших s справедливо неравенство

$$2d_i^{(s)} < \overline{\rho}_i^{(s)} < 2\rho_i^{(s)} < \frac{r_i^{(s)}}{2}.$$

Дальнейшие оценки проводим при таких s, что это неравенство выполнено.

Представим $w_s(x)$, остаточный член разложения (1.11), в виде

$$w_s(x) = w_{1,s}(x) + w_{2,s}(x) + w_{3,s}(x), \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} w_{1,s}(x) &= \sum_{i=1}^{I(s)} [u_i^{(s)} - u_0(x)]\,\psi_i^{(s)}(x), \\ w_{2,s}(x) &= \sum_{i=1}^{I(s)} [f(x) - f_i^{(s)}]\,\psi_i^{(s)}(x) \end{aligned}$$

и $u_i^{(s)}, f_i^{(s)}$ определены выше в (1.9). При этом легко проверяется, что

$$w_{3,s}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_s).$$

Так как носители функций $\psi_i^{(s)}(x),\ i = 1,\dots,I(s)$ при достаточно большом s не пересекаются, то из (3.1), (3.2) и (1.5) следует

$$\gamma_{1,s} = \operatorname{vrai\,max}\left\{ W_{1,s}(x)\,| + |\,W_{2,s}(x)\,| : x \in \overline{\Omega} \right\} \to 0 \quad \text{при} \ s \to \infty. \tag{3.5}$$

Функция $u_s(x)$, обобщенное решение задачи (0.1), (0.2), по определению принадлежит множеству

$$f(x) + \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_s)$$

и удовлетворяет при произвольной функции

$$\varphi(x) + \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_s)$$

интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_s} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx + \int_{\Omega_s} a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \varphi\, dx = 0. \tag{3.6}$$

Так как функция $w_s(x)$, определенная разложением (1.11), ограничена в силу (1.3), и функция $w_{3,s}(x)$, определенная равенством (3.4), принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_s)$, то возможно подставить при произвольном $k \ge m$ в (3.6)

$$\varphi(x) = |\,w_s(x)\,|^k\ w_{3,s}(x).$$

Осуществляя эту подстановку, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left[a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_s}{\partial x}\right) \right] |\,w_s(x)\,|^k\ \frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\, dx = R_s^{(1)} + R_s^{(2)} + R_s^{(3)} + R_s^{(4)} + R_s^{(5)}, \tag{3.7}$$

где

$$
\begin{aligned}
R_s^{(1)} = \;& \frac{k}{k+1}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left[a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)-a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right]|\,w_s(x)\,|^{k-2}\\
& \times w_s(x)\,\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,[w_{1,s}(x)+w_{2,s}(x)]\,dx,\\
R_s^{(2)} = \;& \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left[a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)-a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right]\\
& \times|\,w_s(x)\,|^{k}\left[\frac{\partial w_{1,s}(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial w_{2,s}(x)}{\partial x_j}\right]dx,\\
R_s^{(3)} = \;& -\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left[a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)-a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right]\\
& \times\frac{\partial}{\partial x_j}\{|\,w_s(x)\,|^{k}\;w_{3,s}(x)\}dx,\\
R_s^{(4)} = \;& -\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\{|\,w_s(x)\,|^{k}\;w_{3,s}(x)\}\,dx,\\
R_s^{(5)} = \;& -\frac{1}{k+1}\int_\Omega a_0\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)|\,w_s(x)\,|^{k}\;w_{3,s}(x)\,dx.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Займемся оценкой слагаемых, входящих в (3.8), и начнем с оценки снизу левой части. Так как

$$
u_s(x)-r_s(x)=w_s(x)+u_0(x),
$$

то, используя неравенства (1.1), имеем

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left[a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)-a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s}{\partial x}\right)\right]|\,w_s(x)\,|^{k}\,\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,dx\\
\ge\;& C_8\int_\Omega\left(1+\left|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial}{\partial x}[w_s(x)+u_0(x)]\right|^2|\,w_s(x)\,|^{k}\;dx\\
-\;& C_9\int_\Omega\left(1+\left|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial}{\partial x}[w_s(x)+u_0(x)]\right|\cdot\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right||\,w_s(x)\,|^{k}\,dx\ge C_{10}I_s(k)\\
-\;& C_{11}k^{m(m-2)}\int_\Omega\left(1+\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|\right)^{m}|\,w_s(x)\,|^{k}\;dx-C_{11}k^{-2m}\int_\Omega\left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^{m}|\,w_s(x)\,|^{k}\;dx,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где

$$
I_s(k)=\int_\Omega\left(1+\left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^2|\,w_s(x)\,|^{k}\;dx. \tag{3.10}
$$

Здесь и в дальнейшем постоянные $C_i,\, i=8,9,...$ зависят от известных параметров, к числу которых относим $m,n,\nu,\nu_1,\mu,m,r_1,q,M_0,M_1,\alpha,L,\|\varphi\|_{L\eta(\Omega)},\|f\|_{W_q^1(\Omega)},\mathrm{mes}\,\Omega$. Также лишь от этих параметров зависят постоянные $C^{(i)},m_i,\, i=1,2,...$ в доказываемых в дальнейшем леммах.

Оценки сверху двух последних интегралов, стоящих в правой части (3.9), будут получены в следующих леммах.

Лемма 1. *Существуют положительные постоянные* $C^{(1)},m_1$*, зависящие лишь от известных параметров такие, что при произвольных* $\varepsilon\in(0,1),\, k\ge m$ *справедлива оценка*

$$k^{m(m-2)}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k\,dx \le C^{(1)}\left\{\varepsilon\int_\Omega |w_s(x)|^k\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{-k/m}k^{-k}\int_\Omega\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx + k^{m_1}\int_\Omega |w_s(x)|^k\,[1+\varphi(x)]\,dx\right\} \qquad (3.11)$$

Доказательство. Пусть y – произвольная точка из $\overline{\Omega}, \delta\in(0,1)$, и $g(t)$ – функция, выбранная в § 1 при определении функций $\varphi_i^{(s)}(x)$. Воспользуемся интегральным тождеством для $u_0(x)$, как решения задачи (1.13), (1.14), и подставим в это тождество пробную функцию

$$[u_0(x)-u_0(y)]|\,w_s(x)|^k\;g^m\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right).$$

Применяя неравенства (1.1) и оценивая, получим

$$\int_\Omega |w_s(x)|^k\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m g^m\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)dx$$

$$\le C_{12}k^m\int_\Omega |u_0(x)-u_0(y)|^m|\,w_s(x)|^{k-m}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m g^m\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)dx$$

$$+C_{12}\delta^{-m}\int_\Omega |w_s(x)|^k\,[1+\varphi(x)]g^m\left(\frac{|x-y|}{2\delta}\right)dx. \qquad (3.12)$$

Выберем конечное число точек $y_t\in\overline{\Omega}, t=1,2,...,T(\delta)$ так, чтобы при $x\in\overline{\Omega}$ выполнялись неравенства

$$\sum_{t=1}^{T(\delta)} g^m\left(\frac{|x-y_t|}{\delta}\right)\ge 1,\quad \sum_{t=1}^{T(\delta)} g^m\left(\frac{|x-y_t|}{2\delta}\right)\le K \qquad (3.13)$$

с некоторой, зависящей лишь от n, постоянной K. Положим в (3.12) значения y равными $y_t, t=1,2,...,T(\delta)$ и просуммируем получающиеся неравенства. Выбирая $\delta=k^{-2/\alpha}$ и используя (3.1), приходим при $k\ge m$ к оценке (3.11), что и доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Существует положительная постоянная $C^{(2)}$, зависящая лишь от известных параметров такая, что при произвольных $\varepsilon\in(0,1), k\ge m$ справедлива оценка*

$$k^{-2m}\int_\Omega\left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k\,dx \le C^{(2)}\left\{\varepsilon\int_\Omega |w_s(x)|^k\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{-k/m}k^{-k}\int_\Omega\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx + \int_\Omega |w_s(x)|^k\,dx\right\}. \qquad (3.14)$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^n\int_{B(x_i^{(s)},1)} a_j\left(x,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x)}{dx}\right)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx=0, \qquad (3.15)$$

определяющее

$$v_i^{(s)}(x)\equiv v_i^{(s)}(x,f_i^{(s)}-u_i^{(s)})$$

как решение граничной задачи вида (1.6), пробную функцию

$$\varphi(x) = |w_s(x)|^k\, v_i^{(s)}(x)[\varphi_i^{(s)}(x)]^m - |w_s(x)|^k\,[f_i^{(s)} - u_i^{(s)}]\, g^m\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{2d_i^{(s)}}\right),$$

где $g(t)$ – функция определенная в § 1. Оценивая на основании неравенства (1.1), получим

$$\int_\Omega |w_s(x)|^k \left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m [\varphi_i^{(s)}(x)]^m\, dx$$

$$\leq C_{13}\left\{k^m \int_\Omega |w_s(x)|^{k-m} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m [\varphi_i^{(s)}(x)]\,dx + \int_{B(x_i^{(s)},\rho_i^{(s)})} |w_s(x)|^k\, dx\right.$$

$$\left. + [\rho_i^{(s)}]^{-m} \int_{K(x_i^{(s)},\rho_i^{(s)})} |v_i^{(s)}(x)|^m |w_s(x)|^k\, dx + [d_i^{(s)}]^{-m} \int_{K(x_i^{(s)},2d_i^{(s)})} |w_s(x)|^k\, dx \right\}, \qquad (3.16)$$

где

$$K(x_0,\rho) = \{x \in R^n : \rho \leq |x - x_0| \leq 2\rho\}.$$

Используя оценку (3.16) и неравенство (2.1), имеем

$$k^{-2m}\int_\Omega \left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k\, dx \leq C_{14}\left\{\int_\Omega |w_s(x)|^k\, dx + k^{-m}\int_\Omega |w_s(x)|^{k-m}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx\right.$$

$$\left. + k^{-2m}\sum_{i=1}^{I(s)}\left[\left(\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\right)^m \left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}m} \int_{K(x_i^{(s)},\rho_i^{(s)})} |w_s(x)|^k\, dx + \left(\frac{1}{d_i^{(s)}}\right)^m \int_{K(x_i^{(s)},d_i^{(s)})} |w_s(x)|^k\, dx\right]\right\}. \qquad (3.17)$$

При дальнейшей оценке двух последних интегралов будет использоваться неравенство

$$\int_{K(x_0,\rho)} |u(x)|^p\, dx \leq C\left\{\rho^p \int_{B(x_0,2r)} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^p dx + \frac{\rho^n}{r^n}\int_{K(x_0,r)} |u(x)|^p\, dx\right\}, \qquad (3.18)$$

справедливое при $1 \leq p < n$ для произвольной функции

$$u(x) \in W_p^1(B(x_0,2r))$$

с постоянной C, зависящей только от p, n. В (3.18) $0 < \rho < \frac{r}{2}$.

Доказательство оценки (3.14) при $1 < p < n$ имеется в [3, лемма 1.4, гл. 8]. В случае $p = 1$ оценка может быть получена близкими к приведенным там рассуждениями.

Применяя (3.18) при $r = \frac{1}{4} r_i^{(s)}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{I(s)}\left[\left(\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\right)^m \left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}m} \int_{K(x_i^{(s)},\rho_i^{(s)})} |w_s(x)|^k\, dx + \left(\frac{1}{d_i^{(s)}}\right)^m \int_{K(x_i^{(s)},d_i^{(s)})} |w_s(x)|^k\, dx\right]$$

$$\leq C_{15}\left\{k^m \int_\Omega |w_s(x)|^{k-m}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx + \int_\Omega |w_s(x)|^k\, dx\right\}. \qquad (3.19)$$

Здесь использованы неравенства

$$\frac{[\rho_i^{(s)}]^{n-m}}{[r_i^{(s)}]^n}\left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right]^{\frac{n-m}{m-1}m} \leq C_{16}, \quad d_i^{(s)} \leq C_0 [r_i^{(s)}]^{\frac{n}{n-m}},$$

следующие из (1.1) и (1.5).

Оценка (3.14) получается теперь из неравенств (3.17), (3.19) и неравенств Юнга. Тем самым закончено доказательство леммы 2.

Займемся оценкой слагаемых правой части (3.7). Используя неравенство (1.1), получим при произвольном $\varepsilon \in (0,1)$:

$$|R_s^{(1)}| \le C_{17} \int_\Omega \left(1 + \left|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial}{\partial x}(w_s + u_0)\right| \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right| |w_s(x)|^{k-1} \left[|w_{1,s}(x)| + |w_{2,s}(x)|\right] dx$$

$$\le C_{18} \left\{ \varepsilon I_s(k) + k^{m(m-2)} \int_\Omega \left(1 + \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|\right)^m |w_s(x)|^k \, dx \right.$$

$$\left. + k^{-2m} \int_\Omega \left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k \, dx + \varepsilon^{-k} \int_\Omega \left(1 + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\right)^m [|w_{1,s}(x)|^k + |w_{2,s}(x)|^k] dx \right\}. \tag{3.20}$$

И оценим последний интеграл правой части (3.20) следующим образом

$$\int_\Omega \left(1 + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\right)^m \left[|w_{1,s}(x)|^k + |w_{2,s}(x)|^k\right] dx \le C_{19} \gamma_{1,s}^k , \tag{3.21}$$

где $\gamma_{1,s}$ определяется в (3.5).

Также используя неравенства (1.1), имеем при $\varepsilon \in (0,1)$:

$$|R_s^{(2)}| \le \frac{C_{20}}{k} \int_\Omega \left(1 + \left|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial (w_s + u_0)}{\partial x}\right| \left(\left|\frac{\partial w_{1,s}(x)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w_{2,s}(x)}{\partial x}\right|\right) |w_s(x)|^k \, dx$$

$$\le C_{21} \left\{ \varepsilon I_s(k) + \varepsilon^{-(m-1)} \left[k^{m(m-2)} \int_\Omega \left(1 + \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right)^m |w_s(x)|^k \, dx + k^{-2m} \int_\Omega \left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k \, dx \right.\right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{I(s)} \left(\int_{K(x_i^{(s)}, \bar\rho_i^{(s)})} \left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k \, dx + (k \bar\rho_i^{(s)})^{-m} \right.$$

$$\left.\left.\left. \times \int_{K(x_i^{(s)}, \bar\rho_i^{(s)})} (|u_0(x) - u_i^{(s)}|^m + |f(x) - f_i^{(s)}|^m) |w_s(x)|^k \, dx \right)\right]\right\}. \tag{3.22}$$

Оценка двух последних слагаемых в (3.22) дается следующими леммами.

Лемма 3. *Существуют положительные постоянные* $C^{(3)}, m_2$*, зависящие от известных параметров такие, что при произвольных* $k \ge m, \varepsilon \in (0,1)$ *справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^{I(s)} \int_{K(x_i^{(s)}, \bar\rho_i^{(s)})} \left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k \, dx \le C^{(3)} \left\{ \varepsilon I_s(k) + \varepsilon^{-m_2} k^{m_2} \int_\Omega |w_s(x)|^{k-m_2} \, dx \right\}. \tag{3.23}$$

Доказательство. Определим число p условием

$$\alpha \frac{n-m}{m-1} m^2 = (m-p)(n - \alpha m). \tag{3.24}$$

Используя оценки (2.1),(2.3) и применяя неравенство (3.18), получаем при $\bar r_i^{(s)} = \frac{1}{4} r_i^{(s)}$:

$$\int_{K(x_i^{(s)},\bar\rho_i^{(s)})}\left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k\,dx \le C_{22}[\bar\rho_i^{(s)}]^{-m}\left[\frac{d_i^{(s)}}{\bar\rho_i^{(s)}}\right]^{\frac{n-m}{m-1}m}\int_{K(x_i^{(s)},\bar\rho_i^{(s)})}|w_s(x)|^k\,dx$$

$$\le C_{23}\left[\frac{d_i^{(s)}}{\bar\rho_i^{(s)}}\right]^{\frac{n-m}{m-1}m}\left\{[\bar\rho_i^{(s)}]^{p-m}k^p\int_{K(x_i^{(s)},\bar r_i^{(s)})}|w_s(x)|^{k-p}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^p dx+\frac{[\bar\rho_i^{(s)}]^{n-m}}{[r_i^{(s)}]^n}\int_{K(x_i^{(s)},\bar r_i^{(s)})}|w_s(x)|^k\,dx\right\}. \tag{3.25}$$

Оценим в первом интеграле правой части (3.22)

$$k^p|w_s(x)|^{k-p}\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^p \le \varepsilon|w_s(x)|^k\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m+\varepsilon^{-\frac{p}{m-p}}k^{\frac{mp}{m-p}}|w_s(x)|^{k-\frac{mp}{m-p}}$$

и используем равенство (3.24) и определение $\bar\rho_i^{(s)}$. Суммируя в итоге неравенства (3.25), приходим к оценке (3.23).

Лемма 4. *Существуют последовательность* $\gamma_{2,s}$, *стремящаяся к нулю при* $s\to\infty$, *и положительная постоянная* $C^{(4)}$, *зависящая лишь от известных параметров, такие, что при произвольных* $k\ge m,\ \varepsilon\in(0,1)$ *справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^{I(s)}[k\bar\rho_i^{(s)}]^{-m}\int_{K(x_i^{(s)},\bar\rho_i^{(s)})}(|u_0(x)-u_i^{(s)}|^m+|f(x)-f_i^{(s)}|^m)|w_s(x)|^k\,dx$$

$$\le C^{(4)}\left\{\varepsilon I_s(k)+\varepsilon^{-k/m}\gamma_{2,s}^k+\varepsilon^{-k/m}k^{-k}\int_\Omega\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx+k^{m_1}\int_\Omega|w_s(x)|^k\left[1+\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|^m+\varphi(x)\right]dx\right\}. \tag{3.26}$$

Доказательство. Применяя неравенство (3.18), получаем при $\bar r_i^{(s)}=\frac14 r_i^{(s)}$:

$$\sum_{i=1}^{I(s)}\ [k\bar\rho_i^{(s)}]^{-m}\int_{K(x_i^{(s)},\bar\rho_i^{(s)})}(|u_0(x)-u_i^{(s)}|^m+|f(x)-f_i^{(s)}|^m)|w_s(x)|^k\,dx$$

$$\le C_{24}\left\{k^{-m}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m+\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|^m\right)|w_s(x)|^k\,dx\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{I(s)}\int_{K(x_i^{(s)},\bar r_i^{(s)})}(|u_0(x)-u_i^{(s)}|^m+|f(x)-f_i^{(s)}|^m)|w_s(x)|^{k-m}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{I(s)}k^{-m}\frac{[\bar\rho_i^{(s)}]^{n-m}}{[r_i^{(s)}]^n}\int_{K(x_i^{(s)},\bar r_i^{(s)})}(|u_0(x)-u_i^{(s)}|^m+|f(x)-f_i^{(s)}|^m)|w_s(x)|^k\,dx\right\}. \tag{3.27}$$

В силу (3.1), (3.2) оценим в последнем интеграле в (3.27)

$$\max_{x\in K(x_i^{(s)},\bar r_i^{(s)})}\left\{u_0(x)-u_i^{(s)}|^m+|f(x)-f_i^{(s)}|^m\right\}\le C_{23}[r_i^{(s)}]^{\alpha m}.$$

И последнее слагаемое в (3.27) не превосходит

$$C_{26}\int_\Omega|w_s(x)|^k\,dx$$

в силу выбора $\bar\rho_i^{(s)}$.

Второй интеграл в правой части (3.27) оценим

$$\sum_{i=1}^{I(s)} \int_{K(x_i^{(s)},\,\bar{r}_i^{(s)})} (|u_0(x)-u_i^{(s)}|^m + |f(x)-f_i^{(s)}|^m) |w_s(x)|^{k-m} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx$$

$$\le C_{27}\gamma_{2,s}^m \int_\Omega |w_s(x)|^{k-m} \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{27}\{\varepsilon I_s(k)+\varepsilon^{-k/m}\gamma_{2,s}^k\}, \tag{3.28}$$

где

$$\gamma_{2,s} = \max\{[r_i^{(s)}]^\alpha : i=1,2,...,I(s)\} \to 0$$

при $s\to\infty$.

Используя лемму 1, получаем из (3.27), (3.28) оценку (3.26), что и доказывает лемму 4.

Покажем сейчас способ оценки значений $R_s^{(3)}, R_s^{(5)}$. Используя условие (1.1), имеем

$$|R_s^{(3)}|+|R_s^{(5)}| \le C_{28}\frac{1}{k}\int_\Omega \left\{ \left(1+\left|\frac{\partial r_s}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left[k|w_s(x)|^k \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right| \right.\right.$$

$$\left. + k|w_s(x)|^{k-1}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right| [|w_{1,s}(x)|+|w_{2,s}(x)|] + |w_s(x)|^k \left(\left|\frac{\partial w_{1,s}(x)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial w_{2,s}(x)}{\partial x}\right|\right)\right]$$

$$\left. + \left[\left(1+\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial w_s(s)}{\partial x}\right|\right)^{m\frac{\bar{m}-1}{\bar{m}}} + \varphi(x)\right]|w_s(x)|^k \right\}dx$$

$$\le C_{29}\left\{ \varepsilon I_s(k) + k^{-2m}\int_\Omega \left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k\, dx + \varepsilon^{-k}\int_\Omega \left(1+\left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|\right)^{m-2} [|w_{1,s}(x)|^k + |w_{2,s}(x)|^k]\, dx \right.$$

$$+ k^{m(m-2)}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k\, dx + \sum_{i=1}^{I(s)} \left[\int_{K(x_i^{(s)},\,\bar{\rho}_i^{(s)})} \left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m |w_s(x)|^k\, dx \right.$$

$$\left. + [k\bar{\rho}_i^{(s)}]^{-m} \int_{K(x_i^{(s)},\,\bar{\rho}_i^{(s)})} (|u_0(x)-u_i^{(s)}|^m + |f(x)-f_i^{(s)}|^m)|w_s(x)|^k\, dx \right]$$

$$\left. + \varepsilon^{-(\bar{m}-1)} k^{2m(\bar{m}-1)} \int_\Omega \left[1+\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|^m + \varphi(x)\right] |w_s(x)|^k\, dx \right\}. \tag{3.29}$$

И оценки второго и последующих слагаемых правой части (3.29) уже имеются в полученных ранее неравенствах, соответственно, в (3.14), (3.21), (3.11), (3.23), (3.26).

Осталось оценить $R_s^{(4)}$, и требуемая оценка дается в следующей лемме.

Лемма 5. *Существует положительная постоянная* $C^{(5)}$*, зависящая лишь от известных параметров такая, что при произвольных* $k\ge m, \varepsilon\in(0,1)$ *справедлива оценка*

$$|R_s^{(4)}| \le C^{(5)}\left\{ \varepsilon I_s(k) + \varepsilon^{-\frac{1}{m-1}} \int_\Omega |w_s(x)|^k\, dx \right\}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Так как носители функций $\varphi_i^{(s)}(x)$ при фиксированном достаточно большом s не пересекаются, то имеем по определению $r_s(x)$:

$$R_s^{(4)} = -\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{I(s)}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega a_j\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}[v_i^{(s)}(x)\varphi_i^{(s)}(x)]\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\{|w_s(x)|^k\, w_{3,s}(x)\}\,dx$$

$$= \quad -\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{I(s)}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} a_j\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}v_i^{(s)}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\{|\,w_s(x)\,|^k\; w_{3,s}(x)\chi_i^{(s)}(x)\}\,dx$$

$$-\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{I(s)}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} a_j\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}[v_i^{(s)}(x)\varphi_i^{(s)}(x)]\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\{|\,w_s(x)\,|^k\; w_s(x)[1-\chi_i^{(s)}(x)]\}dx, \tag{3.31}$$

где

$$\chi_i^{(s)}(x) = g\left(\frac{2\,|\,x-x_i^{(s)}\,|}{\rho_i^{(s)}}\right).$$

Первый интеграл правой части (3.31) равен нулю в силу того, что $v_i^{(s)}(x)$ – решение уравнения (1.6). Оценим второй интеграл, используя неравенства (1.1), (2.1), (2.3). Имеем при

$$G_i^{(s)} = \left\{x \in R^n : \frac{1}{2}\,\rho_i^{(s)} \le |\,x-x_i^{(s)}\,| \le 2\rho_i^{(s)}\right\}:$$

$$|\,R_s^{(4)}\,| \le C_{30}\sum_{i=1}^{I(s)}\left[\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} + \left(\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\right)^{m-1}\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{n-m}\right]$$

$$\times\left\{\int_{G_i^{(s)}} |\,w_s(x)\,|^k\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right| dx + \frac{1}{k\rho_i^{(s)}}\int_{G_i^{(s)}} |\,w_s(x)\,|^{k+1}\,dx\right\}.$$

Оценим второй интеграл в фигурной скобке, используя неравенство (3.18) при $p=1$. Получим при $\bar{r}_i^{(s)} = \frac{1}{2}r_i^{(s)}$:

$$|\,R_s^{(4)}\,| \le C_{31}\sum_{i=1}^{I(s)}\left[\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} + \left(\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\right)^{m-1}\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{n-m}\right]$$

$$\times\left\{\int_{G_i^{(s)}} |\,w_s(x)\,|^k\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right| dx + \frac{[\rho_i^{(s)}]^{n-1}}{[r_i^{(s)}]^n}\int_{K(x_i^{(s)},\,\bar{r}_i^{(s)})} |\,w_s(x)\,|^{k+1}\,dx\right\}$$

$$\le C_{32}\left\{\varepsilon\int_{\Omega}|\,w_s(x)\,|^k\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx + \int_{\Omega}|\,w_s(x)\,|^{k+1}\,dx + \varepsilon^{-\frac{1}{m-1}}\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{I(s)}\left[\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} + \left(\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\right)^{m-1}\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{n-m}\right]^{\frac{m}{m-1}}\int_{G_i^{(s)}}|\,w_s(x)\,|^k\,dx\right\}. \tag{3.32}$$

При этом воспользовались оценками

$$\frac{1}{\rho_i^{(s)}}\left(\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right)^{\frac{n-m}{m-1}} \le C_{33}, \qquad \frac{[\rho_i^{(s)}]^{n-1}}{[r_i^{(s)}]^n} \le C_{33},$$

следующими из (1.4),(1.8). Эти же оценки показывают, что последняя сумма в (3.32) не превосходит

$$C_{34}\int_{\Omega}|\,w_s(x)\,|^k\,dx,$$

что и доказывает лемму 5.

Подводя итог полученным выше оценкам, получим следующую теорему.

Теорема 6. *Для остаточного члена* $w_s(x)$ *асимптотического разложенеия* (1.11) *при произвольном* $k \ge m$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |w_s(x)|^k \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C\left\{a^k k^{-k}\gamma_s + a^k \gamma_s^k + k^\tau \int_\Omega \left[1 + \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|^m + \varphi(x)\right] |w_s(x)|^{k-\sigma}\, dx\right\} \tag{3.33}$$

с положительными постоянными C, a, τ, σ*, зависящими лишь от произвольных параметров, и последовательностью* γ_s *такой, что*

$$\lim_{s\to\infty} \gamma_s = 0. \tag{3.34}$$

Доказательство теоремы 6 непосредственно следует из представления (3.7), оценок (3.9), (3.11), (3.14), (3.20)–(3.23), (3.26), (3.29), (3.30) и выбора достаточно малого, определяемого лишь известными постоянными, числа ε. При этом γ_s определяется равенством

$$\gamma_s = \max\left\{\gamma_{1,s}, \gamma_{2,s}, \int_\Omega \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx\right\}.$$

Далее считаем, что $a \ge 1$.

§ 4. Доказательство равномерной сходимости $w_s(x)$

Докажем сейчас, что из оценки (3.33) следует утверждение теоремы 3, используя итерационный метод Мозеровского типа (см. [3, гл. 8, § 1]).

Оценим интеграл в правой части (3.33) по неравенству Гельдера и получим

$$\int_\Omega \left[1 + \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|^m + \varphi(x)\right] |w_s(x)|^{k-\sigma}\, dx \le C\left(\int_\Omega |w_s(x)|^{(k-\sigma)r}\, dx\right)^{1/r} \tag{4.1}$$

с постоянной C, зависящей от

$$\operatorname{mes}\Omega, \quad \|f\|_{W_q^1(\Omega)}, \quad \|\varphi(x)\|_{L_{r_1}(\Omega)},$$

и числом r, удовлетворяющим условию:

$$1 < r < \frac{n}{n-m}. \tag{4.2}$$

Используя вложение $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ в $L_{\frac{nm}{n-m}}(\Omega)$ и неравенства (3.33), (4.1), (4.2), получаем при $k > \dfrac{nm}{n-m}$:

$$\int_\Omega |w_s(x)|^k\, dx \quad \le C_{35}\left\{\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(|w_s(x)|^{k\frac{n-m}{nm}}\right)\right|^m dx\right\}^{\frac{n}{n-m}}$$

$$\leq C_{36}\, k^{\frac{nm}{n-m}} \left\{ k^{\tau} \left[\int_{\Omega} | w_s(x) |^{r(k\frac{n-m}{n}-m-\sigma)}\, dx \right]^{1/r} \right.$$

$$\left. + a^{k\frac{n-m}{n}-m} \left[k\frac{n-m}{n} - m \right]^{-k\frac{n-m}{n}+m} \gamma_s + a^{k\frac{n-m}{n}-m} \gamma_s^{k\frac{n-m}{n}-m} \right\}^{\frac{n}{n-m}}. \tag{4.3}$$

Выберем в (4.3) $k = k_j$, $j = 1,2,...,$ где

$$k_j = \left(\frac{nm}{n-m} + \frac{nr(m+\sigma)}{n-(n-m)r} \right) \left(\frac{n}{n-m}\frac{1}{r} \right)^{j} - \frac{nr(m+\sigma)}{n-(n-m)r}.$$

Вводя обозначения

$$J_s(j) = \int_{\Omega} | w_s(x) |^{k_j}\, dx, \quad \theta = \frac{r(n-m)}{n},$$

$$b_1 = \left(\frac{n}{n-m}\frac{1}{r} \right)^{\frac{n(m+r)}{n-m}}, \quad a_1 = a^{\frac{nm}{n-m} + \frac{nr(m+\sigma)}{n-(n-m)r}},$$

$$b_2 = \frac{nm}{n-m}, \quad b_3 = a_1 m^{-b_2},$$

$$\gamma'_s = C_{36}(3\gamma_s)^{\frac{n}{n-m}}, \quad \gamma''_s = C_{36}(3\gamma_s^{b_2})^{\frac{n}{n-m}} a_1,$$

перепишем неравенство (4.3) в виде

$$J_s(j) \leq C_{37}\, b_1^j\, [J_s(j-1)]^{1/\theta} + b_1^j\, b_3^{\theta^{-j}}\, \theta^{b_2 j \theta^{-j}}\, \gamma'_s + b_1^j [\gamma''_s]^{\theta^{-j}}. \tag{4.4}$$

Отсюда имеем

$$[J_s(j)]^{\theta^j} \leq C_{37}^{\theta^j} b_1^{j\theta^j} [J_s(j-1)]^{\theta^{j-1}} + b_1^{j\theta^j} b_3 \theta^{b_2 j} [\gamma'_s]^{\theta^j} + b_1^{j\theta^j} [\gamma''_s]. \tag{4.5}$$

Последовательным применением неравенства (4.5) получаем

$$\begin{aligned}
&[J_s(j)]^{\theta^j} \leq C_{37}^{\theta^j+\theta^{j-1}+\cdots+\theta} b_1^{j\theta^j+(j-1)\theta^{j-1}+\cdots+\theta} J_s(0) \\
&+ \sum_{k=1}^{j-1} C_{37}^{\theta^j+\theta^{j-1}+\cdots+\theta^{j-k+1}} b_1^{j\theta^j+\cdots+(j-k)\theta^{j-k}} b_3\, \theta^{b_2(j-k)} [\gamma'_s]^{\theta^{j-k}} \\
&+ \sum_{k=1}^{j-1} C_{37}^{\theta^j+\theta^{j-1}+\cdots+\theta^{j-k+1}} b_1^{j\theta^j+\cdots+(j-k)\theta^{j-k}} \gamma''_s + b_1^{j\theta^j} b_3 \theta^{b_2 j} [\gamma'_s]^{\theta^j} + b_1^{j\theta^j} \gamma''_s \\
&\leq C_{38} \left\{ J_s(0) + \sum_{k=0}^{j-1} \theta^{b_2(j-k)} [\gamma'_s]^{\theta^{j-k}} + \gamma''_s \right\}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Оценим последнюю сумму в фигурной скобке, считая s настолько большим, что $\gamma'_s < e^{-b_2}$:

$$\sum_{k=0}^{j-1} \theta^{b_2(j-k)} [\gamma'_s]^{\theta^{j-k}} = \sum_{k=1}^{j} \theta^{b_2 k} [\gamma'_s]^{\theta^k} \leq 2\int_1^j \theta^{b_2 t} [\gamma'_s]^{\theta^t}\, dt + 2 \max_{1 \leq k \leq j} \{ \theta^{b_2 k} [\gamma'_s]^{\theta^k} \}$$

$$\leq 2\int_0^1 y^{b_2-1} [\gamma'_s]^y\, dy + 2\left[\frac{b_2}{\ln\frac{1}{\gamma'_s}} \right]^{b_2} \leq 2\left[\ln\frac{1}{\gamma'_s} \right]^{-b_2} \left\{ \int_0^{\infty} z^{b_2-1} e^{-z}\, dz + b_2^{b_2} \right\} = \gamma'''_s, \tag{4.7}$$

где $\gamma'''_s \to 0$ при $s \to \infty$.

Окончательно из (4.6) при $j \to \infty$ получаем

$$\operatorname{vrai\,max}\{ | w_s(x) |^{\frac{nm}{n-m} + \frac{nr(m+\sigma)}{n-(n-m)r}} : x \in \overline{\Omega} \} \leq C_{39} \left\{ \int_{\Omega} | w_s(x) |^{\frac{nm}{n-m}}\, dx + \gamma''_s + \gamma'''_s \right\}$$

и, следовательно, отсюда имеем (1.16), что и заканчивает доказательство теоремы 3.

1. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. К.: Наук. думка, 1974.
2. *Скрыпник И.В.* Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 2. С. 21–26.
3. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
4. *Симоненко И.Б.* Гармоническая задача Дирихле в области с мелкозернистой структурой границы. Равномерная сходимость. Рост. ун-т. Деп. в ВИНИТИ. № 590-В91, 1991.
5. *Скрыпник И.В.* Поточечная оценка некоторых емкостных потенциалов // Сб. Общая теория нелинейных граничных задач. К.: Наук. думка 1983. С. 198–206.
6. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

(*Доклады Академии наук. – 1994. –* ***339****, № 1*)

Эллиптические граничные задачи в областях с мелкозернистой границей изучены для линейных уравнений в работах В.А.Марченко и Е.Я.Хруслова (см., например, [1]) и для нелинейных уравнений второго порядка в работах автора (см., например, [2, 3]). В этих работах изучалась возможность приближения предельной функцией в интегральных нормах последовательности решений задач Дирихле в областях с мелкозернистой границей и строилась для предельной функции усредненная граничная задача.

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n с липшицевой границей, и предположим, что при $s = 1, 2, \ldots$ определены непересекающиеся замкнутые множества $F_i^{(s)}$, $i = 1,2,\ldots, I(s)$, содержащиеся в Ω, диаметры которых стремятся к нулю при $s \to \infty$. В области $\Omega_s = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$ рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in \Omega_s, \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega_s \tag{2}$$

с некоторой заданной в $\overline{\Omega}$ функцией $f(x)$.

При определенных предположениях в [2] доказывается, что при $s \to \infty$ последовательность $u_s(x)$ сходится в $L_r(\Omega)$ к решению $u_0(x)$ усредненной граничной задачи при любом $r \in (1, \infty)$. Автором так же как для линейного, так и для нелинейного случаев установлена некоторая сходимость градиентов решений.

Вместе с тем легко видеть, что сходимость последовательности $u_s(x)$ к $u_0(x)$ не может быть равномерной. И естественно возникает вопрос о равномерном приближении последовательности $u_s(x)$ некоторой новой последовательностью и способе построения приближающей последовательности.

Этот вопрос решается в данной работе введением корректирующей последовательности $r_s(x)$, построение которой основано на решении модельных граничных задач. Эти построения связаны с предложенным автором в [2] асимптотическим разложением последовательности $u_s(x)$. Доказывается, что $u_0(x) + r_s(x)$

равномерно приближает $u_s(x)$ в том смысле, что $w_s(x)$ – остаточный член представления $u_s(x) = u_0(x) + r_s(x) + w_s(x)$ – равномерно стремится к нулю при $s \to \infty$.

Для уравнения Лапласа близкий результат о равномерном приближении доказан И.Б.Симоненко в [4].

1.Будем предполагать, что функции $a_j(x,u,p)$, $j = 0,1,\dots,n,$ определены при $x \in R^n$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

A1) функции $a_j(x,u,p)$, $j = 0,1,\dots,n,$ непрерывны по u, p при почти всех $x \in R^n$, измеримы по x при всех $(u,p) \in R^1 \times R^n$; $a_j(x,0,0) \equiv 0$ при $x \in R^n$, $j = 1,\dots,n$;

A2) существуют положительные постоянные ν, ν', μ такие, что $\nu' < \nu$ и при $x \in R^n$, $u,\ v \in R^1$, $p,\ q \in R^n$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} \left[a_j(x,u,p) - a_j(x,u,q)\right](p_j - q_j) \geq \nu(1 + |p| + |q|)^{m-2}\,|p-q|^2, \\
a_0(x,u,p)\,u \geq -\nu'\,|p|^m - \mu(1 + |u|), \\
\sum_{j=1}^{n} \left|a_j(x,u,p) - a_j(x,v,q)\right| \leq \mu(1 + |u| + |v| + |p| + |q|)^{m-2}(|p-q| + |u-v|), \\
|a_0(x,u,p)| \leq \mu(1 + |u| + |p|)^{m-1},
\end{gathered} \tag{3}$$

где $2 \leq m \leq n$;

A3) функции $a_j(x,0,p)$, $j = 1,\dots,n$ – дифференцируемы по x, p и выполнена оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k} a_j(x,0,p)\right| \leq \mu(1 + |p|)^{m-2}\,|p|, \quad j,k = 1,\dots,n.$$

Замечание 1. Видом неравенств (3) в условии A2 ограничились только для простоты изложения. Без существенных изменений можно рассмотреть задачу и при других ограничениях, в частности, справедливых для уравнения (1) при

$$a_j(x,u,p) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x,u)\,p_k.$$

Также ради простоты изложения сделано предположение $2 \leq m \leq n$. Можно доказать результат статьи и в случаях $1 < m < 2$ или $m = n$.

При выполнении условий A1, A2 и в предположении $f(x) \in W_q^1(\Omega),\ q > n$, просто доказывается (см. [3], гл. 9, §1) существование обобщенного решения $u_s(x) \in f(x) + \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ задачи (1), (2). Продолжим $u_s(x)$ на Ω, полагая $u_s(x) = f(x)$ при $x \in \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$. Так получающиеся функции $u_s(x)$ принадлежат $W_m^1(\Omega)$ и с некоторыми не зависящими от s постоянными M_0, M_1 выполнены оценки

$$vrai\max\{|u_s(x)|: x\in\Omega\}\le M_0, \tag{4}$$

$$\|u_s(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le M_1 . \tag{5}$$

Число M_0 выбираем таким, чтобы при почти всех $x\in\Omega$ выполнялось и неравенство $|f(x)|\le M_0$.

В силу (5), переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать последовательность $u_s(x)$ слабо сходящейся в $W_m^1(\Omega)$, и пусть $u_0(x)$ – предельная функция.

Сформулируем далее условия на множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$ и пусть $x_i^{(s)}$ - центр такого шара радиуса $d_i^{(s)}$, что $F_i^{(s)}\subset\overline{B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})}$. Здесь и далее $B(x_0,\rho)$ – открытый шар радиуса ρ с центром в точке x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от шара $B(x_i^{(s)},\ d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup_{j\ne i}B(x_j^{(s)},d_j^{(s)})\cup\partial\Omega$.

Будем предполагать выполнение условий:

B1) существует положительная C_0 такая, что при $i=1,...,I(s)$, $s=1,2,...$ справедливо неравенство

$$d_i^{(s)}\le C_0\left[r_i^{(s)}\right]^{n/(n-m)}; \tag{6}$$

B2) имеет место равенство

$$\lim_{s\to\infty}\max\left\{r_i^{(s)}: i=1,2,...,I(s)\right\}=0. \tag{7}$$

Построение корректирующей последовательности основано на решениях модельных граничных задач. Зафиксируем в дальнейшем бесконечно дифференцируемую функцию $g(t)$, определенную на R^1 и удовлетворяющую условиям:

$$g(t)\equiv 1 \quad \text{при} \quad t\le 1,$$

$$g(t)\equiv 0 \quad \text{при} \quad t\ge 2,$$

$$0\le g(t)\le 1,\quad \left|\frac{d\,g(t)}{dt}\right|\le 2.$$

Определим при произвольном вещественном числе k функцию $v_i^{(s)}(x,k)\in W_m^1(G_i^{(s)})$, $G_i^{(s)}=B(x_i^{(s)},1)\setminus F_i^{(s)}$, как решение задачи

$$\sum_{j=1}^n\frac{d}{dx_j}a_j(x,0,\frac{\partial v}{\partial x})=0,\quad x\in G_i^{(s)}, \tag{8}$$

$$v(x)=k\,g(2|x-x_i^{(s)}|),\quad x\in\partial G_i^{(s)}. \tag{9}$$

Доопределим $v_i^{(s)}(x,k)$ на все пространство R^n, полагая ее равной нулю вне $B(x_i^{(s)},1)$ и k на $F_i^{(s)}$.

При доказательстве равномерной сходимости остаточного члена разложения используются свойства предельной функции $u_0(x)$, следующие из усредненной граничной задачи, и для построения этой задачи требуется еще условие

C) существует непрерывная функция $c(x,k)$, определенная при $x \in \overline{\Omega}$, $k \in R^1$, такая, что для произвольных x_0, k выполнено равенство

$$C(x_0,k) = \lim_{\rho\to 0}\lim_{s\to\infty}\frac{1}{k\left|B(x_0,\rho)\right|}\times\sum_{i\in I_s(x_0,\rho)}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} a_j\left(x,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x_j}\,dx, \tag{10}$$

причем стремление к пределу в (10) является равномерным по k на любом ограниченном интервале изменения k. В (10) $I_s(x_0,\rho)$ - множество тех номеров i, $1 \le i \le I(s)$, для которых $x_i^{(s)} \in B(x_0,\rho)$, $|B(x_0,\rho)| = mes\,B(x_0,\rho)$.

Пусть

$$\rho_i^{(s)} = \left[r_i^{(s)}\right]^{n/n-1},\ i = 1,2,...,I(s), \quad s = 1,2,.... \tag{11}$$

При достаточно больших s таких, что

$$2d_i^{(s)} \le \rho_i^{(s)} \le \frac{1}{8}r_i^{(s)} \le \frac{1}{8},$$

определим асимптотическое разложение

$$u_s(x) = u_0(x) + r_s(x) + w_s(x), \tag{12}$$

где

$$r_s(x) = \sum_{i=1}^{I(s)} v_i^{(s)}(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)})\, q\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho_i^{(s)}}\right) \tag{13}$$

и $w_s(x)$ – остаточный член разложения. В (13) $u_i^{(s)}$, $f_i^{(s)}$ – средние значения функций $u_0(x), f(x)$ по шару $B(x_i^{(s)}, \rho_i^{(s)})$.

Непосредственно из [3, гл. 9] следуют утверждения:

1) при выполнении условий A_1, A_2, B_1, B_2 последовательность $w_s(x)$ сильно сходится к нулю в $W_m^1(\Omega)$; последовательность $r_s(x)$ сильно сходится к нулю в $W_p^1(\Omega)$ при любом $p \in (1,m)$;

2) при выполнении условий A_1, A_2, B_1, B_2, C, функция $u_0(x)$ является обобщенным решением задачи

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - a_0\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + C(x, f-u) = 0,\quad x\in\Omega, \tag{14}$$

$$u(x) = f(x),\quad x \in \partial\Omega. \tag{15}$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2, C *и* $f(x) \in W_q^1(\Omega)$, $q > n$. *Тогда*

$$vrai\max\{|w_s(x)|: x \in \Omega\} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty, \tag{16}$$

где $w_s(x)$ *– остаточный член асимптотического разложения* (12).

2. Доказательство теоремы 1 основывается на оценках решений модельных задач (8), (9). Ключевую роль при этом играют поточечные оценки самого решения и его градиента. Первая из этих оценок доказана в [5]:

$$\left|v_i^{(s)}(x,k)\right| \le C_1 \, |k| \left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|}\right)^{(n-m)/(m-1)} \quad \text{при} \quad d_i^{(s)} \le |x - x_i^{(s)}| \le 1 \tag{17}$$

с постоянной C_1, зависящей лишь от n, m, ν, μ.

Оценку для градиента $v_i^{(s)}(x,k)$ сформулируем, для простоты, при $(k) \le 2M_0$, так как она используется только при $k = f_i^{(s)} - u_i^{(s)}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1 – A_3. *Существует постоянная* C_2, *зависящая только от* n, m, ν, μ, *такая, что для решения* $v_i^{(s)}(x,k)$ *задачи* (8), (9) *при* $2d_i^{(s)} \le |x - x_i^{(s)}| \le 3/4$, $|k| \le 2M_0$ *выполнено неравенство*

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} v_i^{(s)}(x,k)\right| \le C_2 \frac{1}{|x - x_i^{(s)}|} \cdot \left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|}\right)^{(n-m)/(m-1)}. \tag{18}$$

3. Доказательство сходимости (16) основывается на интегральных оценках для $w_s(x)$. Для этого в интегральное тождество, соответствующее задаче (1), (2), подставляется пробная функция

$$|w_s(x)|^r \left\{ w_s(x) - \sum_{i=1}^{I(s)} \left[u_i^{(s)} - f_i^{(s)} - u_0(x) + f(x)\right] \cdot g(|x - x_i^{(s)}| \left[r_i^{(s)}\right]^{(\alpha m - n)/(n-m)}) \right\},$$

где r – произвольное число из интервала (m, ∞), $\alpha \in (0,1)$ и таково, что $u_0(x) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Гельдеровость функции $u_0(x)$ как решения задачи (14), (15) следует из [6].

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 1 *для остаточного члена* $w_s(x)$ *асимптотического разложения* (12) *при произвольном* $r \ge m$ *справедлива оценка*

$$\int_\Omega |w_s(x)|^r \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C \left\{ a^k r^{-r} \gamma_s + a^r \gamma_s^r + r^\tau \int_\Omega \left[1 + \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right|\right]^m |w_s(x)|^{r-\sigma} \, dx \right\} \tag{19}$$

с положительными постоянными C, a, τ, σ, *зависящими лишь от известных параметров, и последовательностью* γ_s *такой, что* $\gamma_s \to 0$ *при* $s \to \infty$.

В ходе доказательства теоремы 3 также используются вспомогательные неравенства, получающиеся из интегральных тождеств для задач (8), (9) и (14), (15) при подстановках соответственно пробных функций

$$| w_s(x)|^r \left\{ v_i^{(s)}(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)})\, g^m\left(\frac{| x - x_i^{(s)} |}{\rho_i^{(s)}}\right) - (f_i^{(s)} - u_i^{(s)})\, g^m\left(\frac{| x - x_i^{(s)} |}{d_i^{(s)}}\right)\right\},$$

$$| w_s(x)|^r \left[u_0(x) - u_0(y)\right] g^m(r^{2/\alpha} \,| x - y |), \quad y \in \overline{\Omega}.$$

Из неравенства (19) итерационным процессом доказывается, что для некоторой последовательности r_j такой, что $r_j \to \infty$ при $j \to \infty$, выполнена оценка

$$\left(\int_\Omega | w_s(x)|^{r_j}\, dx\right)^{1/r_j} \le C'\gamma'_s, \tag{20}$$

где C' – постоянная, зависящая лишь от известных параметров, $\gamma'_s \to 0$ при $s \to \infty$.

Из неравенства (20) и следует теорема 1.

4. **Замечание 2.** В данной работе устанавливается теорема 1 для случая объемного распределения множеств $F_i^{(s)}$. Аналогичные результаты можно доказать при поверхностном распределении множеств $F_i^{(s)}$, а также в случае перфорации более общего вида, например, когда $F_i^{(s)}$ содержатся в трубчатых окрестностях многообразий различной размерности.

1. *В.А.Марченко, Е.Я.Хруслов.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974, 279 с.
2. *И.В. Скрыпник. //* Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 2. С. 21 – 26.
3. *И.В. Скрыпник.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990. 442 с.
4. *И.Б. Симоненко.* Гармоническая задача Дирихле в области с мелкозернистой структурой границы. Равномерная сходимость. Деп. ВИНИТИ, № 590–В91. Рост. ун-т., 1991. 34 с.
5. *И.В. Скрыпник.* В кн.: Общая теория нелинейных граничных задач. Киев: Наук. думка, 1983. С. 198 – 206.
6. *О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.

УСРЕДНЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

*(Дифференциальные уравнения. – 1995. – **31**, № 2)*

В работе построена усредненная задача для последовательности квазилинейных параболических задач с граничным условием Дирихле в областях с мелкозернистой границей. Усреднение основано на асимптотическом разложении решений задач в перфорированных областях и поточечных оценках решений модельных нелинейных параболических уравнений.

Пусть Ω – ограниченная область в $R^n, n \geq 3$, и предположим, что при каждом натуральном s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}$, $i = 1,...,I(s)$, содержащихся в Ω. В цилиндрической области $Q_T^{(s)} = \Omega^{(s)} \times [0,T]$, $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(S)} F_i^{(s)}$ рассматривается квазилинейная параболическая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right);\ (x,t) \in Q_T^{(s)}, \quad (1)$$

$$u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \partial\Omega^{(s)} \times [0,T], \quad (2)$$

$$u(x,0) = f_0(x),\ x \in \Omega^{(s)}, \quad (3)$$

с известными функциями $f(x,t), f_0(x)$, определенными соответственно в $Q_T = \overline{\Omega} \times [0,T], \overline{\Omega}$.

При формулируемых далее условиях просто доказывается существование решения $u_s(x,t)$ задачи (1)–(3). Используя доказанную нами ранее сходимость последовательности $u_s(x,t)$ к предельной функции, в работе строится для этой функции новая граничная задача (усредненная задача) в цилиндре Q_T.

Усреднение эллиптических задач в областях с мелкозернистой границей изучалось для линейных уравнений в работах В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова [1] и для нелинейных уравнений в [2, 3].

1. Формулировка предположений и основного результата. Для простоты изложения ограничимся наиболее простыми условиями роста коэффициентов $a_j(x,t,u,p)$ по переменным u, p. Будем предполагать, что функции $a_j(x,t,u,p)$, $j = 0,1,...,n$, определены при $x \in R^n, t \in R^1$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют условиям:

A$_1$) функции $a_j(x,t,u,p)$ непрерывны по u, p при почти всех $(x,t) \in R^n \times R^1$, измеримы по x,t при любых $(u,p) \in R^1 \times R^n$, $a_j(x,t,0,0) \equiv 0$ при $(x,t) \in R^n \times R^1$, $j = 0,1,...,n$;

A$_2$) существуют положительные постоянные ν,μ такие, что при $(x,t)\in R^n\times R^1$, $u,v\in R^1$, $p,q\in R^n$ выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}[a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,u,q)](p_j-q_j)\ge\nu\,|\,p-q\,|^2,$$

$$|\,a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,v,q)\,|\le\mu[|\,u-v\,|+|\,p-q\,|],\ j=1,...,n,$$

$$|\,a_0(x,t,u,p)\,|\le\mu[|\,u\,|+|\,p\,|]+\varphi(x,t), \tag{4}$$

где $\varphi(x,t)\in L_2(Q_T)$.

Так же, как в работе [4], будем считать для простоты, что $f_0(x)\equiv 0$, в дальнейшем начальное условие (3) заменим условием

$$u(x,0)=0,\ x\in\Omega^{(s)}. \tag{5}$$

Будем предполагать выполненным следующее условие:

F) функция $f(x,t)$ определена при $x\in\overline{\Omega},\ t\in R^1$, ограничена, равна нулю при $t<0$ и принадлежит в цилиндре $Q=\Omega\times R^1$ пространству $W_2^{1,1/2}(Q)$.

Используемые здесь и далее обозначения функциональных пространств понимаются согласно [5].

Обозначим

$$N=\operatorname{ess\,sup}\{|\,f(x,t)\,|:(x,t)\in Q\}+\|\,f(x,t)\,\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}. \tag{6}$$

Просто проверяется, что условия A$_1$), A$_2$), F) обеспечивают разрешимость задачи (1), (2), (5) в пространстве $V_2(Q_T^{(s)})$ при любом $T<\infty$. Более того, решение $u_s(x,t)$ этой задачи принадлежит пространству $W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})$ и существует не зависящая от s постоянная M такая, что при всех s справедливы оценки

$$\operatorname{ess\,sup}\{|\,u_s(x,t)\,|:(x,t)\in Q_T^{(s)}\}\le M, \tag{7}$$

$$\|\,u_s(x,t)\,\|_{V_2(Q_T^{(s)})}\le M,\ \|\,u_s(x,t)\,\|_{W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})}\le M. \tag{8}$$

Доопределим функции $u_s(x,t)$ на Q, полагая их равными $f(x,t)$ вне $Q^{(s)}$. Переходя, если понадобится к подпоследовательности, будем считать, что $u_s(x,t)$ при $s\to\infty$ слабо сходится к $u_0(x,t)$ в $W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})$.

Из [4] следует, что для произвольной функции $\psi(x,t)\in W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})\cap W_2^{1,1/2}(Q^{(s)})$ произвольной функции $\eta(t)\in C^1(R^1)$ с носителем в интервале $(-T,T)$ справедливо интегральное тождество

$$J_s[\psi]\equiv\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(u_s\eta)](x,\alpha)\overline{[F\psi](x,\alpha)}dxd\alpha+$$

$$+\iint_{Q_T^{(s)}}\left\{u_s(x,t)\psi(x,t)\frac{d\eta(t)}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}+\right.$$

$$+a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\psi(x,t)\Bigg\}dxdt=0. \qquad (9)$$

Здесь $F(u_s\eta)$, $F\psi$ – преобразования Фурье функций $u_s\eta,\psi$ по переменной t, черта над $[F\psi](x,\alpha)$ обозначает комплексное сопряжение, при этом полагаем $u_s(x,t)\equiv 0$ при $t<0$. Кроме того, можно показать, что $u_s(x,t)\eta(t)\in W_2^{1,1/2}(Q^{(s)})$.

Сформулируем предположения относительно множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и определим точку $x_i^{(s)}$ условием $F_i^{(s)}\subset\overline{B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})}$. Здесь и далее $B(x_0,\rho)$ – шар радиуса ρ с центром в x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup\limits_{j\neq i}B(x_j^{(s)},d_j^{(s)})\bigcup\partial\Omega$.

Предположим выполнение условий:

B1) справедливо равенство $\lim\limits_{s\to\infty}r^{(s)}=0$, где $r^{(s)}=\max\{r_i^{(s)}:i=1,...,I(s)\}$;

B2) существует положительная постоянная C_0 такая, что при $i=1,...,I(s),\ s=1,2,...$, выполнены оценки

$$d_i^{(s)}\le C_0 r_i^{(s)},\quad \sum_{i=1}^{I(s)}[d_i^{(s)}]^{2(n-2)}[r_i^{(s)}]^{-n}\le C_0.$$

В дальнейшем полагаем $T>1/2,\ T'=T-1/2$. Построение усредненной задачи осуществим в цилиндре $Q_{T'}$, что не ограничивает общности результата в силу произвольности T.

Из [4] следует

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* A1), A2), F), B1), B2), $u_s(x,t)$ – *решение задачи* (1), (2), (5), *и пусть последовательность* $u_s(x,t)$ *слабо сходится в* $W_2^{1,1/2}(Q_T)$ *к* $u_0(x,t)$. *Тогда при произвольных* $p\in(1,2),\ h_0\in(0,1/4)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]}\int_\Omega|u_s(x,t)-u_0(x,t)|^2\,dx+\iint_{Q_{T'}}\left|\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right|^p dxdt+\right.$$
$$\left.+\operatorname*{ess\,sup}_{0<h<h_0}\iint_{Q_{T'}}\left|\frac{u_s(x,t+h)-u_0(x,t+h)-u_s(x,t)+u_0(x,t)}{\sqrt{h}}\right|^p dxdt\right\}=0. \qquad (10)$$

Для построения усредненной задачи понадобится еще дополнительное условие. Для его формулировки проведем вспомогательные построения.

Обозначим $\lambda_s=[-\ln r^{(s)}]^{-1},\ s=1,2,...$, и определим $\rho_i^{(s)}$ при $s=1,2,...,\ i=1,...,I(s)$ равенствами $\rho_i^{(s)}=2d_i^{(s)}$, если $i\in I'(s)=\{i=1,...,I(s):d_i^{(s)}\ge[r_i^{(s)}]^{n/(n-2)}\lambda_s^{-1}\}$; $\rho_i^{(s)}=[r_i^{(s)}]^{n/(n-2)}\lambda_s^{-2}$, если $i\in I''(s)=$ $=\{i=1,...,I(s):d_i^{(s)}<[r_i^{(s)}]^{n/(n-2)}\lambda_s^{-1}\}$. Можем считать в дальнейшем s настолько большим, что $\rho_i^{(s)}<r_i^{(s)}/4$ при $i\in I''(s)$; $d_i^{(s)}\le 1/2,\ \lambda_s<1/16$.

Легко проверяется (см. [4]), что

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i\in I'(s)}[d_i^{(s)}]^{n-2}=0,\ \lim_{s\to\infty}\sum_{i\in I''(s)}[\rho_i^{(s)}]^n=0,\ \sum_{i=1}^{I(s)}[d_i^{(s)}]^{n-2}\le C' \tag{11}$$

с постоянной C', зависящей лишь от C_0 и $\mathrm{mes}\Omega$.

Для заданной пары значений (i,s) таких, что $s=1,2,...,\ i\in I''(s),$ разделим отрезок $[0,T']$ на $K(i,s)$ отрезков равной длины точками $t_{i,0}^{(s)}=0,\ t_{i,1}^{(s)},...,t_{i,K(i,s)}^{(s)}=T'$ так, чтобы $(1/2)[\rho_i^{(s)}]^2\le t_{i,k}^{(s)}-t_{i,k-1}^{(s)}\le[\rho_i^{(s)}]^2$.

Определим для $s=1,2,...,\ i=1,...,I(s)$ и $q\in R^1$ функцию $v_i^{(s)}(x,t,q)$ как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0 \text{ для } (x,t)\in G_i^{(s)}\times[-T,T], \tag{12}$$

$$v(x,t)=q\omega(|x-x_i^{(s)}|)\omega(-t/T) \text{ для } (x,t)\in\partial G_i^{(s)}\times[-T,T], \tag{13}$$

$$v(x,-T)=0,\ (x,t)\in G_i^{(s)}, \tag{14}$$

где $G_i^{(s)}=B(x_i^{(s)},1)\setminus F_i^{(s)},\ \omega(r)$ фиксированная функция класса $C^\infty(R^1)$, равная единице для $r\le1/2$, нулю при $r\ge1$ и такая, что $0\le\omega(r)\le1$. Продолжим функцию $v_i^{(s)}(x,t,q)$ на $R^n\times R^1$, полагая ее равной нулю вне $B(x_i^{(s)},1)\times[-T,T]$ и $q\omega(-t/T)$ при $(x,t)\in F_i^{(s)}\times[-T,T]$.

Будем предполагать выполнение следующего условия:

C) существует непрерывная функция $c(x,t,q)$ такая, что для произвольного шара $B\subset Q_T$ имеет место равенство

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{(i,k)\in I_s(B)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q}\iint_{Q_{i,k}^{(s)}}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x_j}dxdt=$$

$$=\iint_B c(x,t,q)dxdt,\ Q_{i,k}^{(s)}=B(x_i^{(s)},2\rho_i^{(s)})\times[t_{i,k-1}^{(s)},t_{i,k}^{(s)}] \tag{15}$$

и предел в (15) равномерен относительно q на каждом ограниченном интервале, $I_s(B)$ – множество пар (i,k), для которых $i\in I''(s),\ k=1,...,K(i,s)$ и $(x_i^{(s)},t_{i,k}^{(s)})\in B$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 *и условие* C). *Тогда функция* $u_0(x,t)$ *является решением задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+c(x,t,f-u)=0,\ (x,t)\in Q_T, \tag{16}$$

$$u(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T'], \tag{17}$$

$$u(x,0)=0,\ x\in\Omega, \tag{18}$$

где $c(x,t,q)$ *– функция, определенная в условии* C).

2. Оценка вспомогательных функций. При построении усредненной граничной задачи основную роль играют поточечные и интегральные оценки функции $v_i^{(s)}(x,t,q)$, определенной выше как решение задачи (12)–(14).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A1), A2). *Тогда существует постоянная* K_1, *зависящая только от* n,ν,μ,T, *такая, что при* $(x,t)\in Q_{i,T}^{(s)} = G_i^{(s)}\times[-T,T],\ q_1,q_2\in R^1$ *справедлива оценка*

$$|v_i^{(s)}(x,t,q_1)-v_i^{(s)}(x,t,q_2)|\le|q_1-q_2|\min\{K_1(d_i^{(s)}/|x-x_i^{(s)}|)^{n-2},1\}. \tag{19}$$

При $q_2=0$ оценка (19) доказана в [4]. Для оценки функции $\delta_i^{(s)}(x,t,q_1,q_2)=$ $=v_i^{(s)}(x,t,q_1)-v_i^{(s)}(x,t,q_2)$ достаточно заметить, что она является решением задачи вида (12)–(14) при тех же условиях относительно коэффициентов уравнения.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия* A1), A2). *Пусть* h,ρ *– произвольные положительные числа, удовлетворяющие неравенствам* $2d_i^{(s)}\le\rho\le1,\ h\le1$ *и* $\zeta(t)$ *– непрерывно дифференцируемая функция такая, что* $\zeta(t)\equiv0$ *при* $t\in[t_0-h,t_0+h],\ t_0\in[0,T]',|d\zeta(t)/dt|\le L/h$. *Тогда с некоторыми зависящими лишь от* $n,\nu,\mu,,T,L$ *постоянными* K_2,K_3 *справедливы оценки*

$$\|[v_i^{(s)}(x,t,q_1)-v_i^{(s)}(x,t,q_2)]\omega(|x-x_i^{(s)}|/\rho)\zeta(t)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)}\le$$

$$\le K_2|q_1-q_2|^2[d_i^{(s)}]^{n-2}(h+\rho d_i^{(s)}),$$

$$\int_{-T}^{T}\int_{G_i^{(s)}}\omega^2\left(\frac{|x-x_i^{(s)}|}{\rho}\right)\zeta^2(t)\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{q_1}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_1)}{\partial x}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_1)}{\partial x_j}-\frac{1}{q_2}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_2)}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_2)}{\partial x_j}\right\}\times$$

$$\times dxdt\le K_3|q_1-q_2|[d_i^{(s)}]^{n-2}(h+\rho d_i^{(s)}), \tag{20}$$

где $\omega(r)$ *– функция, зафиксированная при постановке задачи* (12)–(14), q_1,q_2 *– произвольные вещественные числа.*

Доказательство первого неравенства при $q_2=0$ полностью аналогично доказательству теоремы 4 в [4]. При $q_2\ne0$ достаточно воспользоваться замечанием относительно $\delta_i^{(s)}(x,t,q_1,q_2)$, связанным с доказательством теоремы 3. Второе неравенство в (20) следует из (19) и первого неравенства (20) после соответствующей подстановки в интегральное тождество.

Определим функцию $\omega_1(r)$ при $r\in R^1$ равенством $\omega_1(r)=\omega(r/2)[1-\omega(4r)]$, где $\omega(r)$ - та же функция, что и в (13).

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия* A1), A2), *и пусть* h,ρ *– произвольные положительные числа такие, что* $4d_i^{(s)} \le \rho,\ 8\rho^2 \le h \le 1/2$. *Тогда с некоторой зависящей лишь от* $n,\nu,\mu,,T,L$ *постоянной* K_4 *справедлива оценка*

$$\| v_i^{(s)}(x,t,q)\omega_1(|x-x_i^{(s)}|/\rho)\zeta(t)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)} \le K_4\,|q|^2\ h(d_i^{(s)}/\rho)^{n-2}[d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{21}$$

где $\zeta(t)$ *– произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы* 4.

Доказательство теоремы 5 см. в работе [4].

3. Обобщение асимптотического разложения. Предложим аналог асимптотического разложения работы [4], связанный с гладкой аппроксимацией предельной функции $u_0(x,t)$ и использованный далее при выводе усредненной задачи.

Пусть $u_m^{(0)}(x,t)$ – последовательность функций из $C^\infty(\overline{Q})$ такая, что

$$\begin{gathered} u_m^{(0)}(x,t) \equiv 0 \text{ при } t<0,\ |u_m^{(0)}(x,t)| \le M \text{ при } (x,t)\in\overline{Q}, \\ \delta_m = \| u_m^{(0)}(x,t) - u_0(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)} \to 0 \text{ при } m\to\infty. \end{gathered} \tag{22}$$

Для заданной пары значений (i,s) таких, что $i\in I''(s),\ s=1,2,\ldots$, в соответствии с введенным в предыдущем пункте разбиением отрезка $[0,T']$ точками $t_{i,k}^{(s)},\ k=1,\ldots,K(i,s)$, определим при $t\in R^1$ бесконечно дифференцируемые функции $g_{i,k}^{(s)}(t),\ k=1,\ldots,K(i,s)$, $\overline{g}_{i,l}^{(s)}(t),\ l=0,1,\ldots,K(i,s)$, удовлетворяющие условиям:

1) носители функций $g_{i,k}^{(s)}(t), \overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)$ содержатся соответственно в интервалах $(t_{i,k-1}^{(s)}+\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2, t_{i,k}^{(s)}-\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2)$, $(t_{i,l}^{(s)}-2\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2, t_{i,l}^{(s)}+2\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2)$; значения этих функций принадлежат сегменту $[0,1]$;

2) при $t\in[0,T']$ выполнено тождество

$$\sum_{k=1}^{K(i,s)} g_{i,k}^{(s)}(t) + \sum_{l=0}^{K(i,s)} \overline{g}_{i,l}^{(s)}(t) \equiv 1; \tag{23}$$

3) при всех $i\in I''(s),\ s=1,2,\ldots,\ k=1,\ldots,K(i,s),\ l=0,1,\ldots,K(i,s),\ t\in R^1$ справедливы неравенства

$$|dg_{i,k}^{(s)}(t)/dt| \le 2\lambda_s^{-1}[\rho_i^{(s)}]^{-2},\ \ |d\overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)/dt| \le 2\lambda_s^{-1}[\rho_i^{(s)}]^{-2}.$$

Для пары значений (i,s) таких, что $i\in I'(s),\ s=1,2,\ldots$, разделим отрезок $[0,T']$ на $R(i,s)$ отрезков равной длины точками $\tilde{t}_{i,r}^{(s)},\ r=0,1,\ldots,R(i,s)$, так, чтобы $\tilde{t}_{i,0}^{(s)}=0,\ \tilde{t}_{i,R(i,s)}^{(s)}=T'$, $[d_i^{(s)}]^2/2 \le \tilde{t}_{i,r}^{(s)} - \tilde{t}_{i,r-1}^{(s)} \le [d_i^{(s)}]^2$. Определим при $t\in R^1$ бесконечно дифференцируемые функции $\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t),\ r=0,1,\ldots,R(i,s)$, удовлетворяющие условиям:

1) носитель функции $\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)$ содержится в интервале $(\tilde{t}_{i,r}^{(s)}-[d_i^{(s)}]^2,\ \tilde{t}_{i,r}^{(s)}+[d_i^{(s)}]^2)$, значения этой функции принадлежат отрезку $[0,1]$;

2) при $t\in[0,T']$ выполняется тождество $\sum_{r=0}^{R(i,s)} \tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t) \equiv 1$;

3) при всех $i \in I'(s),\ s = 1,2,...,\ r = 0,1,...,R(i,s),\ t \in R^1$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{d\widetilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)}{dt} \right| \leq 2[d_i^{(s)}]^{-2}.$$

Определим еще срезывающие функции $\varphi_i^{(s)}(x),\ i = 1,...,I(s)$, $\psi_i^{(s)}(x),\ i \in I''(s),\ s = 1,2,...,$ равенствами $\varphi_i^{(s)}(x) = \omega(|x - x_i^{(s)}|/(2\rho_i^{(s)})),\ \psi_i^{(s)}(x) = \omega(|x - x_i^{(s)}|/(2\sqrt{\lambda_s}\rho_i^{(s)}))$, где $\omega(r)$ – такая же функция, что и в (12).

Обозначим через $Q_{i,k}^{(s)}, \overline{Q}_{i,l}^{(s)}, \widetilde{Q}_{i,r}^{(s)}$, соответственно цилиндры $B(x_{i,}^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k}^{(s)}),$ $B(x_i^{(s)},\ 2\sqrt{\lambda_s}\rho_i^{(s)}) \times \quad \times [t_{i,l}^{(s)} - 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2,\ t_{i,l}^{(s)} + 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2]$, $B(x_i^{(s)},\ 2d_i^{(s)}) \times [\widetilde{t}_{i,r}^{(s)} - 2(d_i^{(s)})^2, \quad \widetilde{t}_{i,r}^{(s)} + 2(d_i^{(s)})^2]$. И пусть для произвольного цилиндра Q' и интегрируемой функции $g(x,t)$

$$M[g,Q'] = \frac{1}{\mathrm{mes}Q'} \iint_{Q'} g(x,t)\,dxdt$$

– среднее значение $g(x,t)$ по Q'.

Определим $u_{ikm}^{(s)} = M[u_m^{(0)}, Q_{i,k}^{(s)}]$, $\overline{u}_{ilm}^{(s)} = M[u_m^{(0)}, \overline{Q}_{i,l}^{(s)}]$, $\widetilde{u}_{irm}^{(s)} = M[u_m^{(0)}, \widetilde{Q}_{i,r}^{(s)}]$, $f_{ik}^{(s)} = M[f, Q_{i,k}^{(s)}]$, $\bar{f}_{il}^{(s)} = M[f, \overline{Q}_{i,l}^{(s)}]$, $\widetilde{f}_{ir}^{(s)} = M[f, \widetilde{Q}_{i,r}^{(s)}]$, где $\{u_m^{(0)}(x,t)\}$ – последовательность, удовлетворяющая условиям (22), $f(x,t)$ – функция из граничного условия (2).

Введенные обозначения позволяют определить следующий аналог асимптотического разложения:

$$u_s(x,t) = u_m^{(0)}(x,t) + r_{sm}(x,t) + \sum_{j=1}^{5} r_{sm}^{(j)}(x,t) + w_{sm}(x,t), \tag{24}$$

где

$$r_{sm}(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} v_i^{(s)}(x,t, f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)})\, g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(1)}(x,t) = \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} v_i^{(s)}(x,t, \widetilde{f}_{ir}^{(s)} - \widetilde{u}_{irm}^{(s)})\, \widetilde{g}_{i,r}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(2)}(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{l=0}^{K(i,s)} v_i^{(s)}(x,t, \bar{f}_{il}^{(s)} - \overline{u}_{ilm}^{(s)})\, \overline{g}_{i,l}^{(s)}(t) \psi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(3)}(x,t) = \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} \{[\widetilde{u}_{irm}^{(s)} - u_m^{(0)}(x,t)] + [f(x,t) - \widetilde{f}_{ir}^{(s)}]\}\, \widetilde{g}_{i,r}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(4)}(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \{[u_{ikm}^{(s)} - u_m^{(0)}(x,t)] + [f(x,t) - f_{ik}^{(s)}]\}\, g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(5)}(x,t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{l=0}^{K(i,s)} \{[\overline{u}_{ilm}^{(s)} - u_m^{(0)}(x,t)] + [f(x,t) - \bar{f}_{il}^{(s)}]\}\, \overline{g}_{i,l}^{(s)}(t) \psi_i^{(s)}(x).$$

Здесь $v_i^{(s)}(x,t,q)$ – определенное выше решение задачи (12)–(14); $w_{sm}(x,t)$ – остаточный член разложения, определенного равенством (24).

Изучение поведения членов разложения (24) проводится аналогично работе [4], а отличия, вызванные заменой $u_0(x,t)$ на $u_m^{(0)}(x,t)$, возникают только при оценке $w_{sm}(x,t)$.

В дальнейшем через $\gamma_s^{(j)}$, $j=1,2,...$, обозначаем числовые последовательности, стремящиеся к нулю при $s\to\infty$, через C_j, $j=1,2,...$, – постоянные, зависящие лишь от n,ν,μ, $T,N,M,C_0,\text{mes}\Omega$.

Лемма 1. *Предположим выполнение условий* A_1), A_2), B_1), B_2), F). *Тогда при* $m=1,2,...,\ s=1,2,...$ *имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{5}\{\| r_{sm}^{(j)}(x,t)\|_{V_2(Q_T)}+\| r_{sm}^{(j)}(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\}\le\gamma_s^{(1)}, \tag{25}$$

$$\| r_{sm}(x,t)\|_{V_2(Q_T)}+\| r_{sm}(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\le C_1, \tag{26}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in R'}\int_{\Omega}| r_{sm}(x,t)|^2\,dx+\iint_{Q}\left|\frac{\partial r_{sm}(x,t)}{\partial x}\right|^p dxdt+ \tag{27}$$

$$+\operatorname*{ess\,sup}_{h>0}\iint_{Q}\left|\frac{r_{sm}(x,t+h)-r_{sm}(x,t)}{\sqrt{h}}\right|^p dxdt\le\gamma_s^{(2)}$$

для $p\in(1,2)$.

Доказательство аналогично доказательству лемм 3, 4, 6 в [4].

Далее, $\eta(t)$ – произвольная функция из $C^1(R^1)$ такая, что

$$\begin{gathered}0\le\eta(t)\le1,\ |d\eta(t)/dt|\le2 \text{ при } t\in R^1,\\ \eta(t)\equiv0 \text{ при } t\notin[-T,T'].\end{gathered} \tag{28}$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* A_1), A_2), B_1), B_2), F). *Тогда для определенного равенством* (24) *остаточного члена разложения справедлива оценка*

$$\| w_{sm}(x,t)\eta(t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\le C_2\{\gamma_s^{(3)}+\delta_m^{1/2}\}, \tag{29}$$

где $\eta(t)$ *– функция из* $C^1(R^1)$*, удовлетворяющая условиям* (28).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 в [4]. Отметим только, что в доказательстве леммы 9 из [4] нужно полагать $\psi_s(x,t)\equiv\psi_s^{(1)}(x,t)$.

4. Разложение, соответствующее пробной функции. Пусть $h(x,t)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(Q)$ и определим при $s=1,2,...,\ m=1,2,...$

$$h_{sm}(x,t)=h(x,t)-\rho_{sm}^{(1)}(x,t)-\rho_{sm}^{(2)}(x,t)-\sum_{j=1}^{5}\rho_s^{(3,j)}(x,t), \tag{30}$$

где

$$\rho_{sm}^{(1)}(x,t)=\sum_{(i,k)\in J'_{sm}}v_i^{(s)}(x,t,f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)})\frac{h_{ikm}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}}g_{i,k}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_{sm}^{(2)}(x,t)=\sum_{(i,k)\in J''_{sm}}v_i^{(s)}(x,t,1)h_{ik}^{(s)}g_{i,k}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,1)}(x,t)=\sum_{i\in I'(s)}\sum_{r=0}^{R(i,s)} v_i^{(s)}(x,t,1)\widetilde{h}_{ir}^{(s)}\widetilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,2)}(x,t)=\sum_{i\in I''(s)}\sum_{l=0}^{K(i,s)} v_i^{(s)}(x,t,1)\overline{h}_{il}^{(s)}\overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)\psi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,3)}(x,t)=\sum_{i\in I'(s)}\sum_{r=0}^{R(i,s)} [h(x,t)-\widetilde{h}_{ir}^{(s)}]\widetilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,4)}(x,t)=\sum_{i\in I''(s)}\sum_{k=1}^{K(i,s)} [h(x,t)-h_{ik}^{(s)}]g_{i,k}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,5)}(x,t)=\sum_{i\in I''(s)}\sum_{l=0}^{K(i,s)} [h(x,t)-\overline{h}_{il}^{(s)}]\overline{g}_{i,l}^{(s)}(t)\psi_i^{(s)}(x).$$

Здесь используются введенные выше обозначения для множеств индексов, функций и средних значений. Кроме того, $h_{ik}^{(s)}=M[h,Q_{i,k}^{(s)}]$, $\overline{h}_{il}^{(s)}=M[h,\overline{Q}_{i,l}^{(s)}]$, $\widetilde{h}_{ir}^{(s)}=M[h,\widetilde{Q}_{i,r}^{(s)}]$ и $J'_{sm}=\{(i,k):$ $i\in I''(s), k=1,...,K(i,s): |f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}|\geq d_i^{(s)}\}$, $J''_{sm}=\{(i,k): i\in I''(s), k=1,...,K(i,s): |f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}|<d_i^{(s)}\}$.

Далее, как и в предыдущем пункте, через $C_j,\gamma_s^{(j)}$ обозначим соответственно постоянные, зависящие лишь от известных параметров, и последовательности, стремящиеся к нулю при $s\to\infty$.

Лемма 2. *При выполнении условий* A$_1$), A$_2$), B$_1$), B$_2$) *справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2}\|\rho_{sm}^{(j)}(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\leq C_3\|h\|_{C(Q)}. \tag{31}$$

Доказательство. Из теоремы 4 имеем

$$\|v_i^{(s)}(x,t,q)g_{i,k}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)}\leq C_4|q|^2[\rho_i^{(s)}]^2[d_i^{(s)}]^{n-2} \tag{32}$$

при произвольном $q\in R^1$. Отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^{2}\|\rho_{sm}^{(j)}(x,t)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)}\leq C_5\|h\|^2_{C(Q)}\sum_{i\in I''(s)}[d_i^{(s)}]^{n-2}$$

и неравенство (31) следует из (11).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* A$_1$), A$_2$), B$_1$), B$_2$). *Тогда для любого* $p\in(1,2)$ *при* $j=1,2$ *имеют место оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in R^1}\int_\Omega|\rho_{sm}^{(j)}(x,t)|^2\,dx\leq\gamma_s^{(4)}\|h\|^2_{C(Q)},$$

$$\begin{gathered}\iint_Q\left|\frac{\partial\rho_{sm}^{(j)}(x,t)}{\partial x}\right|^p dxdt+\\+\operatorname*{ess\,sup}_{\tau>0}\iint_Q\left|\frac{\rho_{sm}^{(j)}(x,t+\tau)-\rho_{sm}^{(j)}(x,t)}{\sqrt{\tau}}\right|^p dxdt\leq[\gamma_s^{(4)}]^{2-p}\|h\|^p_{C(Q)}.\end{gathered} \tag{33}$$

Доказательство. Оценим вначале второй интеграл в (33). Из определения функций $\varphi_i^{(s)}(x)$ и неравенства Гельдера имеем

$$\iint_Q \left|\frac{\partial \rho_{sm}^{(j)}(x,t)}{\partial x}\right|^p dxdt \le C_6 \left\{\sum_{i\in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^n\right\}^{1-p/2} \left\{\iint_Q \left|\frac{\partial \rho_{sm}^{(j)}(x,t)}{\partial x}\right|^p dxdt\right\}^{p/2},$$

далее нужно воспользоваться (11) и (31). Аналогично оценивается третий интеграл в (33).

Для получения первой оценки в (33) воспользуемся неравенством

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in R^1} \int_\Omega |v_i^{(s)}(x,t,q) g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x)|^2 \, dx \le C_7 |q|^2 [\rho_i^{(s)}]^2 [d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{34}$$

следующим из оценки (19). Имеем, например, при $j=2$

$$\int_\Omega |\rho_{sm}^{(2)}(x,t)|^2 \, dx \le C_8 \|h\|_{C(Q)}^2 \sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int_\Omega |v_i^{(s)}(x,t,1) g_{i,k}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x)|^2 \, dx \le$$

$$\le C_9 \|h\|_{C(Q)}^2 \sum_{i\in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^2 [d_i^{(s)}]^{n-2},$$

далее правая часть стремится к нулю в силу (11). При получении последнего неравенства воспользовались тем, что при каждом $t_0 \in R^1$ и $i \in I''(s)$ среди чисел $g_{i,1}^{(s)}(t_0),\dots,g_{i,K(i,s)}^{(s)}(t_0)$ – не более одного отличного от нуля. Таким же точно образом доказывается первая оценка в (33) при $j=1$.

Лемма 4. *При выполнении условий* A_1), A_2), B_1), B_2) имеет место оценка

$$\sum_{j=1}^{5} \|\rho_{sm}^{(3,j)}(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)} \le \gamma_s^{(5)} \|h\|_{C(Q)}. \tag{35}$$

Для доказательства достаточно заметить, что при $j=1,\dots,5$, представления функций $\rho_s^{(3,j)}(x,t)$ аналогичны представлениям функций $r_{sm}^{(j)}(x,t)$ из разложения (24). Так что доказательство (35) полностью совпадает с доказательством (25).

5. Вывод предельного уравнения. Из лемм 2–4, разложения (36), определения вспомогательных функций $v_i^{(s)}(x,t,q)$ и срезывающих функций $g_{i,k}^{(s)}(t), \varphi_i^{(s)}(x)$ непосредственно следует

$$h_{sm}(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)}) \cap W_2^{1,1/2}(Q), \quad s,m = 1,2,\dots, \tag{36}$$

что делает возможным подстановку этой функции вместо $\psi(x,t)$ в интегральное тождество (9). После такой подстановки получаем

$$J_s[h] - J_s[\rho_{sm}^{(1)}] - J_s[\rho_{sm}^{(2)}] - \sum_{j=1}^{5} J_s[\rho_s^{(3,j)}] = 0, \tag{37}$$

где $J_s[\psi]$ понимается в соответствии с равенством (9).

Из теоремы 1 следует возможность предельного перехода при $s\to\infty$ в $J_s[h]$, так что имеем

$$J_s[h] = \sqrt{-1} \int_{R^1} \int_\Omega \alpha [F(u_0\eta)](x,\alpha) \overline{[Fh](x,\alpha)} dx d\alpha +$$

$$+\iint\limits_{Q_T}\left\{u_0(x,t)h(x,t)\frac{d\eta(t)}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\eta(t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+a_0\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\eta(t)h(x,t)\right\}dxdt+\gamma_s^{(6)}\,\|h\|_{C^1(Q)}. \tag{38}$$

Будем считать далее, что $|d\eta(t)/dt\le 2|$ при $t\in R^1$.

Так же просто можно совершить предельный переход в $J_s[\rho_s^{(3,j)}]$, $j=1,...,5$. Используя теорему 1 и лемму 4, получаем

$$\sum_{j=1}^{5}|J_s[\rho_s^{(3,j)}]|\le\gamma_s^{(7)}\,\|h\|_{C(Q)}. \tag{39}$$

Рассмотрим

$$J_s[\rho_{sm}^{(1)}]=J_{sm}^{(1)}+J_{sm}^{(2)}+J_{sm}^{(3)}, \tag{40}$$

$$J_{sm}^{(1)}=\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(u_s\eta)](x,\alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x,\alpha)}dxd\alpha,$$

$$J_{sm}^{(2)}=\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\left\{u_s(x,t)\frac{d\eta(t)}{dt}-a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\right\}\rho_{sm}^{(1)}(x,t)dxdt,$$

$$J_{sm}^{(3)}=-\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\frac{\partial\rho_{sm}^{(1)}(x,t)}{\partial x_j}dxdt.$$

Из теоремы 1 и леммы 3 следует оценка

$$J_{sm}^{(2)}\le\gamma_s^{(8)}\,\|h\|_{C(Q)}. \tag{41}$$

Оценим далее $J_{sm}^{(1)}$, используя разложение (24):

$$J_{sm}^{(1)}=\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(u_m^{(0)}\eta)](x,\alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x,\alpha)}\,dxd\alpha+$$

$$+\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(r_{sm}\eta)](x,\alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x,\alpha)}\,dxd\alpha+$$

$$+\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha\left[F\left(\sum_{j=1}^{5}r_{sm}^{(j)}+w_{sm}\right)\eta\right](x,\alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x,\alpha)}\,dxd\alpha. \tag{42}$$

Для первого слагаемого правой части (42), обозначаемого далее через $J_{sm}^{(1,1)}$, используя (22), (31), (33), имеем оценку

$$|J_{sm}^{(1,1)}|\le C_{10}\{\delta_m+\tau_{sm}\}\|h\|_{C(Q)}, \tag{43}$$

где τ_{sm} – ограниченная последовательность такая, что $\lim\limits_{s\to\infty}\tau_{sm}=0$ при каждом m.

Для третьего слагаемого правой части (42), обозначаемого через $J_{sm}^{(1,3)}$, оценка

$$|J_{sm}^{(1,3)}|\le\gamma_s^{(9)}\|h\|_{C(Q)}, \tag{44}$$

следует из (25), (29), (31).

Далее оценим второе слагаемое в правой части (42). Вводя усреднение по t и используя равенство Парсеваля, имеем

$$J_{sm}^{(1,2)} = \lim_{\tau\to 0}\left\{\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}} \alpha[F[r_{sm}]_{(\tau)}\eta](x,\alpha)\overline{[F[\rho_{sm}^{(1)}]_{(\tau)}](x,\alpha)}\,dxd\alpha\right\} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}} \frac{\partial}{\partial t}\{[r_{sm}]_{(\tau)}\eta(t)\}[\rho_{sm}^{(1)}]_{(\tau)}\,dxdt; \tag{45}$$

здесь $[\rho_{sm}^{(1)}]_{(\tau)} = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_t^{t+\tau} \rho_{sm}^{(1)}(x,\theta)d\theta$ и аналогично понимается $[r_{sm}]_{(\tau)}$.

Продолжая равенство (45), получим из (24), (30)

$$J_{sm}^{(1,2)} = \frac{1}{2}\sum_{(i,k)\in J'_{sm}} \frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}} [v_i^{(s)}(x,t,f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)})]^2 \times$$

$$\times [g_{i,k}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x)]^2 \frac{d\eta(t)}{dt}dxdt.$$

Оценивая далее на основании неравенства (19), имеем в силу (11)

$$|J_{sm}^{(1,2)}| \le C_{11}\sum_{i\in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{n-1}\rho_i^{(s)}\|h\|_{C(Q)} \le \gamma_s^{(10)}\|h\|_{C(Q)}.$$

Тем самым получаем оценку

$$|J_{sm}^{(1)}| \le C_{12}\{\delta_m + \gamma_s^{(11)} + \tau_{sm}\}\|h\|_{C(Q)}. \tag{46}$$

Займемся сейчас изучением поведения $J_{sm}^{(3)}$, представляя $J_{sm}^{(3)}$ в виде

$$J_{sm}^{(3)} = J_{sm}^{(3,1)} + J_{sm}^{(3,2)} + J_{sm}^{(3,3)} + J_{sm}^{(3,4)}, \tag{47}$$

$$J_{sm}^{(3,1)} = -\iint_{Q_T^{(s)}} \eta(t)\sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x,t,u_s\frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x,t,u_s\frac{\partial(u_0 + r_{sm})}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial\rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j}dxdt,$$

$$J_{sm}^{(3,2)} = -\iint_{Q_T^{(s)}} \eta(t)\sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x,t,u_s\frac{\partial(u_0 + r_{sm})}{\partial x}\right) - a_j\left(x,t,u_s\frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial\rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j}dxdt,$$

$$J_{sm}^{(3,3)} = -\iint_{Q_T^{(s)}} \eta(t)\sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x,t,u_s\frac{\partial r_{sm})}{\partial x}\right) - a_j\left(x,t,0,\frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial\rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j}dxdt,$$

$$J_{sm}^{(3,4)} = -\iint_{Q_T^{(s)}} \eta(t)\sum_{j=1}^n a_j\left(x,t,0,\frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\right)\frac{\partial\rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j}dxdt.$$

Используя условие A_2), неравенства (25), (29), (31), получаем оценку

$$|J_{sm}^{(3,1)}| \le C_{13}\{\delta_m + \gamma_s^{(12)}\}\|h\|_{C(Q)}. \tag{48}$$

Из представления для $\rho_{sm}^{(1)}(x,t)$ и второго равенства в (11) следует

$$|J_{sm}^{(3,2)}| + |J_{sm}^{(3,3)}| \le \gamma_s^{(13)}\}\|h\|_{C(Q)}. \tag{49}$$

Преобразуем последнее слагаемое в правой части (47), подставляя значения $r_{sm}(x,t)$, $\rho_{sm}^{(1)}(x,t)$:

$$J_{sm}^{(3,4)} = J_{sm}^{(3,5)} + J_{sm}^{(3,6)} + J_{sm}^{(3,7)}, \tag{50}$$

$$J_{sm}^{(3,5)}=-\sum_{i\in I''(s)}\sum_{k=1}^{K(i,s)}\frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}}\iint_{Q_{i,k}^{(s)}}\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j}\eta(t)\,dxdt,$$

$$J_{sm}^{(3,6)}=\sum_{(i,k)\in J'_{sm}}\frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}}\iint_{Q_{i,k}^{(s)}}\sum_{j=1}^{n}\left\{a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j}-\right.$$

$$\left.-a_j\left(x,t,0,\frac{\partial}{\partial x}[v_{ikm}^{(s)}g_{i,k}^{(s)}\varphi_i^{(s)}]\right)\frac{\partial}{\partial x_j}[v_{ikm}^{(s)}g_{i,k}^{(s)}\varphi_i^{(s)}]\right\}\eta(t)\,dxdt,$$

$$J_{sm}^{(3,7)}=\sum_{(i,k)\in J''_{sm}}\frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}}\int_{Q_{ik}^{(s)}}\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j}\eta(t)\,dxdt.$$

Здесь как и в (15) $Q_{i,k}^{(s)}=B(x_i^{(s)},2\rho_i^{(s)})\times[t_{i,k-1}^{(s)},t_{i,k}^{(s)}]$. $v_{ikm}^{(s)}=v_i^{(s)}(x,t,f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)})$. Вспоминая определение функций $g_{i,k}^{(s)}(t),\varphi_i^{(s)}(x)$ и используя оценки (19)–(21), получим

$$|J_{sm}^{(3,6)}|\le\sum_{(i,k)\in J'_{sm}}\frac{|h_{ik}^{(s)}|}{|f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}|}\iint_{Q_{i,k}^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}[v_{ikm}^{(s)}\varphi_i^{(s)}]\right|^2\{\chi_{ik}^{(s,1)}(x,t)+$$

$$+\chi_{ik}^{(s,2)}(x,t)\}\,dxdt\le C_{14}\sum_{(i,k)\in J'_{sm}}[d_i^{(s)}]^{n-2}\{\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2+d_i^{(s)}\rho_i^{(s)}+$$

$$\left.+[\rho_i^{(s)}]^2\left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right]^{n-2}\right\}\|h\|_{C(Q)}\le C_{15}\|h\|_{C(Q)}\sum_{i\in I''(s)}\{\lambda_s+\lambda_s^{n-2}\}[d_i^{(s)}]^{n-2}.$$

Здесь $\chi_{ik}^{(s,1)}(x,t),\chi_{ik}^{(s,2)}(x,t)$ – соответственно характеристические функции множеств $B(x_i^{(s)},2\rho_i^{(s)})\times$ $\times\{[t_{i,k-1}^{(s)},t_{i,k-1}^{(s)}+2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2]\cup[t_{i,k}^{(s)}-2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2,t_{i,k}^{(s)}]\}$, $\{B(x_i^{(s)},2\rho_i^{(s)})\setminus B(x_i^{(s)},\rho_i^{(s)})\}\times[t_{i,k-1}^{(s)},t_{i,k}^{(s)}]$. Из неравенства (11) и определения λ_s следует оценка

$$|J_{sm}^{(3,6)}|\le\gamma_s^{(14)}\|h\|_{C(Q)}. \tag{51}$$

Таким же образом оценивается $J_{sm}^{(3,7)}$:

$$|J_{sm}^{(3,7)}|\le\gamma_s^{(15)}\|h\|_{C(Q)}. \tag{52}$$

Достаточно воспользоваться неравенством (20) и определением множества индексов J''_{sm}.

Осталось установить поведение $J_{sm}^{(3,5)}$ при $s,m\to\infty$. Для этого понадобятся дополнительные построения. Зафиксируем число m и определим $d=d(m)>0$ так, чтобы колебание каждой из функций $u_m^{(0)}(x,t),f(x,t),h(x,t),\eta(t)$ не превосходило $1/m$ на любом множестве $E\subset Q_T$, диаметр которого меньше $2d$. Представим $\overline{Q}_T$ в виде объединения непересекающихся подмножеств E_l, $l=1,2,...,L(m)$, с кусочно-гладкими границами так, чтобы диаметр каждого из множеств E_l был меньше d. Выберем $s_1=s_1(m)$ так, чтобы при $s\ge s_1$ для $i\in I''(s)$, $k=1,...,K(i,s)$ диаметр множества $Q_{i,k}^{(s)}$ был меньше d.

Обозначим через $I_s(E_l)$ множество пар (i,k) таких, что $i\in I''(s),k=1,...,K(i,s)$ и $(x_i^{(s)},t_{i,k}^{(s)})\in E_l$. Определим средние значения

$$u_{lm}^{(0)} = \frac{1}{\operatorname{mes} E_l} \iint_{E_l} u_m^{(0)}(x,t)\,dxdt,$$

$$f_l = \frac{1}{\operatorname{mes} E_l} \iint_{E_l} f(x,t)\,dxdt, \ h_l = \frac{1}{\operatorname{mes} E_l} \iint_{E_l} h(x,t)\,dxdt. \tag{53}$$

Представим $J_{sm}^{(3,5)}$ в следующем виде

$$J_{sm}^{(3,5)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \frac{h_l \eta(\theta_l^{(s)})}{f_l - u_{lm}^{(0)}} \times$$

$$\times \sum_{(i,k)\in I_s(E_l)} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x_j} dxdt + R_{sm}^{(1)},$$

где $v_{ilm}^{(s)} = v_i^{(s)}(x,t,f_l - u_{lm}^{(0)})$ и

$$R_{sm}^{(1)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \sum_{(i,k)\in I_s(E_l)} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \eta(t) a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j} dxdt - \frac{h_l}{f_l - u_{lm}^{(s)}} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \eta(t) a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x_j} dxdt \right\},$$

где $\theta_l^{(s)}$ – некоторая точка из интервала $[0,T]$.

Используя неравенства (20), (21), получим при $s \ge s_1$ оценку

$$| R_{sm}^{(1)} | \le C_{16}\{1/m + \gamma_s^{(16)}\} \| h \|_{C(Q)}. \tag{54}$$

Выберем, далее, по зафиксированному разбиению $\{E_l\}$ цилиндра Q_T число $s_2 = s_2(m)$ так, чтобы для $|q| \le M$ при $s \ge s_2$, $l = 1,...,L(m)$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{(i,k)\in I_s(E_l)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x_j} dxdt - \right.$$

$$\left. - \iint_{E_l} c(x,t,q)\,dxdt \right| < \frac{1}{mL(m)} \tag{55}$$

(это можно обеспечить в силу предполагаемого сейчас условия С)).

Подставим $J_{sm}^{(3,5)}$ в виде

$$R_{sm}^{(3,5)} = -\iint_{Q_T} c(x,t,f(x,t) - u_0(x,t))\eta(t)h(x,t)\,dxdt + R_{sm}^{(1)} + R_m^{(2)} + R_{sm}^{(3)} + R_{sm}^{(4)}, \tag{56}$$

$$R_m^{(2)} = -\iint_{Q_T} [c(x,t,f(x,t) - u_m^{(0)}(x,t)) - c(x,t,f(x,t) - u_0(x,t))]\eta(t)h(x,t)\,dxdt,$$

$$R_{sm}^{(3)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \left\{ \frac{h_l \eta(\theta_l^{(s)})}{f_l - u_{lm}^{(0)}} \sum_{(i,k)\in I_s(E_l)} \sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x_j} dxdt - h_l \eta(\theta_l^{(s)}) \iint_{E_l} c(x,t,f_l - u_{lm}^{(0)})\,dxdt \right\},$$

$$R_{sm}^{(4)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \left\{ h_l \eta(\theta_l^{(s)}) \iint_{E_l} c(x,t,f_l - u_{lm}^{(0)}) dxdt - \right.$$

$$\left. - \iint_{E_l} c(x,t,f(x,t) - u_m^{(0)}(x,t)) \eta(t) h(x,t) dxdt \right\}.$$

Из (55) следует оценка

$$| R_{sm}^{(3)} | \leq (1/m) C_{17} \| h \|_{C(Q)} \text{ при } s > s_2(m). \tag{57}$$

Из непрерывности функции $c(x,t,q)$ получаем

$$| R_m^{(2)} | + | R_{sm}^{(4)} | \leq \nu_m \| h \|_{C(Q)}, \tag{58}$$

где $\nu_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Окончательно из (40), (41), (46)–(52), (56)–(58) имеем

$$| J_s[\rho_{sm}^{(1)}] + \iint_{Q_T} c(x,t,f(x,t) - u_0(x,t)) \eta(t) h(x,t) dxdt | \leq$$

$$\leq C_{18} \{ \gamma_s^{(17)} + 1/m + \nu_m + \delta_m + \tau_{sm} \} \| h \|_{C(Q)}. \tag{59}$$

Для оценки $J_s[\rho_{sm}^{(2)}]$ достаточно провести рассуждения, подобные тем, которые велись при оценке $J_s[\rho_{sm}^{(1)}]$. Так, нужно записать представления вида (40), (42), (47), заменяя $\rho_{sm}^{(1)}(x,t)$ на $\rho_{sm}^{(2)}(x,t)$. Эта замена не изменяет получение оценок возникающих интегралов, аналогичных $J_{sm}^{(2)}, J_{sm}^{(1,1)}, J_{sm}^{(1,3)}, J_{sm}^{(3,1)}, J_{sm}^{(3,2)}, J_{sm}^{(3,3)}$. Что же касается оценки выражений типа $J_{sm}^{(1,2)}, J_{sm}^{(3,4)}$, то достаточно заметить, что соответствующие интегралы сохраняют свое значение при замене $r_{sm}(x,t)$ на

$$r''_{sm}(x,t) = \sum_{(i,k) \in J''_{sm}} v_i^{(s)}(x,t,f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}) g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x).$$

Например,

$$\iint_{Q_T^{(s)}} \eta(t) \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x,t,0, \frac{\partial r_{sm}}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho_{sm}^{(2)}}{\partial x_j} dxdt =$$

$$= \iint_{Q_T^{(s)}} \eta(t) \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x,t,0, \frac{\partial r''_{sm}}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho_{sm}^{(2)}}{\partial x_j} dxdt, \tag{60}$$

что следует из представлений $r_{sm}(x,t), \rho_{sm}^{(2)}(x,t)$ и свойств функций $g_{i,k}^{(s)}(t), \varphi_i^{(s)}(x)$.

Наконец, получим оценку

$$\| r''_{sm}(x,t) \|_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leq \gamma_s^{(18)}. \tag{61}$$

В самом деле, из неравенства (32) и определения множества J''_{sm} имеем

$$\| r''_{sm}(x,t) \|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leq C_{19} \sum_{(i,k) \in J''_{sm}} [\rho_i^{(s)}]^2 [d_i^{(s)}]^n \leq C_{20} \sum_{i \in I''(s)} [d_i^{(s)}]^n.$$

Далее неравенство (61) следует из (11).

Из (60), (61) и леммы 2 получаем, что левая часть (60) оценивается через $\gamma_s^{(19)} \| h \|_{C(Q)}$. Подобным же образом оценивается интеграл, получаемый из второго интеграла правой части (42) заменой $\rho_{sm}^{(1)}$ на $\rho_{sm}^{(2)}$.

Окончательно указанные рассуждения приводят к оценке

$$| J_s[\rho_{sm}^{(2)}] | \le C_{21} \{\gamma_s^{(19)} + \delta_m + \tau_{sm}^{(1)}\} \| h \|_{C(Q)}, \tag{62}$$

где $\tau_{sm}^{(1)}$ обладает такими же свойствами, как τ_{sm} в (43).

Используя равенства (37), (38), оценки (39), (59), (62), имеем

$$| \sqrt{-1} \int_{R^1} \int_{\Omega} \alpha [F(u_0 \eta)](x,\alpha) \overline{[Fh](x,\alpha)} dx d\alpha +$$

$$+ \iint_{Q_T} \left\{ u_0(x,t) h(x,t) \frac{d\eta(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \eta(t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + [a_0(x,t,u_0, \partial u_0 / \partial x) + c(x,t,f - u_0)] \eta(t) h(x,t) dx dt \right. | \le$$

$$\le C_{22} \{\gamma_s^{(20)} + 1/m + \delta_m + \tau_{sm} + \tau_{sm}^{(1)} + \nu_m\} \| h \|_{C(Q)}. \tag{63}$$

Правая часть (63) может быть сколь угодно малой, если вначале сделать достаточно малым значение $1/m + \delta_m + \nu_m$ за счет выбора m, а затем при фиксированном m обеспечить малость $\gamma_s^{(20)} + \tau_{sm} + \tau_{sm}^{(1)}$ путем выбора s. Так как левая часть (63) от s,m не зависит, то получаем, что левая часть равна нулю, т.е. $u_0(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству, соответствующему задаче (16)–(18), что и завершает доказательство теоремы 2.

1. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев, 1974.
2. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problem. Leipzig, 1986.
3. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М., 1990.
4. *Скрыпник И.В.* // Укр. мат. журн. 1993. Т.45, № 11. С. 1542–1566.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
6. *Скрыпник И.В.* Нелинейные граничные задачи. 1991. Вып. 3. С. 72–86.

НОВЫЕ УСЛОВИЯ УСРЕДНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

*(Украинский математический журнал. – 1996. – **48**, № 5)*

Данная статья продолжает предыдущие работы автора [1–6], в которых рассматривалось усреднение нелинейных задач Дирихле в последовательности перфорированных областей. В настоящей работе рассмотрен случай более общих нелинейных эллиптических уравнений (допускается вырождение по градиентам решений) при новых структурных условиях на перфорированную область.

Пусть Ω – ограниченная область в R^n и при каждом натуральном числе s задано конечное семейство $\{F_i^{(s)} : i = 1, \dots, I(s)\}$ замкнутых непересекающихся множеств, содержащихся в Ω. В области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$ рассматривается нелинейная задача

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in \Omega^{(s)}, \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega^{(s)}, \tag{2}$$

где $f(x)$ – известная определенная в Ω функция.

Основой рассмотрения усреднения задач (1), (2) в [3] являлись поточечные оценки решений модельных нелинейных задач, доказанных раньше для невырожденного случая, соответствующего условиям на коэффициенты уравнения (1) вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u, p) p_j \ge \nu_1 (1 + |p|)^{m-2} |p|^2, \tag{3}$$

$$|a_j(x, u, p)| \le \nu_2 (1 + |p|)^{m-1} \tag{4}$$

при $|u| \le M$. Отметим, что доказательство поточечных оценок и, следовательно, результаты работ [1–6] остаются в силе (и даже упрощаются), если заменить правые части неравенств (3), (4) соответственно на $\nu_1 |p|^m$, $\nu_2 |p|^{m-1}$. Вместе с тем доказательство поточечной оценки требует изменения при замене условия (3) неравенством

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u, p) p_j \ge \nu_1 |p|^m \tag{5}$$

в сохранении условия (4).

В данной работе при условиях (4), (5) доказывается поточечная оценка модельной нелинейной задачи и на ее основе строится усреднение последовательности задач (1), (2). При этом имеется возможность рассмотрения различных вариантов условий на множества $F_i^{(s)}$. Ограничимся, для конкретности, случаем множеств $F_i^{(s)}$ малого диаметра и условий на них в терминах емкости.

В статье изменено построение основного асимптотического разложения, что позволило ввести новые структурные условия на семейство $\{F_i^{(s)} : i = 1, \dots, I(s)\}$. Условия выражаются терминах емкости $F_i^{(s)}$ и расстояний между содержащими их шарами, и нет содержащейся в [3] малости диаметров множеств относительно соответствующих расстояний. Отметим, что из конструкции поправочного члена усредненного уравнения непосредственно следует принцип аддитивности: если семейство $\{F_i^{(s)} : i = 1, \dots, I(s)\}$ представить произвольным образом как объединение двух подсемейств, то поправочный член, соответствующий всему семейству, равен сумме поправочных членов, соответствующих подсемейств.

Отметим работы [7, 8] для линейных уравнений, [9–14] для нелинейных уравнений, в которых задачи вида (1), (2) рассматривались в иных условиях. В частности, из конструкций усредненной задачи в [9–14] не следует отмеченный выше принцип аддитивности.

1. Формулировка условий и результатов. Будем предполагать, что функции $a_j(x, u, p),\ j = 0, 1, \dots, n$, определены при $x \in \overline{\Omega},\ u \in R^n,\ p \in R^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

A_1) функции $a_j(x, u, p)$ непрерывны по u, p при почти всех, $x \in \Omega$ измеримы по x при любых u, p; $a_j(x, u, 0) = 0$ при $x \in \Omega,\ u \in R^1,\ i = 1, \dots, n$;

A_2) существуют положительные числа $\nu_1, \nu_2, \varepsilon$ такие, что при $1 < m < n,\ 1 < m_1 < mn/(n-m)$, $0 < m_2 < m-1$ и всех значениях $x \in \overline{\Omega}, u \in R^1,\ p, q \in R^n$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} \, [a_j(x,u,p) - a_j(x,u,q)]\,(p_j - q_j) \ge \nu_1 \,|\, p - q\,|^m, \\
a_0(x,u,p)u \ge -(\nu_1 - \varepsilon)\,|\,p\,|^m - \varphi(x)(1 + |\,u\,|), \\
\sum_{j=1}^{n} \, |\,a_j(x,u,p) - a_j(x,u,q)\,| \le \nu_2 (1 + |\,u\,|^{m_1} + |\,p\,|^m + |\,q\,|^m)^{(m-1-m_2)/m} \,|\, p - q\,|^{m_2}, \\
|\,a_0(x,u,p)\,| \le \nu_2 (|\,u\,|^{m_1} + |\,p\,|^m)^{(m_1 - 1)/m_1} + \varphi(x),
\end{gathered} \tag{6}$$

где $\varphi(x) \in L_{r_1}$ с $r_1 > n/m$.

Отметим, что функции $a_j(x,u,p)$ можно продолжить на $\{R^n \setminus \Omega\} \times R^1 \times R^n$ с сохранением условий $A_1,\ A_2$.

Теорема 1. *При выполнении условий* $A_1,\ A_2$ *и* $f(x) \in W_m^1(\Omega)$ *задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u_s(x) \in f(x) + \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$. *Существует постоянная* R, *не зависящая от* s, *такая, что при всех* s *выполняется оценка*

$$\|\,u_s(x)\,\|_{W_m^1(\Omega^{(s)})} \le R. \tag{7}$$

Утверждение теоремы доказывается простым применением теории монотонных операторов (см. [3], § 1, гл. 9). Далее через $u_s(x)$ обозначается одно из возможных решений задачи (1), (2), удовлетворяющее оценке (7). Продолжим $u_s(x)$ на Ω, полагая $u_s(x) = f(x)$ при $x \in \Omega \setminus \Omega^{(s)}$. Таким образом, полученная функция $u_s(x)$ принадлежит $W_m^1(\Omega)$ и для нее справедлива оценка

$$\| u_s(x) \|_{W_m^1(\Omega)} \le R_1$$

с независящей от s постоянной R_1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2 *и* $f(x) \in W_m^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. *Тогда существует независящая от* s *постоянная* M *такая, что при всех* s *справедлива оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} \; | u_s(x) | \le M. \tag{8}$$

Утверждение теоремы доказывается методом Мозера (см. [13], гл. 9).

Перейдем к формулировке условий на множества $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $x_i^{(s)}$ – точка такая, что $F_i^{(s)} \subset \overline{B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})}$. Здесь и далее в $B(x_0, \rho)$ - шар радиуса ρ с центром в x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup_{j \ne i} B(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}) \cup \partial\Omega$.

Для компактного множества $F \subset R^n$ определим m-емкость равенством

$$C_m(F) = \inf \int_{R^n} \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|^m dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi(x) \in C_o^\infty(R^n)$, равным единице на F.

Относительно множеств $F_i^{(s)}$ будем полагать выполненными предположения:

B_1) справедливо равенство

$$\lim_{s \to \infty} (d_s + r_s) = 0,$$

где

$$d_s = \max\{d_1^{(s)}, \dots, d_{I(s)}^{(s)}\}, \quad r_s = \max\{r_1^{(s)}, \dots, r_{I(s)}^{(s)}\};$$

B_2) существуют положительная постоянная b_0, непрерывная неубывающая функция $b(t), b(0) = 0$, стремящаяся к нулю при $s \to \infty$ числовая последовательность R_s и подмножества индексов J_s, I_s такие, что справедливы условия:

$$\{i = 1, \dots, I(s)\} = J_s \cup I_s, \quad J_s \cap I_s = \varnothing;$$

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{i \in I_s} C_m(F_i^{(s)}) = 0. \tag{9}$$

$$\sum_{i \in I_s(B(x_0, R))} C_m(F_i^{(s)}) \le b_0 R^n \quad \text{при} \quad R \ge R_s, \tag{10}$$

$$C_m(F_i^{(s)}) \le b(r_s)[r_i^{(s)}]^{n-m}, \quad i \in I_s, \tag{11}$$

где x_0 – произвольная точка области Ω, $I_s(B(x_0,R)) = \{i \in I_s : x_i^{(s)} \in B(x_0,R)\}$.

Замечание 1. Условие B_2, в частности, выполняется, если справедливы неравенства

$$C_m(F_i^{(s)}) \le b_1 [r_i^{(s)} + d_i^{(s)}]^n, \quad d_i^{(s)} \le b_2 [r_i^{(s)}]^q$$

при $i = 1, \dots, I(s),\ q > (n-m)/n$ с независящими от i, s положительными постоянными b_1, b_2.

Для формулировки дополнительного условия на $F_i^{(s)}$, обеспечивающего возможность построения граничной задачи для $u_0(x)$, нам понадобятся вспомогательные функции $v_i^{(s)}(x,k)$, определяемые как решения модельных задач. Пусть $\psi(x)$ – функция класса $C_0^\infty(B(0,1))$, равная единице в $B(0,1/2)$. Для $k \in R^1$ при $d_i^{(s)} < 1/2$ обозначим через $v_i^{(s)}(x,k)$ решение уравнения

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u_i(x), \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in D_i^{(s)} = B(x_i^{(s)},1) \setminus F_i^{(s)}, \tag{12}$$

удовлетворяющее условию

$$v_i^{(s)}(x,k) - k\psi(x - x_i^{(s)}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_m(D_i^{(s)}). \tag{13}$$

Существование и однозначность определения функции $v_i^{(s)}(x,k)$ просто доказывается методом монотонных операторов. Продолжим функцию $v_i^{(s)}(x,k)$ на $R^n \setminus D_i^{(s)}$, полагая ее равной k на $F_i^{(s)}$ и нулю вне $B(x_i^{(s)},1)$.

Будем предполагать выполненным следующее условие:

C) существует непрерывная при $(x,k) \in \Omega \times R^1$ функция $c(x,k)$ такая, что для произвольного шара $B \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i \in I_s(B)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k} \int_{B_i^{(s)}} a_j\left(x, u_i(x), \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x,k)}{\partial x_j} dx = \int_B c(x,k)\,dx. \tag{14}$$

где $I_s(B)$ – множество номеров i, для которых $i \in I_s,\ x_i^{(s)} \in B,\ B_i^{(s)} = B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2)$.

Основной результат данной статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $A_1, A_2, B_1, B_2, C, f(x) \in W_m^1(R^n) \cap L_\infty(R^n)$ *и* $u_s(x)$ *– слабо сходящаяся к* $u_0(x)$ *последовательность решений задачи* (1), (2). *Тогда последовательность* $u_s(x)$ *сильно сходится в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p < m$ *и функция* $u_0(x)$ *является обобщенным решением задачи*

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x, f(x) - u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Доказательству теоремы посвящены три следующих пункта. В п. 3 доказываются поточечная и интегральные оценки решений модельной задачи. В п. 4 изучается поведение членов асимптотического разложения. Выводу усредненной граничной задачи (15), (16) посвящен п. 5.

Отметим некоторые свойства функции $c(x,k)$ важные при построении усредненных задач в математической физике, ограничившись для простоты случаем, когда коэффициенты $a_j(x, u, p),\ j=1,\dots,n$, не зависят от u.

Принцип аддитивности. Предположим, что $a_j(x, u, p),\ j=1,\dots,n$, не зависят от u, выполнены условия A_1, A_2, B_1, B_2 и при каждом s задано разбиение семейства множеств $F_i^{(s)}$ на два непересекающихся подсемейства

$$\{F_i^{(s)} : i=1,\dots,I(s)\} = \{F_i^{(s)} : i\in I^{(1)}(s)\} \cup \{F_i^{(s)} : i\in I^{(2)}(s)\},$$

$I^{(1)}(s)\cap I^{(2)}(s)=\varnothing$. Предположим также, что для каждого из подсемейств $\{F_i^{(s)} : i\in I^{(j)}(s)\},\ j=1,2$, выполнено условие C соответственно с функцией $c^{(j)}(x,k)$. Тогда условие C выполнено для семейства $\{F_i^{(s)} : i=1,\dots,I(s)\}$ с функцией $c(x,k)$, равной $c^{(1)}(x,k)+c^{(2)}(x,k)$.

Утверждение следует из равенства (14).

Замечание 2. Непосредственно из условия (14) следует независимость $c(x,k)$ от $\{F_i^{(s)} : i\in J_s\}$. А значит, множества $\{F_i^{(s)} : i\in J_s\}$, удовлетворяющие условию (9), не влияют на построение усредненной граничной задачи.

2. Оценки решений модельной задачи. Докажем оценки функции $v_i^{(s)}(x,k)$, определенной как решение задачи (12), (13). Для краткости, в этом пункте будем писать $v(x,k)$, D, F, x_0, d вместо $v_i^{(s)}(x,k), D_i^{(s)}, F_i^{(s)}, x_i^{(s)}, d_i^{(s)}$. Через $C_j,\ j=1,2,\dots$, обозначим постоянные, зависящие лишь от ν_1, ν_2, n, m, M.

Лемма 1. *Предположим, что* $a_j(x, u, p)$ *удовлетворяют условию* A_1 *и неравенствам* (4), (5), *функции* $u_s(x)$ *удовлетворяют оценке* (8). *Тогда существует постоянная* K_1, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, m, M, *такая, что справедлива оценка*

$$\int_D \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \le K_1\,|k|(|k|+d)^{m-1} C_m(F). \tag{16}$$

Доказательство. Определим вспомогательную функцию $\omega(x)$ как решение граничной задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|^{m-2} \frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right)=0, \quad x\in D' = B(x_0,2d)\setminus F. \tag{17}$$

$$\omega(x)=\psi\left(\frac{|x-x_0|}{2d}\right),\quad x\in\partial D', \tag{18}$$

где $\psi(x)$ – та же функция, что и в (13).

Просто доказывается оценка

$$\int\limits_{D'}\left|\frac{\partial\omega(x)}{\partial x}\right|^m dx\le C_1C_m(F). \tag{19}$$

Продолжим функцию $\omega(x)$ вне D', полагая ее равной 1 при $x\in F$ и нулю вне $B(x_0,2d)$.

Введем срезывающие функции $\omega_1(x),\ \omega_2(x)$ равенствами

$$\begin{gathered}\omega_1(x)=2\max\{\omega(x)-1/2,0\},\\ \omega_2(x)=4\min\{\max[\omega(x)-1/4,0],\,1/4\}.\end{gathered} \tag{20}$$

Пусть Q_1 – носитель функции $\omega_1(x)$. При $x\in Q_1$ имеем $\omega_2(x)=1$. Используя неравенство Пуанкаре и оценку (19), получаем

$$\operatorname{mes} Q_1\le\int\limits_{D'}[\omega_2(x)]^m\,dx\le C_2\,d^m\int\limits_{D'}\left|\frac{\partial\omega_2(x)}{\partial x}\right|^m dx\le C_3\,d^mC_m(F). \tag{21}$$

Подставим в интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^n\int\limits_D a_j\left(x,u_j(x),\frac{\partial\omega(x,k)}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}dx=0,\quad \varphi(x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_m(D), \tag{22}$$

соответствующее задаче (12), (13), пробную функцию $\varphi(x)=v(x,k)-k\omega_1(x)$. Используя неравенства (4), (5) и неравенство Юнга, получаем

$$\nu_1\int\limits_D\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx\le C_3\int\limits_D\left\{|k|^m\left|\frac{\partial\omega_1(x)}{\partial x}\right|^m+|k|\left|\frac{\partial\omega_1(x)}{\partial x}\right|\right\}dx. \tag{23}$$

Оценим правую часть (23), применяя неравенства Гельдера и (19), (21). Имеем

$$\int\limits_D\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx\le C_3\,|k|^m\int\limits_D\left|\frac{\partial\omega_1(x)}{\partial x}\right|^m dx+$$

$$+C_4\,|k|\{mesQ_1\}^{(m-1)/m}\left\{\int\limits_D\left|\frac{\partial\omega_1(x)}{\partial x}\right|^m dx\right\}^{1/m}\le C_5\,|k|(|k|+d)^{m-1}C_m(F).$$

что и доказывает оценку (16).

При $0<\mu<|k|$ обозначим

$$E(\mu)=\{x\in D:|v(x,k)|\le\mu\}. \tag{24}$$

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 1. *Тогда существует постоянная* K_2, *зависящая лишь от* ν_1,ν_2,n,m,M, *такая, что справедлива оценка*

$$\int\limits_{E(\mu)}\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx\le K_2\,\mu(|k|+d)^{m-1}C_m(F). \tag{25}$$

Доказательство. Подставим в (22) пробную функцию $\varphi(x)=v_\mu(x,k)-\mu\omega_1(x)$, где

$$v_\mu(x,k) = \min\,\{|\,v(x,k)\,|,\, \mu\}\ \mathrm{sign}\ k.$$

Получаем

$$\int\limits_{E(\mu)} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \le C_6\,\mu \int\limits_D \left(1+\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|\right)^{m-1} \left|\frac{\partial \omega_1(x)}{\partial x}\right| dx.$$

Оценим последний интеграл, используя неравенство Гельдера и оценки (16), (21). В результате получаем неравенство (25).

Теорема 4. *Предположим, что выполняются условия леммы* 1. *Тогда существует постоянная* K, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, m, M, *такая, что при* $0 < \rho \le \rho(x,F)$ *справедлива оценка*

$$|\,v(x,k)\,| \le K(|\,k\,|+d)\left\{\frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}}\right\}^{1/(m-1)} + \rho \tag{26}$$

для произвольной точки $x \in D$. Здесь $\rho(x,F)$ – расстояние от точки x до множества F.

Доказательство. Пусть ξ – произвольная точка области D и $0 < \rho \le \rho(\xi,F)$. Определим числовую последовательность

$$\rho_j = \frac{\rho}{4}(3-2^{-j}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и функции $\psi_j(x)$ равные единице на множестве $B_j = B(\xi,\rho_j)$, и нулю вне B_{j+1} такие, что

$$0 \le \psi_j(x) \le 1, \quad \left|\frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x}\right| \le \frac{2^{j+4}}{\rho}.$$

Подставим в интегральное тождество (22) пробную функцию

$$\varphi(x) = |\,v(x,k)\,|^{\sigma+1}[\psi_j(x)]^{\tau+m}\ \mathrm{sign}\ k$$

где σ, τ – произвольные положительные числа. Используя неравенства (4), (5) и неравенство Юнга, получаем

$$\int\limits_D |\,v(x,k)\,|^{\sigma}\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m [\psi_j(x)]^{\tau+m}\,dx \le$$

$$\le C_7(1+\tau)^m \int\limits_D \left\{|\,v(x,k)\,|^{\sigma+m}\left(\frac{2^j}{\rho}\right)^m [\psi_j(x)]^{\tau} + |\,v(x,k)\,|^{\sigma+1}\,\frac{2^j}{\rho}[\psi_j(x)]^{\tau+m-1}\right\} dx. \tag{27}$$

Обозначим $m_j = \max\,\{|\,v(x,k)\,| : x \in \overline{B}_j\}$.

Если $m_{j+1} \le \rho$ при каком-нибудь значении j, то неравенство (26) справедливо в точке ξ. Поэтому дальше будет рассматриваться случай

$$m_{j+1} > \rho \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

В этом случае из (27) получаем

$$\int\limits_D |\,v(x,k)\,|^{\sigma}\left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m [\psi_j(x)]^{\tau+m}\,dx \le$$

$$\leq C_8(1+\tau)^m \frac{2^{jm}}{\rho^m}\, m_{j+1}^{m-1} \int_D |v(x,k)|^{\sigma+1} [\psi_j(x)]^{\tau+m-1}\, dx. \tag{29}$$

Далее применим следующую лемму, являющуюся частным случаем леммы 1.3 из ([3], гл. 8).

Лемма 3. *Пусть* $1 < m < n,\ \Omega \subset R^n$ *– содержащаяся в* $B(0,R)$ *область. Предположим, что для ограниченной функции* $u(x) \in W_m^1(\Omega)$ *при некоторой неотрицательной функции* $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ *и произвольных положительных числах* σ, τ *выполнено неравенство*

$$\int_\Omega |u(x)|^\sigma \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^m [\varphi(x)]^{\tau+m}\, dx \leq C'[\tau+\sigma+m]^m \int_\Omega |u(x)|^{\sigma+\delta} [\varphi(x)]^\tau\, dx \tag{30}$$

с $\delta \leq m$ *и независящей от* σ, τ *постоянной* C'. *Тогда справедлива оценка*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega_1} |u(x)|^{m+n(m-1)/m} \leq$$

$$\leq C''\left\{C' + \operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega_2} |u(x)|^{m-1} L^m\right\}^{n/m} \int_\Omega |u(x)|^m [\varphi(x)]^m\, dx \tag{31}$$

с постоянной C'', *зависящей лишь от* n, m, R. *Здесь* $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \varphi(x) \geq 1\}$, Ω_2 *– носитель функции* $\varphi(x)$,

$$L = \max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|.$$

Используя лемму 3 при $\delta = 1$, из неравенства (29) получаем оценку

$$m_j^{m+n(m-1)/m} \leq C_9 \frac{2^{jn}}{\rho^n}\, m_{j+1}^{(m-1)n/m} \int_D |v(x,k)|^m [\psi_j(x)]^m\, dx. \tag{32}$$

Оценим последний интеграл, применяя неравенство Пуанкаре и лемму 2. Имеем

$$\int_D |v(x,k)|^m [\psi_j(x)]^m\, dx \leq \int_{B_{j+1}} |v_{m_{j+1}}(x,k)|^m\, dx \leq$$

$$\leq C_{10}\,\rho^m \int_{E(m_{j+1})} \left|\frac{\partial v(x,k)}{\partial x}\right|^m dx \leq C_{11}\,\rho^m\, m_{j+1}(|k|+d)^{m-1} C_m(F).$$

Отсюда и из (32) следует неравенство

$$m_j^{m+n(m-1)/m} \leq C_{12} \frac{2^{nj}}{\rho^{n-m}}\, m_{j+1}^{(m-1)n/m+1} (|k|+d)^{m-1} C_m(F). \tag{33}$$

Последовательным применением последнего неравенства получаем (см. лемму 1.5 из [3], гл.8)

$$m_1 \leq C_{13}(|k|+d)\left\{\frac{C_m(F)}{\rho^{n-m}}\right\}^{1/(m-1)}$$

что и завершает доказательство неравенства (26).

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2. *Существует постоянная* K_3, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, m, M, *такая, что при произвольных* $k', k'' \in R_1$ *выполнены оценки*

$$\int_D \left|\frac{\partial v(x,k')}{\partial x}-\frac{\partial v(x,k'')}{\partial x}\right|^m dx \le K_3(|k'|+|k''|+d)^{m-\alpha}\,|k'-k''|^{\alpha}\,C_m(F), \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\int_D \left\{\frac{1}{k'}a_j\left(x,u_s(x),\frac{\partial v(x,k')}{\partial x}\right)\frac{\partial v(x,k')}{\partial x_j}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k''}a_j\left(x,u_s(x),\frac{\partial v(x,k'')}{\partial x}\right)\frac{\partial v(x,k'')}{\partial x_j}\right\}dx\le$$

$$\le K_3(|k'|+|k''|+d)^{m-1-\beta}\,|k'-k''|^{\beta}\,C_m(F), \tag{35}$$

где $\alpha = m/(m-m_2)$, $\beta = m_2/(m-m_2)$.

Доказательство. Для доказательства оценки (34) подставим в интегральное тождество вида (22), соответствующие значениям k, равным k' и k'', пробную функцию

$$\varphi(x) = v(x,k') - v(x,k'') - (k'-k'')\omega_1(x),$$

где $\omega_1(x)$ – функция, определенная при доказательстве леммы 4. Вычитая из одного полученного таким образом равенства другое и оценивая с использованием неравенств (6), (16), (19), (21), получаем оценку (34). Для доказательства (35) подставим в (22) пробную функцию $\varphi(x) = v(x,k)/k - \omega_1(x)$ и в таким образом полученном равенстве придадим k значения k' и k''. Вычитая полученные равенства одного из другого и оценивая с использованием условий (6) и оценки (34), получаем неравенство (35).

Замечание 2. Определенная в условии C функция $c(x,k)$ удовлетворяет оценкам

$$\begin{gathered} 0 \le c(x,k)\,\mathrm{sign}\,k \le A|k|^{m-1}, \\ |c(x,k') - c(x,k'')| \le A(|k'|+|k''|)^{m-1-\beta}\,|k'-k''|^{\beta}, \end{gathered} \tag{36}$$

где A зависит только от $\nu_1, \nu_2, n, m, M, b_0$, диаметра Ω, $\beta = m_2/(m-m_2)$. Для получения первой оценки в (36) достаточно подставить в интегральное тождество (22) для $v_i^{(s)}(x,k)$ пробную функцию $\varphi(x) = v_i^{(s)}(x,k)/k - \omega_1(x)$. Устанавливая простые оценки с использованием леммы 1, неравенств (6), (19), (21) и суммируя полученные неравенства по i с использованием условия (11), в результате получаем первую оценку в (36). Вторая оценка в (36) следует из (35), условия B_2 и определения функции $c(x,k)$.

3. Асимптотическое разложение последовательности решений. Пусть $u_s(x)$ – фиксированная последовательность решений задачи (1), (2), удовлетворяющая оценкам (7), (8) и слабо сходящаяся в $W_m^1(\Omega)$ к функции $u_0(x)$. Продолжим $u_0(x)$ вне Ω, полагая $u_0(x) = f(x)$ при $x \in R^n \setminus \Omega$. В теореме 3 предполагалась принадлежность $f(x)$ пространству $W_m^1(R^n)$, а значит, для продолженной таким образом функции $u_s(x)$ имеем $u_s(x) \in W_m^1(R^n)$.

Пусть $K(\xi)$ – фиксированная бесконечно дифференцируемая на R^1 функция, равная нулю при $|\xi|\geq 1$ и удовлетворяющая условиям

$$0 \leq K(\xi) \leq 2\omega_n, \quad \int_{R^n} K(|x|)\,dx = 1, \tag{37}$$

где ω_n – мера шара $B(0,1) \subset R^n$.

Определим следующие усреднения функций $u_0(x),\ f(x)$:

$$\begin{gathered} u_h^{(0)}(x) = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} K\left(\frac{|x-y|}{h}\right) u_0(y)\,dy, \\ f_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} K\left(\frac{|x-y|}{h}\right) f(y)\,dy. \end{gathered} \tag{38}$$

Известно, что $u_h^{(0)}(x),\ f_h(x)$ сильно сходятся при $h \to 0$ в $W_m^1(\Omega)$ соответственно к $u_0(x),\ f(x)$. Непосредственным вычислением доказывается следующая лемма.

Лемма 5. *Существует постоянная* K_4, *зависящая лишь от* m, n, *такая, что при произвольной точке* $x_0 \in R^n$ *выполняется оценка*

$$\left|\frac{\partial u_h^{(0)}(x_0)}{\partial x}\right|^m \leq K_4 \frac{1}{h^n} \int_{B(x_0,h)} \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{39}$$

Введем подмножества индексов $J_s',\ J_s''$:

$$J_s' = \left\{ i \in J_s : C_m(F_i^{(s)}) > [r_i^{(s)}]^n \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\}, \tag{40}$$

$$J_s'' = \left\{ i \in J_s : C_m(F_i^{(s)}) > [r_i^{(s)}]^n \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\} \tag{41}$$

и последовательность $\rho_i^{(s)}$:

$$\begin{gathered} \rho_i^{(s)} = \frac{r_i^{(s)}}{2} \text{ при } i \in J_s', \quad \rho_i^{(s)} = \left\{ \ln \frac{1}{r_s + d_s} \right\}^{-1} r_i^{(s)} \text{ при } i \in J_s'', \\ \rho_i^{(s)} = \left\{ \ln \frac{1}{r_s + b(r_s)} \right\}^{-1} r_i^{(s)} \text{ при } i \in I_s, \end{gathered} \tag{42}$$

где множества J_s, I_s, числа r_s, d_s и функция $b(t)$ определены в условиях B_1, B_2. Определим средние значения функций $f_h(x),\ u_n^{(0)}(x)$ относительно шара $B_{i,s} = B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)})$ равенствами

$$f_{i,h}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} B_{i,s}} \int_{B_{i,s}} f_n(x)\,dx, \quad u_{i,h}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} B_{i,s}} \int_{B_{i,s}} u_h^{(0)}(x)\,dx. \tag{43}$$

Пусть также

$$\mu_i^{(s)} = 5\left\{ K(2M+1+d_0) \left\{ \frac{C_m(F_i^{(s)})}{[\rho_i^{(s)}]^{n-m}} \right\}^{1/(m-1)} + d_i^{(s)} + \rho_i^{(s)} \right\}, \tag{44}$$

где K – постоянная из теоремы 4, d_0 – диаметр области Ω.

Отметим, что из условий $B_1,\ B_2$ и определения $\mu_i^{(s)},\ \rho_i^{(s)}$ следуют равенства

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\max_{i\in I_0}\mu_i^{(s)}\right\}=0,\quad \lim_{s\to\infty}\left\{\max_{i\in J_0''}\mu_i^{(s)}\right\}=0. \tag{45}$$

Далее последовательность $k_{i,h}^{(s)}$ определяется условиями

$$\begin{aligned} &k_{i,h}^{(s)}=f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)},\quad \text{если}\quad \mu_i^{(s)}>1\quad \text{или}\quad |f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)}|>4[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m},\\ &k_{i,h}^{(s)}=4[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m},\quad \text{если}\quad \mu_i^{(s)}\le 1,\quad |f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)}|\le 4[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m}. \end{aligned} \tag{46}$$

Введем срезывающие функции $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$, $\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)$ равенствами

$$\begin{aligned} &\varphi_{i,h}^{(s)}(x)=\frac{2}{\mu_i^{(s)}}\min\left\{\max\left[|v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})|-\frac{\mu_i^{(s)}}{2},0\right],\frac{\mu_i^{(s)}}{2}\right\},\\ &\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)=\frac{4}{\mu_i^{(s)}}\min\left\{\max\left[|v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})|-\frac{\mu_i^{(s)}}{4},0\right],\frac{\mu_i^{(s)}}{4}\right\}, \end{aligned} \tag{47}$$

где $v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})$ – решение задачи (12), (13) при $k=k_{i,h}^{(s)}$.

Лемма 6. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда существует* s_1 *такое, что*

$$S(\varphi_{i,h}^{(s)})\cap S(\varphi_{j,h}^{(s)})=\varnothing,\quad S(\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)})\cap S(\overline{\varphi}_{j,h}^{(s)})=\varnothing \tag{48}$$

при $i\ne j$, $s\ge s_1$, $h>0$. *Здесь* $S(\varphi)$ *– носитель функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Из оценки (26) и определения $\mu_i^{(s)}$, получаем, что носители функций $\varphi_{j,h}^{(s)}$, $\overline{\varphi}_{j,h}^{(s)}$ содержатся в $B(x_i^{(s)},\ d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)})$. Теперь равенства (49) следуют из (42) и определения $r_i^{(s)}$, как только $\ln 1/(r_s+d_s)\ge 2,\quad \ln 1/(r_s+b(r_s))\ge 2$.

Лемма 7. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда существует независящая от* h *последовательность* $\tau_s^{(1)}$, *стремящаяся к нулю при* $s\to\infty$, *такая, что выполнено неравенство*

$$\sum_{i\in I(s)}\operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)})\le\tau_s^{(1)}. \tag{49}$$

Доказательство. Используя неравенство Пуанкаре и лемму 2, получаем

$$\operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)})\le\int_{D_i^{(s)}}|\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)|^m\,dx\le C_{14}[\rho_i^{(s)}+d_i^{(s)}]^m\int_{D_i^{(s)}}\left|\frac{\partial\overline{\varphi}_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx\le$$

$$\le C_{15}\left[\frac{\rho_i^{(s)}+d_i^{(s)}}{\mu_i^{(s)}}\right]^m\int_{E(\mu_i^{(s)}/2,h)}\left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right|^m dx\le C_{16}\,\mu_i^{(s)}\,C_m(F_i^{(s)}).$$

Теперь неравенство (50) следует из (36), (37), (44), (45) и условий B_1, B_2. Здесь

$$E(\mu_i^{(s)}/2,h)=\left\{x\in D_i^{(s)}:|v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})|\le\mu_i^{(s)}/2.\right\}$$

Определим основное в настоящей работе асимптотическое разложение

$$u_s(x)=u_h^{(0)}(x)+r_{s,h}(x)+\sum_{j=1}^{3}r_{s,h}^{(j)}(x)+w_{s,h}(x), \tag{50}$$

где

$$r_{s,h}(x)=\sum_{i\in I_s} v_i^{(s)}(x,f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)})\ \varphi_{i,h}^{(s)}(x),$$

$$r_{s,h}^{(s)}(x)=\sum_{i\in J_s} v_i^{(s)}(x,f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)})\ \varphi_{i,h}^{(s)}(x),$$

$$r_{s,h}^{(2)}(x)=\sum_{i=1}^{I(s)} [u_{i,h}^{(s)}-u_h^{(0)}(x)]\ \varphi_{i,h}^{(s)}(x),$$

$$r_{s,h}^{(3)}(x)=\sum_{i=1}^{I(s)} [f_h(x)-f_{i,h}^{(s)}]\ \varphi_{i,h}^{(s)}(x)+f(x)-f_h(x),$$

$w_{s,h}(x)$ – остаточный член разложения.

Далее будем считать, что $h\ge R_s+d_s+r_s$, где последовательность d_s, r_s, R_s определены в условиях B_1, B_2.

Лемма 8. *При выполнении условий* A_1, A_2, B_1, B_2 *справедливы равенства*

$$\lim_{h\to0}\left\{\lim_{s\to\infty}\| r_{s,h}^{(2)}(x)\|_{W_m^1(\Omega)}\right\}=0,\quad \lim_{h\to0}\left\{\lim_{s\to\infty}\| r_{s,h}^{(3)}(x)\|_{W_m^1(\Omega)}\right\}=0. \tag{51}$$

Доказательство. Ограничимся доказательством утверждения леммы для $r_{s,h}^{(2)}(x)$. Сходимость $r_{s,h}^{(2)}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из (49). Оценим норму градиента $r_{s,h}^{(2)}(x)$ в $L_m(\Omega)$:

$$\left\|\frac{\partial r_{s,h}^{(2)}(x)}{\partial x}\right\|_{L_m(\Omega)}^m \le \sum_{i=1}^{I(s)}\int_{B_{i,s}}\left|\frac{\partial u_h^{(0)}(x)}{\partial x}\right|^m [\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]^m\,dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{I(s)}\int_{B_{i,s}}|u_{i,h}^{(s)}-u_h^{(0)}(x)|^m\left|\frac{\partial\varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{52}$$

Оба слагаемых правой части (52) стремятся к нулю, если сначала устремить s к ∞, а затем h к нулю. Для первого слагаемого это следует из сильной сходимости $u_h^{(0)}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ и (49).

Установим сейчас требуемую сходимость для второго слагаемого правой части (52). Применяя оценки (38), (25) и равенство (46), при $i\in J_s'$ имеем

$$\int_{B_{i,s}}|u_{i,h}^{(s)}-u_h^{(0)}(x)|^m\left|\frac{\partial\varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx\le C_{18}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m\frac{1}{h^n}\int_{B(\xi_i^{(s)},h)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx\times$$

$$\times[\mu_i^{(s)}]^{1-m}C_m(F_i^{(s)})\le C_{19}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m\frac{1}{h_n}\int_{B(\xi_i^{(s)},h)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx, \tag{53}$$

где $\xi_i^{(s)}$ – некоторая точка из шара $B_{i,s}$.

Выберем множество A_h мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ с целыми координатами так, чтобы множество $\{z_\alpha^{(h)}:\alpha\in A_h\}$ состояло из всех точек $z_\alpha^{(h)}=2\alpha h$, принадлежащих Ω. Определим кубы $K_h(\alpha), K_h'(\alpha)$ равенствами

$$K_h(\alpha)=\{x\in R^n:|x_j-z_{\alpha,j}^{(h)}|\le 3h,\quad j=1,\dots,n\},$$
$$K_h'(\alpha)=\{x\in R^n:-h<x_j-z_{\alpha,j}^{(h)}\le h,\quad j=1,\dots,n\}.$$

Пусть $I_{s,h}(\alpha)=\{1,\dots,I_s : x_i^{(s)}\in K'_h(\alpha)\}$ при $\alpha\in A_h$. Замечая, что $B(\xi_i^{(s)},h)\subset K_h(\alpha)$ при $I_{s,h}(\alpha)$, из (53) имеем

$$\sum_{i\in J'_s}\int_{B_{i,s}}|u_{i,h}^{(s)}-u_h^{(0)}(x)|^m\left|\frac{\partial\varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx\le$$

$$\le C_{19}\sum_{\alpha\in A_h}\left\{\sum_{i\in J'_{s,h}(\alpha)}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m\right\}\frac{1}{h^n}\int_{K_s(\alpha)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{54}$$

где $J'_{s,h}(\alpha)-J'_s\cap I_{s,h}(\alpha)$.

Оценим слагаемое в фигурных скобках в (54). Из (40), (42), (9) и неравенства Гельдера имеем

$$m_s^{(1)}=\sum_{i\in J'_s}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m\to 0\quad\text{при}\quad s\to\infty. \tag{55}$$

При заданном $\alpha\in A_h$ рассмотрим две возможности:

$$\sqrt{m_s^{(1)}}\,\mathrm{mes}\,K_h(\alpha)\le\sum_{i\in J'_{s,h}(\alpha)}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m, \tag{56}$$

$$\sqrt{m_s^{(1)}}\,\mathrm{mes}\,K_h(\alpha)>\sum_{i\in J'_{s,h}(\alpha)}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m. \tag{57}$$

Пусть $A_{s,h}^{(1)}$ – множество тех $\alpha\in A_h$, для которых выполнено первое неравенство, и $A_{s,h}^{(2)}$ – множество тех $\alpha\in A_h$, для которых выполнено второе неравенство. Из определений и (55) следует

$$\sum_{\alpha\in A_{s,h}^{(1)}}\mathrm{mes}\,K_h(\alpha)\le\frac{1}{\sqrt{m_s^{(1)}}}\sum_{\alpha\in A_{s,h}^{(1)}}\left\{\sum_{i\in J'_{s,h}(\alpha)}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{m_s^{(1)}}}\sum_{i\in J'_s}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m\le\sqrt{m_s^{(1)}}. \tag{58}$$

Отметим также, что с некоторой постоянной N, зависящей только от n, выполнены неравенства

$$\sum_{i\in I_{s,h}(\alpha)}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^n\le N h^n,\quad\sum_{\alpha\in A_h}\chi(K_h(\alpha))\le N, \tag{59}$$

где $\chi(K_h(\alpha))$ – характеристическая функция множества $K_h(\alpha)$.

Используя неравенства (57), (59), получаем

$$\frac{1}{h^n}\int_{\alpha\in A_h}\left\{\sum_{i\in J'_{s,h}(\alpha)}[\rho_i^{(s)}]^{n-m}[d_i^{(s)}+\rho_i^{(s)}]^m\right\}\int_{K_h(\alpha)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx\le$$

$$\le C_{20}\sum_{\alpha\in A_{s,h}^{(1)}}\int_{K_h(\alpha)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx+C_{20}\sqrt{m_s^{(1)}}\sum_{\alpha\in A_{s,h}^{(2)}}\int_{K_h(\alpha)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx\le$$

$$\le C_{21}\int_{D_{s,h}^{(1)}}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx+C_{21}\sqrt{m_s^{(1)}}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx.$$

и оба слагаемых правой части стремятся к нулю, если $s\to\infty$: первое – в силу (58), второе – в силу (55). Здесь

$$D_{s,h}^{(1)}=\bigcup_{\alpha\in A_{s,h}^{(1)}} K_h(\alpha).$$

Используя (38), (25), (44), при $i\in I_s''=I_s\cup J_s''$ оценим иным образом интеграл в левой части (53). Получаем

$$\sum_{i\in I_s''}\int_{B_{i,s}}|u_{i,h}^{(s)}-u_h^{(1)}(x)|^n\left|\frac{\partial\varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx\le$$

$$\le C_{22}\sum_{i\in I_s''}[d_i^{(s)}-\rho_i^{(s)}]^n\frac{1}{h^n}\int_{B_{B(\xi_i^{(s)},h)}}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx\times$$

$$\times[\mu_i^{(s)}]^{1-m}C_m(F_i^{(s)})\le C_{22}\sum_{i\in I_s''}\mu_i^{(s)}C_m(F_i^{(s)})\frac{1}{h^n}\int_{B(\xi_i^{(s)},h)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx\le$$

$$\le C_{22}\sum_{\alpha\in A_h}\left\{\sum_{i\in I_{s,h}''(\alpha)}\mu_i^{(s)}C_m(F_i^{(s)})\right\}\frac{1}{h^n}\int_{K_h(\alpha)}\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx,\qquad(60)$$

где $I_{s,h}''(\alpha)=I''_s\cap I_{s,h}(\alpha)$, A_h, $K_h(\alpha)$ имеют такой же смысл, как и в (54).

Замечая, что из (10), (40), (41), (44), (45) следует оценка

$$\sum_{i\in I_s''(\alpha)}\mu_i^{(s)}C_m(F_i^{(s)})\le m_s^{(2)}h^n.$$

где $m_s^{(2)}\to 0$ при $s\to\infty$, и используя второе неравенство в (59), получаем, что правая часть (60) стремится к нулю при $s\to\infty$. Тем самым закончено доказательство утверждения леммы 8 для $r_{s,h}^{(2)}(x)$. Для $r_{s,h}^{(3)}(x)$ доказательство сильной сходимости градиентов аналогично.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2, B_1, B_2. *Тогда последовательность* $r_{s,h}^{(1)}(x)$ *сильно сходятся к нулю в* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s\to\infty$ *равномерно относительно* h.

Доказательство. Сходимость $r_{s,h}^{(1)}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из (49). При оценке градиента $r_{s,h}^{(1)}(x)$ будет использовано неравенство

$$\int_{D_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}[v_i^{(s)}(x,f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)})\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\right|^m dx\le C_{23}C_m(F_i^{(s)}),\qquad(61)$$

справедливое при $i=1,\dots,I(s)$. При получении этого неравенства в случае, когда $k_{i,h}^{(s)}$ определяется первым равенством в (46), использована оценка

$$|v_i^{(s)}(x,f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)})|\le\mu_i^{(s)},\ \text{ если }\left|\frac{\partial\varphi_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|\ne 0,\qquad(62)$$

следующая из определения $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$.

Из (61) следует

$$\left\| \frac{\partial r_{s,h}^{(1)}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m \le C_{23} \sum_{i \in J_s} C_m(F_i^{(s)}),$$

и правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s \to \infty$ в силу (9), что и завершает доказательство леммы.

Лемма 10. *При выполнении условий* A_1, A_2, B_1, B_2 *последовательность* $r_{s,h}(x)$ *стремится к нулю сильно в* $W_p^1(\Omega)$ *для любого* $p \in (1, m)$ *и слабо в* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s \to \infty$.

Доказательство. Сходимость $r_{s,h}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из (49). Из (61) получаем оценку

$$\left\| \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m \le C_{23} \sum_{i \in I_s} C_m(F_i^{(s)}), \tag{63}$$

из которой с учетом (10) следует ограниченность последовательности $r_{s,h}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$. Сильная сходимость $r_{s,h}(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$ следует из (63), (49) и неравенства Гельдера

$$\left\| \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x} \right\|_{L_p(\Omega)} \le \left\| \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)} \left\{ \sum_{i \in I_s} \operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)}) \right\}^{1/p - 1/m}.$$

Лемма доказана.

4. Поведение остаточного члена асимптотического разложения. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Функции* $w_{s,h}(x)$, *определяемые равенством* (50), *принадлежат при каждом* s *пространству* $\overset{\circ}{W}{}_1^m(\Omega^{(s)})$. *При выполнении условий* A_1, A_2, B_1, B_2 *последовательность* $w_{s,h}(x)$ *сильно сходится к нулю в* $W_m^1(\Omega)$, *если вначале* $s \to \infty$, *а затем* $h \to o$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из равенства (50) и определения членов асимптотического разложения. Из лемм 8, 9, 10 и ограниченности последовательности $w_{s,h}(x)$ в $L_\infty(\Omega)$ следует слабая сходимость $w_{s,h}(x)$ к нулю в $W_m^1(\Omega)$ и сильная сходимость в $L_r(\Omega)$ при любом $r < \infty$.

Для доказательства второго утверждения теоремы запишем интегральное тождество для задачи (1), (2) при пробной функции $w_{s,h}(x)$. Имеем

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) w_{s,h}(x)\, dx = 0.$$

Отсюда, используя условие A_2, леммы 8, 9, 10 и отмеченную выше сходимость последовательности $w_{s,h}(x)$, получаем

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\ \overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{24}\ \overline{\lim_{h\to 0}}\ \overline{\lim_{s\to\infty}}\ R_{1,h}^{(s)}, \tag{64}$$

где

$$R_{1,h}^{(s)} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x_j}dx. \tag{65}$$

Более детально подобные рассуждения приведены в [3] при доказательстве теоремы 3.1 гл. 9.

Для преобразования $R_{1,h}^{(s)}(x)$ введем $\chi_{i,h}^{(s)}(x)$ при $i \in I(s)$ с помощью равенства

$$\chi_{i,h}^{(s)}(x) = \frac{1}{\mu_i^{(s)}}\min\left\{\max\left[|\, v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\,| - \mu_i^{(s)}, 0\right], \mu_i^{(s)}\right\}, \tag{66}$$

где использованы те же обозначения, что и в (47). Замечая, что на носителе $S(\chi_{i,h}^{(s)})$ функции $\chi_{i,h}^{(s)}(x)$ справедливо равенство $\varphi_{i,h}^{(s)}(x) = 1$, записываем $R_{i,h}^{(s)}$ в виде

$$R_{1,h}^{(s)} = \sum_{i\in I_s}\ \int_{D_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial v_{i,h}^{(s)}(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)}(x)\right)\right]dx + R_{2,h}^{(s)}, \tag{67}$$

где

$$R_{2,h}^{(s)} = \sum_{i\in I_s}\ \int_{D_i^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, u_s, \frac{\partial[v_{i,h}^{(s)}(x)\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)}\right)\left(1 - \chi_{i,h}^{(s)}(x)\right)\right]dx.$$

Здесь и далее для краткости будем писать $v_{i,h}^{(s)}(x)$ вместо $v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)})$; $w_{i,h}^{(s)}$ – среднее значение функции $w_{s,h}(x)$ относительно шара $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)} + r_i^{(s)}/2)$.

Первый интеграл в правой части (67) равен нулю в силу интегрального тождества (22) для $v_i^{(s)}(x, f_{i,h}^{(s)} - u_{i,h}^{(s)})$. Оценим $R_{2,h}^{(s)}$ используя условие A_2 и обозначение

$$G_{i,h}^{(s)} = \{x \in D_i^{(s)} : \mu_i^{(s)}/2 \le |\, v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\,| \le 2\mu_i^{(s)}\}.$$

Получаем

$$|\, R_{2,h}^{(s)}\,| \le C_{25}\sum_{i\in I_s}\left\{\int_{G_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}[v_{i,h}^{(s)}(x)\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\right|^m dx + \operatorname{mes} S(\varphi_{i,h}^{(s)})\right\}^{(m-1)/m} \times$$

$$\times\left\{\int_{G_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}[(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)})(1 - \chi_{i,h}^{(s)}(x))\right|^m dx\right\}^{1/m}. \tag{68}$$

где $S(\varphi_{i,h}^{(s)})$ – носитель функции $\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$.

Используя неравенства (25), (62), получаем оценки

$$\int_{G_{i,h}^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}[v_{i,h}^{(s)}(x)\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\right|^m dx \le C_{26}\,[\mu_i^{(s)}]^{1/2}\, C_m(F_i^{(s)}),$$

$$\int_{G_{i,h}^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}[(w_{s,h}(x) - w_{i,h}^{(s)})(1 - \chi_{i,h}^{(s)}(x))\right|^m dx \le$$

$$\leq C_{27}\left\{\int\limits_{G_{i,h}^{(s)}}\left|\frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x}\right|^m dx+[\mu_i^{(s)}]\int\limits_{G_{i,h}^{(s)}}|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^m\left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right|^m dx\right\}. \tag{69}$$

Оценим второй интеграл правой части (69). Для этого введем функции $\psi_i^{(s)}(x)$, принадлежащие $C_0^\infty(B(x_i^{(s)},1))$, равные единице при $x\in B(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)}+r_i^{(s)}/4)$, нулю вне $B(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)}+r_i^{(s)}/2)$ и удовлетворяющие оценке

$$\left|\frac{\partial \psi_i^{(s)}(x)}{\partial x}\right|\leq 8[r_i^{(s)}]^{-1}.$$

Подставим в интегральное тождество (22) для функции $v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})$ пробную функцию

$$\varphi(x)=\max\,\{2\mu_i^{(s)}-|v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})|,0\}|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^m[\psi_i^{(s)}(x)]^m.$$

Применяя условия A_2, получаем оценку

$$\int\limits_{E(2\mu_i^{(s)},h)}|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^m\left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right|^m[\psi_i^{(s)}(x)]^m dx\leq$$

$$\leq C_{28}\,\mu_i^{(s)}\int\limits_{E(2\mu_i^{(s)},h)}\left[1+\left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right|\right]^{m-1}\Bigg\{\;|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^{m-1}\times$$

$$\times\left|\frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x}\right|[\psi_i^{(s)}(x)]^m+|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^m\,[\psi_i^{(s)}(x)]^{m-1}[r_i^{(s)}]^{-1}\Bigg\}dx,$$

откуда в силу неравенства Юнга следует

$$\int\limits_{E(2\mu_i^{(s)},h)}|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^m\left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right|^m[\psi_i^{(s)}(x)]^m dx\leq$$

$$\leq C_{29}\int\limits_{B_i^{(s)}}\left\{[\mu_i^{(s)}]^m\left|\frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x}\right|^m+\left(\left[\frac{\mu_i^{(s)}}{r_i^{(s)}}\right]^m+1\right)|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^m\right\}dx,$$

где $B_i^{(s)}=B(x_i^{(s)},\, d_i^{(s)}+r_i^{(s)}/2)$. Наконец, применяя неравенство Пуанкаре, имеем оценку

$$\int\limits_{G_i^{(s)}}|w_{s,h}(x)-w_{i,h}^{(s)}|^m\left|\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right|^m dx\leq C_{30}\,([\mu_i^{(s)}]^m+[r_i^{(s)}]^m)\int\limits_{B_i^{(s)}}\left|\frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{70}$$

Из (68), (69), (70) и неравенства Гельдера следует оценка

$$|R_{2,h}^{(s)}|\leq C_{31}\left\{\sum_{i\in I_s}[\mu_i^{(s)}]^{1/2}\,C_m(F_i^{(s)})\left[1+\left[\frac{r_i^{(s)}}{\mu_i^{(s)}}\right]^{m/(m-1)}\right]\right\}^{(m-1)/m}\left\{\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial w_{s,h}(x)}{\partial x}\right|^m dx\right\}^{1/m}, \tag{71}$$

правая часть которой стремится к нулю в силу ограниченности последовательности $w_{s,h}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$, неравенства (10) и выбора $\mu_i^{(s)}$. Утверждение теоремы 5 следует теперь из (64), (67), (71).

5. Построение усредненной граничной задачи. Здесь будет доказана теорема 3. Утверждение о сильной сходимости последовательности $u_s(x)$ к $u_0(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p<m$ является простым следствием асимптотического разложения (50), лемм 8, 9, 10 и теоремы 5. Докажем, что функция $u_0(x)$ является решением задачи (15), (16).

Пусть $g(x)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\| g(x)\|_{C^1(\Omega)} \le 1$. Определим последовательность

$$g_{s,h}(x) = g(x) + \rho_{s,h}(x) + \rho_{s,h}^{(1)}(x) + \rho_{s,h}^{(2)}(x). \tag{72}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{s,h}(x) &= -\sum_{i\in I_s} \frac{1}{k_{i,h}^{(s)}} v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\, \varphi_{i,h}^{(s)}(x)\, g_i^{(s)}, \\ \rho_{s,h}^{(1)}(x) &= -\sum_{i\in I_s} \frac{1}{k_{i,h}^{(s)}} v_i^{(s)}(x, k_{i,h}^{(s)})\, \varphi_{i,h}^{(s)}(x)\, g_i^{(s)}, \\ \rho_{s,h}^{(2)}(x) &= \sum_{i=1}^{I(s)} [g_i^{(s)} - g(x)]\varphi_{i,h}^{(s)}(x). \end{aligned} \tag{73}$$

Здесь $g_i^{(s)}$ – среднее значение функции $g(x)$ относительно шара $B_{i,s}$, определяемое аналогично (43), $k_{i,h}^{(s)}, \varphi_{i,h}^{(s)}(x)$ введены соответственно равенствами (46), (47).

Лемма 11. *Существует постоянная K_4, зависящая лишь от ν_1, ν_2, n, m, M и последовательность $\tau_s^{(2)}$, стремящаяся к нулю при $s\to\infty$ такие, что справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &\| \rho_{s,h}(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le K_4, \quad \| \rho_{s,h}(x)\|_{W_p^1(\Omega)} \le K_4 [\tau_s^{(2)}]^{m-p}, \\ &\| \rho_{s,h}^{(1)}(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le K_4 \tau_s^{(2)}, \quad \| \rho_{s,h}^{(2)}(x)\|_{W_m^1(\Omega)} \le K_4 \tau_s^{(2)} \end{aligned} \tag{74}$$

при $1<p<m$.

Доказательство. Оценку для $\rho_{s,h}^{(2)}(x)$ можно доказать аналогично доказательству леммы 8, используя дифференцируемость функции $g(x)$. Оценки для $\rho_{s,h}^{(1)}(x)$, $\rho_{s,h}(x)$ доказывается так же, как и в леммах 9, 10.

Определяемая равенством (72) функция $g_{s,h}(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega^{(s)})$, и ее можно подставить в интегральное тождество, соответствующее задаче (1), (2). Используя леммы 8–11 и отмеченную выше сильную сходимость $u_s(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p<m$, получаем равенство

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) g(x) \right\} dx =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s(x), \frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_{s,h}(x)}{\partial x_j} dx + \tau_{s,h}^{(3)}, \tag{75}$$

где

$$\lim_{h\to 0}\lim_{s\to\infty}\tau^{(3)}_{s,h}=0.$$

Доказательство равенства (75) аналогично соответствующему доказательству из ([3], § 4, гл.9), и поэтому его опускаем.

Представим первое слагаемое правой части (75) в виде

$$-\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,u_s(x),\frac{\partial r_{s,h}(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho_{s,h}(x)}{\partial x_j}dx=$$

$$=R^{(3)}_{s,h}-\sum_{i\in I_s}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_i^{(s)}}{k_{i,h}^{(s)}}\int_{B_i^{(s)}}a_j\left(x,u_s(x),\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x_j}dx, \tag{76}$$

где

$$R^{(3)}_{s,h}=\sum_{i\in I_s}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_i^{(s)}}{k_{i,h}^{(s)}}\int_{B_i^{(s)}}\left\{a_j\left(x,u_s(x),\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x_j}-\right.$$

$$\left.-a_j\left(x,u_s(x),\frac{\partial}{\partial x}[v_i^{(s)}(x,f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)})\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\right)\frac{\partial}{\partial x_j}[v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\right\}dx.$$

Докажем, что справедливо равномерное по h равенство

$$\lim_{s\to\infty}R^{(3)}_{s,h}=0. \tag{77}$$

Предварительно учтем оценки

$$\begin{aligned}&\int_{B_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\{v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})[1-\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\}\right|^m dx\le C_{32}\,\mu_i^{(s)}[k_{i,h}^{(s)}]^{m-1}C_m(F_i^{(s)}),\\ &\int_{B_i^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\{v_i^{(s)}(x,f_{i,h}^{(s)}-u_{i,h}^{(s)})[1-\varphi_{i,h}^{(s)}(x)]\}\right|^m dx\le C_{32}\,[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m}C_m(F_i^{(s)}),\end{aligned} \tag{78}$$

следующие из лемм 1, 2 и определения $\mu_i^{(s)},\varphi_{i,h}^{(s)}(x)$. Используя (61), (78) и леммы 1, 2, получаем

$$|R^{(3)}_{s,h}|\le C_{33}\sum_{i\in I_s}\{\mathrm{mes}\,B_i^{(s)}+C_m(F_i^{(s)})\}^{(m-1)/m}\{\mu_i^{(s)}[k_{i,h}^{(s)}]^{-1}C_m(F_i^{(s)})\}^{1/m}+$$

$$+C_{33}\sum_{i\in I_s}\{\mathrm{mes}\,B_i^{(s)}+C_m(F_i^{(s)})\}^{(m-m_2)/m}\{[\mu_i^{(s)}]^{(2m-1)/2m}C_m(F_i^{(s)})\}^{m_2/m}.$$

Оба слагаемых правой части последнего неравенства стремятся к нулю в силу условия B_2, (45), (46). Тем самым установлено равенство (77).

Наконец, используя условие C, можно установить оценку

$$\left|\sum_{i\in I_s}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_i^{(s)}}{k_{i,h}^{(s)}}\int_{B_i^{(s)}}a_j\left(x,u_s(x),\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,k_{i,h}^{(s)})}{\partial x_j}dx-\right.$$

$$\left.-\int_{\Omega}c(x,f_h(x)-u_h^{(0)}(x))\,g(x)\,dx\right|\le\tau^{(4)}_{s,h}. \tag{79}$$

и для $\tau^{(4)}_{s,h}$ справедливо равенство

$$\lim_{h\to 0}\lim_{s\to\infty}\tau_{s,h}^{(4)}=0.$$

Доказательство (79) проводится аналогично рассуждениям из ([3], § 4, гл.9), и поэтому его опускаем.

Теперь, используя (76), (79), замечание 2, сходимость $f_h(x), u_h^0(x)$ к $f(x), u_0(x)$ и переходя к пределу в (75) вначале при $s\to\infty$, а затем при $h\to 0$, получаем равенство

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}+a_0\left(x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)g(x)-c(x,f(x)-u_0(x))\,g(x)\right\}dx=0, \tag{80}$$

доказанное для $g(x)\in C_o^{\infty}(\Omega),\ \|g(x)\|_{C^1(\overline{\Omega})}\le 1$. Непосредственно из определения пространства $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ следует справедливость (80) для произвольной функции $g(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$, т.е. $u_0(x)$ – решение уравнения (15). Принадлежность $u_0(x)$ множеству $f(x)+\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ следует из того, что при каждом s этому множеству принадлежит $u_s(x)$. Теорема 3 доказана.

1. *Скрыпниик И.В.* Квазилинейная задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–25.
2. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: Teubner Verlag, 1986. – 232 p.
3. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
4. *Скрыпник И.В.* Усреднение нелинейных задач Дирихле в областях с каналами // Докл. АН УССР. – 1991. – **315**, № 4. – С. 793–797.
5. *Скрыпник И.В.* Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 10. – С. 67–90.
6. *Skrypnik I.V.* Homogenization of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains of general structure. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). – 47 p.
7. *Dal Maso G., Garroni A.* A new approach to the study of limits of Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1993. – (Preprint SISSA). – 39 p.
8. *Марченко В.А, Хруслов Е.Я.* Граничные задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 279 с.
9. *Dal Maso G., Defranceschi A.* Limits of nonlinear Dirichlet problems in varying domains // Manuscripta Math. – 1988. – **61**. – P.251–278.
10. *Dal Maso G., Murat F.* Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators in H_1^0. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). – 38 p.

11. *Dal Maso G., Murat F.* Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). – 49 p.
12. *Dal Maso G., Skrypnik I.V.* Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1994. – (Preprint SISSA). . – 45 p.
13. *Ковалевский А.А.* О G-сходимости операторов задачи Дирихле в переменных областях // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1993. – № 5. – С. 13–17.
14. *Панкратов Л.С.* О сходимости решений вариационных проблем в слабо связанных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низ. температур; 53.88).

УСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ ОБЩЕЙ СТРУКТУРЫ

*(Математический сборник. – 1996. – **187**, № 8)*

Введение

Пусть Ω – ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, и пусть $\Omega_s \subset \Omega,\ s = 1,2,\dots$, – последовательность открытых подмножеств множества Ω. В области Ω_s рассматривается нелинейная задача Дирихле

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in \Omega_s, \tag{0.1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega_s. \tag{0.2}$$

Формулируемые далее условия обеспечивают существование решения $u_s(x) \in f(x) + \overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega_s)$ задачи (0.1), (0.2) при каждом s и ограниченность последовательности $u_s(x)$ в $W^1_m(\Omega_s)$. Изучается возможность аппроксимации задачи (0.1), (0.2) новой усредненной задачей в области Ω, к решению которой сходится последовательность $u_s(x)$ при $s \to \infty$.

Линейные эллиптические задачи такого типа исследовались В.А.Марченко и Е.Я.Хрусловым (см., например, [1]). Изучение усреднения нелинейных задач принципиально отличается от линейного случая, так как для построения предельной граничной задачи недостаточна слабая сходимость градиентов решений задачи (0.1), (0.2).

Усреднение нелинейных задач вида (0.1), (0.2) исследовалось автором в [2]–[7] при геометрических предположениях относительно Ω_s, в частности, предполагалось, что $\Omega \setminus \Omega_s$ является объединением конечного числа непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}, i = 1,\dots,I(s)$. Рассматривались два типа предположений относительно $F_i^{(s)}$: или диаметры $F_i^{(s)}$ стремятся к нулю при $s \to \infty$ (области с мелкозернистой границей), или $F_i^{(s)}$ содержится в окрестности $\boldsymbol{U}(l_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ линии $l_i^{(s)}$ и $d_i^{(s)}$ стремится к нулю при $s \to \infty$ (области с каналами).

В настоящей работе отсутствуют геометрические предположения относительно структуры множеств $\Omega \setminus \Omega_s$. Предполагается выполнение следующего условия:

В) существуют положительная постоянная A и последовательность r_s, стремящаяся к нулю при $s \to \infty$, такие, что справедливо неравенство

$$C_m(K(x_0, r) \setminus \Omega_s) \le Ar^n$$

для $r \ge r_s$ и произвольной точки $x_0 \in \Omega$, расстояние которой до границы области Ω больше, чем $2\sqrt{n}r_s$; здесь

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_j - x_j^{(0)}| \le r, \quad j = 1,\dots,n\}$$

– куб с центром $x_0=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$, C_m – m-емкость.

В работе доказана сильная сходимость последовательности $u_s(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p<m$, построены корректор для приближения последовательности $u_s(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ и граничная задача для предельной функции. Все рассмотрения основаны на новой конструкции асимптотического разложения, основанного на локальном приближении решений задачи (0.1), (0.2) решениями модельных нелинейных задач. Главную роль при изучении асимптотического поведения и построении усредненной граничной задачи играют новые поточечные оценки решений модельных нелинейных задач.

При иных предположениях и другими методами нелинейная задача усреднения рассматривалась в работах [8]–[11]. В [11] изучался вариационный случай, в [10] задача усреднения изучалась методами теории G-сходимости. В работах [8], [9] Дж.Даль Мазо и Ф.Мюра рассматривали усреднение последовательности задач вида (0.1), (0.2) без условий на последовательность Ω_s. В этом случае в предположении однородности функций $a_j(x,u,p)$ относительно p построена предельная граничная задача с дополнительным членом, содержащим борелевскую меру, значения которой могут быть равными бесконечности. В линейном случае аналогичный результат был получен в [12].

Основным отличием данной работы от работ [8]–[11] является установление емкостного характера дополнительного члена усредненного уравнения при естественном условии на последовательность перфорированных областей.

§ 1. Формулировка предположений и результатов

Будем предполагать, что функции $a_j(x,u,p)$, $j=1,\dots,n$, определены при $x\in\overline{\Omega}$, $u\in\mathbf{R}^1$, $p\in\mathbf{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

A_1) функции $a_j(x,u,p)$ непрерывны относительно u,p для почти всех $x\in\Omega$ и измеримы по x для всех $u,p\in\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n$; $a_j(x,u,0)=0$ для $x\in\Omega$, $u\in\mathbf{R}^1$, $j=1,\dots,n$;

A_2) существуют положительные постоянные ν_1,ν_2,ε такие, что при $2\le m<n$, $m\le m_1<mn/(n-m)$ и всех $x\in\overline{\Omega}$, $u,v\in\mathbf{R}^1$, $p,q\in\mathbf{R}^n$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}(a_j(x,u,p)-a_j(x,u,q))(p_j-q_j)\ge\nu_1(1+|p|+|q|)^{m-2}\cdot|p-q|^2,\\ a_0(x,u,p)u\ge-(\nu_1-\varepsilon)|p|^m-\varphi(x)(1+|u|),\\ |a_j(x,u,p)-a_j(x,v,q)|\le\nu_2(1+|u|^{m_1}+|v|^{m_1}+|p|^m+|q|^m)^{(m-2)/m}\\ \times(|p-q|+|u-v|),\quad j=1,\dots,n,\\ |a_0(x,u,p)|\le\nu_2(|u|^{m_1}+|p|^m)^{(m_1-1)/m_1}+\varphi(x)\end{gathered}\tag{1.1}$$

с $\varphi(x)\in L_{r_1}(\Omega)$ при $r_1>n/m$.

Отметим, что функции $a_j(x,u,p)$ можно продолжить на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n$ с сохранением условий $A_1), A_2)$, и в дальнейшем такое продолжение подразумевается. Условие $2 \le m < n$ предполагается для простоты изложения. Небольшими изменениями формулировок и доказательств могут быть рассмотрены случаи $1 < m < 2, m = n$. При $m > n$ задача нахождения предельной функции для последовательности $u_s(x)$ упрощается из-за компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$.

Будем предполагать, что граничная функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(x) \in W^1_{p_0}(\Omega_0), \quad p_0 > n, \tag{1.2}$$

где Ω_0 – некоторое открытое множество, содержащее Ω.

Используя методы теории монотонных операторов, просто доказать разрешимость задачи (0.1), (0.2). Справедлива

Теорема 1.1. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2)$ *и* (1.2). *Тогда при каждом* s *граничная задача* (0.1), (0.2) *имеет, по крайней мере, одно решение. Более того, существует независящая от* s *постоянная* R *такая, что при всех* s *выполнена оценка*

$$\| u_s(x) \|_{W^1_m(\Omega_s)} \le R. \tag{1.3}$$

В дальнейшем $u_s(x)$ – одно из возможных решений задачи (0.1), (0.2), удовлетворяющее оценке (1.3). Тем самым последовательность $\{u_s(x)\}$ зафиксирована в дальнейших рассмотрениях. Продолжим функцию $u_s(x)$ на Ω_0, полагая ее равной $f(x)$ для $x \in \Omega_0 \setminus \Omega_s$. Полученные таким образом функции $u_s(x)$ принадлежат $W^1_m(\Omega_0)$ и удовлетворяют оценке

$$\| u_s(x) \|_{W^1_m(\Omega_0)} \le R_1 \tag{1.4}$$

с постоянной R_1, не зависящей от s. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можем предполагать, что последовательность $u_s(x)$ слабо сходится в $W^1_m(\Omega_0)$ к функции $u_0(x)$.

Из [13] непосредственно следует ограниченность функции $u_s(x)$. Методом Мозера можно доказать равномерную ограниченность последовательности $\{u_s(x)\}$. Справедлива

Теорема 1.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда существует независящая от* s *постоянная* M *такая, что при всех* s *справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} | u_s(x) | \le M. \tag{1.5}$$

Сформулируем сейчас условия на множества Ω_s в терминах m-емкости C_m, определение которой можно найти в [5]. Предполагаем выполненным условие $B)$, сформулированное во введении. Для формулировки дополнительного условия на последовательность Ω_s, обеспечивающего построение граничной задачи для предельной функции $u_0(x)$, определим вспомогательные решения $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$ модельной задачи.

Пусть $\psi(x)$ – функция класса $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, равная нулю вне $K(0,1)$ и единице в $K(0,1/2)$. При $r < 1/2$ для произвольной точки $x_0 \in \Omega$ и произвольного вещественного числа q определим $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$ как решение задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, 0, \frac{\partial}{\partial x} v_r^{(s)}(x, x_0, q)\right) = 0, \quad x \in D_s(x_0, r), \tag{1.6}$$

$$v_r^{(s)}(x, x_0, q) = q\psi(x - x_0), \qquad x \in \partial D_s(x_0, r), \tag{1.7}$$

где $D_s(x_0, r) = K(x_0, 1) \setminus \{K(x_0, r) \setminus \Omega_s\}$. Просто проверяется однозначная разрешимость задачи (1.6), (1.7). Продолжим $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$ на $\mathbf{R}^n$, полагая равной $q\psi(x - x_0)$ вне $D_s(x_0, r)$.

Определим

$$C_A(K(x_0, r) \setminus \Omega_s, q) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} \int_{D_s(x_0,\, r)} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v_r^{(s)}(x, x_0, q)}{\partial x}\right) \frac{\partial v_r^{(s)}(x, x_0, q)}{\partial x_j}\, dx\,. \tag{1.8}$$

Это есть характеристика множества $K(x_0, r) \setminus \Omega_s$, аналогичная емкости и связанная с дифференциальным уравнением (0.1).

Предположим, что выполнено условие:

$C)$ существует непрерывная функция $c(x, q)$ такая, что для произвольной точки $x_0 \in \Omega$ и для произвольного числа $q \in \mathbf{R}^1$ справедливо равенство

$$\lim_{r \to 0}\left\{\lim_{s \to \infty} \frac{1}{(2r)^n}\; C_A(K(x_0, r) \setminus \Omega_s, q)\right\} = c(x_0, q), \tag{1.9}$$

и сходимость к пределу в (1.9) является равномерной относительно $x_0 \in \Omega$ и q на каждом ограниченном интервале.

Основные результаты работы дают следующие две теоремы.

Теорема 1.3. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2), B)$, (1.2), *и пусть* $u_s(x)$ – *последовательность решений задачи* (0.1), (0.2), *слабо сходящаяся к* $u_0(x)$ *в* $W_m^1(\Omega)$. *Тогда последовательность* $u_s(x)$ *сильно сходится в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p \in (1, m)$.

Теорема 1.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.3 и условие $C)$. *Тогда функция* $u_0(x)$ *является решением следующей задачи*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) - a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x, f(x) - u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.10}$$

$$u(x) = f(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{1.11}$$

где $c(x, q)$ – *функция, определенная в условии* $C)$.

Доказательство теорем 1.3, 1.4 дано в следующих четырех параграфах. Основой построений служат новые поточечные оценки функций $v_r^{(s)}(x, x_0, q)$, доказываемые в следующем параграфе. В § 3 получены некоторые оценки усредненных функций. В § 4 будет определено асимптотическое разложение для $u_s(x)$, главный член которого является корректором относительно приближения $u_s(x)$ в норме $W_m^1(\Omega)$. Из анализа поведения членов асимптотического разложения следует теорема 1.3. Доказательство теоремы 1.4, основанное на асимптотическом разложении, приведено в § 5.

§ 2. Оценки решения модельной задачи

Будем писать $K(r)$ вместо $K(0,r)$ для куба с центром в начале координат. Пусть F – замкнутое подмножество куба $K(r),\ r<1/2$, и обозначим $D=K(1)\setminus F$. Рассмотрим в области D модельную нелинейную граничную задачу

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j\left(x,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\quad x\in D, \tag{2.1}$$

$$u(x)=q\psi(x),\qquad x\in\partial D, \tag{2.2}$$

где q – произвольное вещественное число и $\psi(x)$ – та же функция, что и в (1.7).

Предполагаем, что для функций $a_j(x,p)$ выполнены условия $A_1), A_2)$. Обозначим через $v(x,q)$ решение задачи (2.1), (2.2) и продолжим эту функцию на $\mathbf{R}^n$, полагая $v(x,q)=q\psi(x)$ при $x\notin D$. Просто проверяется, что при $q\neq 0$ справедливо неравенство $0\le(1/q)v(x,q)\le 1$.

Обозначим через $M_r(F)$ множество функций класса $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ с носителем в $K(2r)$ и равных единице на F. Аналогично [5] доказывается неравенство

$$\inf_{\varphi\in M_r(F)}\int_{K(2r)}\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|^m dx\le C_0\cdot C_m(F) \tag{2.3}$$

с постоянной C_0, зависящей лишь от m,n.

Пусть μ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0<\mu\le|q|$, и определим

$$E_\mu=\{x\in D:|v(x,q)|\le\mu\}.$$

Лемма 2.1. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2)$. *Тогда существует постоянная* K_1, *зависящая только от* ν_1,ν_2,n,m, *такая, что выполнена оценка*

$$\int_{E_\mu}\left(1+\left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\cdot\left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|^2 dx\le K_1\,\mu\,|q|\,(C_m(F))^{2/m}(|q|^m\,C_m(F)+r^n)^{(m-2)/m}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Для изучения оценки (2.4) при $\mu=|q|$ достаточно подставить в соответствующее задаче (2.1), (2.2) интегральное тождество пробную функцию $v(x,q)-q\varphi(x)$ и провести стандартные оценки. Здесь $\varphi(x)$ – произвольная функция из $M_r(F)$. Доказательство неравенства (2.4) при $\mu<|q|$ проводится аналогично только с использованием пробной функции $v_\mu(x,q)-(\mu/q)v(x,q)$, где $v_\mu(x,q)=\min\{|v(x,q)|,\mu\}$.

В дальнейшем основной является поточечная оценка, содержащаяся в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2)$. *Тогда существует постоянная* K_2, *зависящая лишь от* ν_1, ν_2, n, m, *такая, что справедлива оценка*

$$|v(x,q)| \le K_2 \, |q| \left(\frac{r}{\rho(x, K(r))} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}} \right)^{1/(m-1)} \tag{2.5}$$

при $0 < \rho(x, K(r)) \le r$, *где* $\rho(x, K(r))$ *– расстояние от точки* x *до куба* $K(r)$.

Доказательство. Ограничимся, для простоты, доказательством оценки (2.5) при $q > 0$. Для $0 < \rho < r$ определим две числовые последовательности

$$\rho_j^{(1)} = \frac{\rho}{2}(1 + 2^{-j}), \;\; \rho_j^{(2)} = \frac{\rho}{2}(3 - 2^{-j}), \;\; j = 1,2,...,$$

и функции $\varphi_j(x)$, равные единице на множестве $G_j = K(r + \rho_j^{(2)}) \setminus K(r + \rho_j^{(1)})$, нулю вне множества G_{j+1} и такие, что $0 \le \varphi_j(x) \le 1$, $\left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j(x) \right| \le 2^{j+3} \cdot \rho^{-1}$.

Подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (2.1), (2.2), пробную функцию

$$(v(x,q))^{\sigma+1} \cdot (\varphi_j(x))^{\tau+m},$$

где σ, τ – произвольные числа, удовлетворяющие неравенству $\sigma, \tau \ge 1$. Используя условие A_2) и неравенство Юнга, получаем оценку

$$\int_D \left(1 + \left| \frac{\partial v(x,q)}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \cdot \left| \frac{\partial v(x,q)}{\partial x} \right|^2 (v(x,q))^{\sigma} (\varphi_j(x))^{\tau+m} \, dx$$

$$\le C_1 \tau^m \int_D \left(v^{\sigma+2} \cdot \left(\frac{2^j}{\rho} \right)^2 \varphi_j^{\tau+m-2} + v^{\sigma+m} \cdot \left(\frac{2^j}{\rho} \right)^m \varphi_j^{\tau} \right) dx. \tag{2.6}$$

В данном параграфе через C_i обозначаем постоянные, зависящие лишь от ν_1, ν_2, n, m.

Введем обозначение

$$m_j = \operatorname{ess\,sup} \{ v(x,q) : x \in G_j \}$$

и будем рассматривать в дальнейшем возможности:

$$m_{j+1} > \rho, \qquad q^m C_m(F) > r^n, \tag{2.7}$$

$$m_{j+1} > \rho, \qquad q^m C_m(F) \le r^n, \tag{2.8}$$

$$m_{j+1} \le \rho, \qquad q^m C_m(F) > r^n, \tag{2.9}$$

$$m_{j+1} \le \rho, \qquad q^m C_m(F) \le r^n. \tag{2.10}$$

Если выполнены условия (2.7) или (2.8), оценим правую часть неравенства (2.6), принимая во внимание, что $\rho^{-2} \le \rho^{-m} m_{j+1}^{m-2}$. В этом случае получаем из (2.6)

$$\int_D \left(1+\left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \cdot \left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|^2 \cdot (v(x,q))^{\sigma} (\varphi_j(x))^{\tau+m}\, dx$$

$$\le C_2 \tau^m \frac{2^{mj}}{\rho^m}\, m_{j+1}^{m-2} \int_D (v(x,q))^{\sigma+2} \cdot (\varphi_j(x))^{\tau}\, dx. \qquad (2.11)$$

Применяя лемму 1.3 § 1, главы 8 [5] при соответствующем выборе параметров, получаем оценки

$$m_j^{m+n(m-2)/m} \le C_3 \frac{2^{nj}}{\rho^n}\, m_{j+1}^{n(m-2)/m} \int_D (v(x,q))^m \cdot (\varphi_j(x))^m\, dx, \qquad (2.12)$$

если выполнены неравенства (2.7), и

$$m_j^{2+n(m-2)/m} \le C_4 \frac{2^{nj}}{\rho^n}\, m_{j+1}^{n(m-2)/m} \int_D (v(x,q))^2 \cdot (\varphi_j(x))^2\, dx, \qquad (2.13)$$

если выполнены неравенства (2.8).

Интегралы в правых частях неравенств (2.12), (2.13) оценим, используя аналог оценки (1.10) гл. 8 [5] (с заменой шаров кубами) и оценку (2.4). Имеем, например,

$$\int_D (v(x,q))^m \cdot (\varphi_j(x))^m\, dx \quad \le \int_{G_{j+1}} (v_{m_{j+1}}(x,q))^m\, dx$$

$$\le C_5 \rho r^{m-1} \int_{E_{m_{j+1}}} \left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|^m dx \le C_6 \rho r^{m-1} m_{j+1} q^{m-1} C_m(F). \qquad (2.14)$$

При этом также использовано второе неравенство в (2.7). Аналогично, используя второе неравенство в (2.8), имеем

$$\int_D (v(x,q))^2 \cdot (\varphi_j(x))^2\, dx \le C_7\, \rho\, r\, m_{j+1} q (C_m(F))^{2/m} \cdot r^{n(m-2)/m}. \qquad (2.15)$$

Из двух последних неравенств и (2.12), (2.13) следуют оценки

$$m_j^{m+n(m-2)/m} \le C_8 \frac{2^{nj}}{\rho^{n-1}}\, m_{j+1}^{1+n(m-2)/m} \cdot r^{m-1} q^{m-1} C_m(F), \qquad (2.16)$$

$$m_j^{2+n(m-2)/m} \le C_9 \frac{2^{nj}}{\rho^{n-1}} m_{j+1}^{1+n(m-2)/m} \cdot rq (C_m(F))^{2/m} \cdot r^{n(m-2)/m}, \qquad (2.17)$$

если, соответственно, выполнены условия (2.7) или (2.8).

Аналогичные оценки могут быть получены при выполнении условий (2.9) или (2.10). В этом случае в правой части (2.6) оцениваем $v(x,q)$ числом ρ и получаем неравенство

$$\int_D \left(1+\left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \cdot \left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|^2 \cdot (v(x,q))^{\sigma} (\varphi_j(x))^{\tau+m}\, dx$$

$$\le C_{10} \tau^m \frac{2^{mj}}{\rho^2} \int_D (v(x,q))^{\sigma+2} \cdot (\varphi_j(x))^{\tau}\, dx. \qquad (2.18)$$

Повторяя далее предыдущие рассуждения, приходим к оценкам

$$m_j^m \le C_{11} \frac{2^{nmj/2}}{\rho^{n-1}}\, m_{j+1} \cdot r^{m-1} q^{m-1} C_m(F), \qquad (2.19)$$

$$m_j^2 \le C_{12} \frac{2^{nmj/2}}{\rho^{n-1}} m_{j+1} \cdot rq(C_m(F))^{2/m} \cdot r^{n(m-2)/m}, \tag{2.20}$$

если, соответственно, выполнены условия (2.9) или (2.10).

Сравнивая оценки (2.16), (2.19) и замечая, что $m_j \le m_{j+1}$, получаем, что при выполнении неравенства $q^m C_m(F) > r^n$, справедлива оценка

$$m_j^{m+n(m-2)/m} \le C_{13} m_{j+1}^{1+n(m-2)/m} \cdot \frac{2^{mnj/2}}{\rho^{n-1}} \cdot r^{m-1} q^{m-1} C_m(F) \tag{2.21}$$

при $j = 1,2,\ldots$. Отсюда в силу леммы 1.5 гл. 8 [5] получаем оценку

$$m_1 \le C_{14} q \left(\frac{r}{\rho}\right)^{(n-1)/(m-1)} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right)^{1/(m-1)}. \tag{2.22}$$

Аналогично доказывается оценка

$$m_1 \le C_{15}\, q \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right)^{2/m}, \tag{2.23}$$

если выполнено неравенство $q^m C_m(F) \le r^n$. Наконец, принимая во внимание, что

$$C_m(F) \le C_{16} r^{n-m}, \quad \frac{2}{m} \ge \frac{1}{m-1}, \quad \rho < r,$$

получаем, что во всех возможных случаях справедлива оценка

$$m_1 \le C_{17}\, q \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right)^{1/(m-1)},$$

что завершает доказательство теоремы.

Лемма 2.2. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2)$ *, и пусть* $\bar{q}, \tilde{q}$ *– произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам* $|\bar{q}| \le M,\ |\tilde{q}| \le M$ *. Тогда существует постоянная* K_3*, зависящая лишь от* M, ν_1, ν_2, n, m*, такая, что справедливы оценки*

$$\int_D \left(\left| \frac{\partial}{\partial x}(v(x,\bar{q}) - v(x,\tilde{q})) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x}(v(x,\bar{q}) - v(x,\tilde{q})) \right|^m \right) dx$$

$$\le K_3 |\bar{q} - \tilde{q}|^2 \, (C_m(F))^{2/m} \cdot (C_m(F) + r^n)^{(m-2)/m}, \tag{2.24}$$

$$\left| \sum_{j=1}^n \int_D \left(a_j\left(x, \frac{\partial v(x,\bar{q})}{\partial x}\right) \frac{1}{\bar{q}} \, \frac{\partial v(x,\bar{q})}{\partial x_j} - a_j\left(x, \frac{\partial v(x,\tilde{q})}{\partial x}\right) \frac{1}{\tilde{q}} \, \frac{\partial v(x,\tilde{q})}{\partial x_j} \right) dx \right|$$

$$\le K_3 |\bar{q} - \tilde{q}| (C_m(F) + r^n). \tag{2.25}$$

Доказательство проводится стандартными рассуждениями, используя интегральные тождества для $v(x,\bar{q}),\ v(x,\tilde{q})$ и условие $A_2)$. При получении первого неравенства выбирается пробная функция вида $v(x,\bar{q}) - v(x,\tilde{q}) - (\bar{q} - \tilde{q})\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция из $M_r(F)$. При доказательстве второго неравенства выбираются пробные функции вида $(1/q)v(x,q) - \varphi(x),\ q = \bar{q}$ или $q = \tilde{q},\ \varphi(x) \in M_r(F)$.

§ 3. Оценки усредненных функций

Пусть $\omega(t)$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^1$, равная нулю при $|t| \geq 1$ такая, что

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega(|x|)\,dx = 1. \tag{3.1}$$

Для произвольной функции $u(x) \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$ и положительного числа h определим усреднение $u_h(x)$ равенством

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbf{R}^n} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) u(y)\,dy. \tag{3.2}$$

Далее $B(x_0, h)$ – шар радиуса h с центром x_0.

Лемма 3.1. *Существует постоянная C', зависящая лишь от n, m, такая, что для произвольной функции $u(x) \in W^1_{m,loc}(\mathbf{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\partial u_h(x_0)}{\partial x}\right| \leq C' \left(\frac{1}{h^n} \int_{B(x_0,h)} \left|\frac{\partial u(y)}{\partial y}\right|^m dy \right)^{1/m} \tag{3.3}$$

при $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $h > 0$.

Доказательство получается дифференцированием равенства (3.2) и применением неравенства Гёльдера.

Лемма 3.2. *Существует постоянная C'', зависящая лишь от n, m, такая, что для произвольной функции $u(x) \in W^1_{m,loc}(\mathbf{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\int_{B(0,R)} |u_h(x) - u(x)|^m\,dx \leq C'' h^m \int_{B(0,R+h)} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^m dx \tag{3.4}$$

с произвольными положительными числами R, h.

Доказательство. Из (3.1), (3.2) следует

$$\begin{aligned} |u_h(x) - u(x)| &\leq \frac{1}{h^n} \int_{B(x,h)} |u(y) - u(x)|\,dy \\ &\leq \frac{1}{h^n} \int_0^h \int_{S(0,1)} \left(\int_0^\rho \left|\frac{\partial u(x+t\omega)}{\partial t}\right| dt \right) \rho^{n-1} d\omega\,d\rho \leq \frac{1}{n} \int_{B(x,h)} \left|\frac{\partial u(z)}{\partial z}\right| \frac{dz}{|z-x|^{n-1}} \\ &\leq C_{18} h^{1-\varepsilon} \left(\int_{B(x,h)} \left|\frac{\partial u(z)}{\partial z}\right|^m \frac{dz}{|z-x|^{n-\varepsilon m}} \right)^{1/m}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $S(0,1)$ – сфера единичного радиуса с центром в начале координат, ε – число из интервала $(0, 1/2)$. Через C_i в этом параграфе обозначаем постоянные, зависящие лишь от n, m.

Из (3.5) получаем неравенство

$$\int_{B(0,R)} |u_h(x) - u(x)|^m\,dx \leq C_{19} h^{m-\varepsilon m} \int_{B(0,R)} \int_{B(x,h)} \left|\frac{\partial u(z)}{\partial z}\right|^m \frac{dz\,dx}{|z-x|^{n-\varepsilon m}}$$

$$\leq C_{19} h^{m-\varepsilon m} \int_{B(0,R+h)} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right|^m \left(\int_{B(z,h)} \frac{dx}{|z-x|^{n-\varepsilon m}} \right) dz \leq C_{20} h^m \int_{B(0,R+h)} \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right|^m dz,$$

доказывающее лемму.

Для фиксированного положительного числа h определим множество точек $x_\alpha = 2h\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – вектор с целочисленными координатами. Будем обозначать через $K(\alpha, h)$ куб $K(x_\alpha, h)$. Для произвольной области $D \subset \mathbf{R}^n$ обозначим через $I(D,h)$ множество таких векторов α, что $K(\alpha, 2h) \subset D$. Далее,

$$u(\alpha, h) = \frac{1}{(2h)^n} \int_{K(\alpha,h)} u_h(x) dx$$

– среднее значение определенной равенством (3.2) функции $u_h(x)$ относительно куба $K(\alpha, h)$.

Лемма 3.3. *Пусть* $u(x), g(x)$ *– функции из пространств* $W_m^1(\Omega), L_m(\Omega)$, *соответственно, и предположим, что с некоторой постоянной* Q *выполнено неравенство*

$$\int_{K(\alpha,h)} |g(x)|^m \, dx \leq Q h^n \tag{3.6}$$

при $\alpha \in I(\Omega, h)$. *Существует зависящая лишь от* n, m *постоянная* C''' *такая, что справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha \in I(\Omega,h)} \int_{K(\alpha,h)} |u_h(x) - u(\alpha,h)|^m |g(x)|^m \, dx \leq C''' Q h^m \int_\Omega \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx. \tag{3.7}$$

Доказательство. Используя неравенства (3.3), (3.6), получаем

$$\sum_{\alpha \in I(\Omega,h)} \int_{K(\alpha,h)} |u_h(x) - u(\alpha,h)|^m |g(x)|^m \, dx$$

$$\leq C_{21} h^m \sum_{\alpha \in I(\Omega,h)} \int_{K(\alpha,h)} \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} u_h(tx + (1-t)\xi(\alpha,h)) \right|^m |g(x)|^m \, dt \, dx$$

$$\leq C_{22} h^{m-n} \sum_{\alpha \in I(\Omega,h)} \int_{K(\alpha,2h)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx \int_{K(\alpha,h)} |g(x)|^m \, dx$$

$$\leq C_{22} h^m Q \sum_{\alpha \in I(\Omega,h)} \int_{K(\alpha,2h)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx. \tag{3.8}$$

Здесь $\xi(\alpha, h)$ – некоторая точка куба $K(\alpha, h)$.

Оценка (3.7) следует из (3.8) и просто проверяемого неравенства

$$\sum_{\alpha \in I(\Omega,h)} \int_{K(\alpha,2h)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx \leq 3^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx.$$

Тем самым закончено доказательство леммы 3.3.

§ 4. Асимптотическое разложение последовательности решений

В данном параграфе $u_s(x)$ – решение задачи (0.1), (0.2), удовлетворяющее оценкам (1.4), (1.5). Предполагается слабая сходимость последовательности $u_s(x)$ к функции $u_0(x)$ в пространстве $W_m^1(\Omega)$. Через C_i будем обозначать постоянные, зависящие лишь от $n, m, \nu_1, \nu_2, M, A, \mathrm{mes}\,\Omega$, где A – число из условия $B)$. Будем предполагать выполненными условия $A_1), A_2), B)$.

Определим последовательности ρ_s, μ_s, λ_s, $s = 1,2,...,$ равенствами

$$\rho_s = r_s + \left(\int_\Omega |u_s(x) - u_0(x)|^m \, dx\right)^{1/m},$$
$$\mu_s = \left(\ln\frac{1}{\rho_s}\right)^{-1}, \quad \lambda_s = \left(E\left(\ln\frac{1}{\rho_s}\right)\right)^{2m}, \tag{4.1}$$

где $E(\ln(1/\rho_s))$ – целая часть числа $\ln(1/\rho_s)$, r_s – числовая последовательность, введенная в условии $B)$.

Рассмотрим подразделение области Ω

$$\Omega = \left\{\bigcup_{\alpha\in I_s} K(x_\alpha^{(s)}, \lambda_s\rho_s)\right\} \cup \boldsymbol{U}_s, \tag{4.2}$$

где, как и в предыдущем параграфе, α – вектор с целочисленными координатами, $x_\alpha^{(s)} = 2\lambda_s\rho_s \cdot \alpha$, I_s – множество таких векторов α, что $K(x_\alpha^{(s)}, (2+\lambda_s)\rho_s) \subset \Omega$. В (4.2) использовано определенное во введении обозначение для куба $K(x_0, r)$, $\boldsymbol{U}_s$ – дополнение к $\bigcup_{\alpha\in I_s} K(x_\alpha^{(s)}, \lambda_s\rho_s)$ относительно области Ω.

Обозначим

$$K_s(\alpha) = K(x_\alpha^{(s)}, \lambda_s\rho_s), \quad K_s'(\alpha) = K(x_\alpha^{(s)}, (\lambda_s - 2)\rho_s). \tag{4.3}$$

Определим функцию $v_\alpha^{(s)}(x,q)$ как решение модельной граничной задачи

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, 0, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in D_s(\alpha), \tag{4.4}$$

$$u(x) = q\psi(x - x_\alpha^{(s)}), \quad x \in \partial D_s(\alpha), \tag{4.5}$$

где $D_s(\alpha) = K(x_\alpha^{(s)}, 1) \setminus \{K_s'(\alpha) \setminus \Omega_s\}$, число q и функция $\psi(x)$ такие же, как в (1.7). Функцию $v_\alpha^{(s)}(x,q)$ продолжим на $\mathbf{R}^n \setminus D_s(\alpha)$ равенством $v_\alpha^{(s)}(x,q) = q\psi(x - x_\alpha)$.

Для $s = 1,2,...$ и $\alpha \in I_s$ определим множество $I_s(\alpha)$ векторов $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ с целочисленными координатами и множество точек $\{x_{\alpha\beta}^{(s)} : \beta \in I_s(\alpha)\}$ таких, что $x_{\alpha\beta}^{(s)} = 2\rho_s\beta$ и

$$K_s(\alpha) \setminus K_s'(\alpha) = \bigcup_{\beta\in I_s(\alpha)} K_s(\alpha,\beta), \quad K_s(\alpha,\beta) = K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, \rho_s). \tag{4.6}$$

Через $v_{\alpha\beta}^{(s)}(x,q)$ будем обозначать решение модельной граничной задачи вида (4.4), (4.5) с заменой $x_\alpha^{(s)}$ на $x_{\alpha\beta}^{(s)}$, $D_s(\alpha)$ на $D_s(\alpha,\beta) = K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, 1) \setminus \{K_s(\alpha,\beta) \setminus \Omega_s\}$. Аналогично $v_{\alpha\beta}^{(s)}(x,q)$, определим функцию $\bar{\nu}_{\alpha\beta}^{(s)}(x,q)$ с заменой $D_s(\alpha,\beta)$ на $\overline{D}_s(\alpha,\beta) = K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, 1) \setminus \{K(x_{\alpha\beta}^{(s)}, 2\rho_s) \setminus \Omega_s\}$.

Пусть $|I_s|$ – число векторов α, принадлежащих множеству I_s, аналогично понимается

$|I_s(\alpha)|$. Легко видеть, что справедливы неравенства

$$|I_s| \le C(\lambda_s\rho_s)^{-n}, \quad |I_s(\alpha)| \le 2n\cdot\lambda_s^{n-1} \tag{4.7}$$

с постоянной C, зависящей только от Ω.

Пусть $u_0^{(s)}(x)$ – следующее усреднение функции $u_0(x)$:

$$u_0^{(s)}(x) = \frac{1}{(\lambda_s\rho_s)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\omega\left(\frac{|x-y|}{\lambda_s\rho_s}\right)u_0(y)dy, \tag{4.8}$$

где $\omega(t)$ – функция, введенная в § 3. Обозначим через $f_\alpha^{(s)}$, $u_\alpha^{(s)}$, соответственно, средние значения функций $f(x)$, $u_0^{(s)}(x)$ относительно куба $K_s(\alpha)$. Определим подмножество индексов I_s', I_s'' равенствами

$$\begin{aligned} I_s' &= \{\alpha\in I_s : |f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}| > 2\mu_s\}, \\ I_s'' &= \{\alpha\in I_s : |f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}| \le 2\mu_s\}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

и введем функции $w_\alpha^{(s)}(x)$:

$$\begin{aligned} w_\alpha^{(s)}(x) &= v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)}) \quad &\text{для } \alpha\in I_s', \\ w_\alpha^{(s)}(x) &= v_\alpha^{(s)}(x,1) \quad &\text{для } \alpha\in I_s''. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Для произвольной функции $g(x)$ обозначаем через $[g(x)]_+ = \max\{g(x),0\}$ ее положительную часть. Определим срезающие функции $\varphi_\alpha^{(s)}(x)$ и $\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{(s)}(x) &= \frac{2}{\mu_s}\min\left\{\left[|w_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{\mu_s}{2}\right]_+, \frac{\mu_s}{2}\right\}, \\ \overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x) &= \frac{4}{\mu_s}\min\left\{\left[|w_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{\mu_s}{4}\right]_+, \frac{\mu_s}{4}\right\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

и пусть $G_\alpha^{(s)}, \overline{G}_\alpha^{(s)}$ – носители функций $\varphi_\alpha^{(s)}(x), \overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)$, соответственно.

Отметим некоторые свойства срезающих функций, имеющие важное значение в дальнейшем.

Лемма 4.1. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2), B)$. *Тогда существует* s_1 *такое, что справедливы равенства*

$$G_\alpha^{(s)} \cap G_\gamma^{(s)} = \varnothing, \quad \overline{G}_\alpha^{(s)} \cap \overline{G}_\gamma^{(s)} = \varnothing \tag{4.12}$$

при $s \ge s_1$, $\alpha,\gamma \in I_s$, $\alpha \ne \gamma$.

Доказательство. Достаточно проверить, что при достаточно большом s справедливо включение

$$\overline{G}_\alpha^{(s)} \subset K(x_\alpha^{(s)}, (\lambda_s - 1)\rho_s). \tag{4.13}$$

Для этого оценим $\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)$ в точке x, для $\rho(x, K_s'(\alpha)) \ge \rho_s$. Используя оценку (2.5) и условие $B)$, имеем для такой точки x неравенство

$$|w_\alpha^{(s)}(x)| \le C_{23}\lambda_s^{n-1}\left(\frac{C_m(K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s)}{(\lambda_s\rho_s)^{n-m}}\right)^{1/(m-1)} \le C_{24}\lambda_s^{n-1}\cdot(\lambda_s\rho_s)^{m/(m-1)}. \tag{4.14}$$

Из (4.1) следует оценка

$$C_{24}\,\lambda_s^{n-1}\cdot(\lambda_s\rho_s)^{m/(m-1)} < \frac{\mu_s}{4}$$

при достаточно большом s. Тем самым из неравенства (4.14) получаем

$$\left[\,|\,w_\alpha^{(s)}(x)\,| - \frac{\mu_s}{4}\right]_+ = 0$$

для рассматриваемых значений x. Отсюда следует включение (4.13), а, следовательно, и утверждение леммы.

Лемма 4.2. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2), B)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{\alpha\in I_s}\mathrm{mes}\,G_\alpha^{(s)} = 0. \tag{4.15}$$

Доказательство. Используя лемму 2.1 и неравенство Пуанкаре, получаем

$$\int_{K_s(\alpha)}|\,\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)\,|^m\,dx \le C_{25}(\lambda_s\rho_s)^m\int_{K_s(\alpha)}\left|\frac{\partial\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{25}\left(\frac{4\lambda_s\rho_s}{\mu_s}\right)^m\int_{E_\alpha^{(s)}(\mu_s/2)}\left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx$$

$$\le C_{26}\,\mu_s\left(\frac{\lambda_s\rho_s}{\mu_s}\right)^m(C_m(K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s))^{2/m}(C_m(K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s)+(\lambda_s\rho_s)^n)^{(m-2)/m}, \tag{4.16}$$

где $E_\alpha^{(s)}(\mu) = \{x\in D_s(\alpha): \mu/2 \le |\,w_\alpha^{(s)}(x)\,| \le \mu\}$. Из последнего неравенства и условия $B)$ имеем

$$\mathrm{mes}\,G_\alpha^{(s)} \le C_{27}(\lambda_s\rho_s)^{n+m}\,\mu_s^{1-m}, \tag{4.17}$$

и, следовательно, используя (4.7), получаем

$$\sum_{\alpha\in I_s}\mathrm{mes}\,G_\alpha^{(s)} \le C_{28}(\lambda_s\rho_s)^m\,\mu_s^{1-m}.$$

В силу (4.1) правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s\to\infty$. Это заканчивает доказательство леммы 4.2.

Определим срезающие функции $\varphi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$:

$$\varphi_{\alpha\beta}^{(s)}(x) = \frac{2}{\mu_s}\min\left\{\left[v_{\alpha\beta}^{(s)}(x,1) - \frac{\mu_s}{2}\right]_+, \frac{\mu_s}{2}\right\}$$

для $s = 1,2,\ldots,\ \alpha\in I_s,\ \beta\in I_s(\alpha)$, и пусть $G_{\alpha\beta}^{(s)}$ – носитель функции $\varphi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$.

Лемма 4.3. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2), B)$. *Тогда существует такое число* s_2, *что при* $s\ge s_2$ *справедливо включение*

$$G_{\alpha\beta}^{(s)} \subset K\!\left(x_{\alpha\beta}^{(s)}, \frac{3\rho_s}{2}\right). \tag{4.18}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.

Построим последовательность неотрицательных функций $\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)\equiv 1 \quad \text{для} \quad x\in\bigcup_{\alpha\in I_s}\bigcup_{\beta\in I_s(\alpha)}\{K_s(\alpha,\beta)\setminus\Omega_s\}. \tag{4.19}$$

Для этого упорядочим множество пар векторов (α,β) с $\alpha\in I_s, \beta\in I_s(\alpha)$. Будем писать $(\alpha^{(1)},\beta^{(1)})<(\alpha^{(2)},\beta^{(2)})$ для $\alpha^{(i)}=(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_n^{(i)})$, $\beta^{(i)}=(\beta_1^{(i)},\dots,\beta_n^{(i)})$, $i=1,2$, если в последовательности чисел

$$\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(1)},\dots,\alpha_n^{(2)}-\alpha_n^{(1)}, \quad \beta_1^{(2)}-\beta_1^{(1)},\dots,\beta_n^{(2)}-\beta_n^{(1)},$$

первая, отличная от нуля, разность является положительным числом.

Если $(\alpha^{(0)},\beta^{(0)})$ – такая пара векторов, что $(\alpha^{(0)},\beta^{(0)})\le(\alpha,\beta)$ для всех $\alpha\in I_s,\beta\in I_s(\alpha)$, то определим $\chi^{(s)}_{\alpha^{(0)}\beta^{(0)}}(x)\equiv\varphi^{(s)}_{\alpha^{(0)}\beta^{(0)}}(x)$. Предположим, по индукции, что функции $\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)$ определены для всех (α,β) таких, что $(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})$, и при этом выполнены условия

$$\begin{gathered}\sum_{(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)\equiv 1 \quad \text{для} \quad x\in\bigcup_{(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\{K_s(\alpha,\beta)\setminus\Omega_s\},\\ 0\le\sum_{(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)\le 1 \quad \text{для} \quad x\in\mathbf{R}^n.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Определим функцию $\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)$ равенством

$$\chi^{(s)}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(x)=\varphi^{(s)}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(x)\left(1-\sum_{(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)\right) \tag{4.21}$$

и проверим, что выполнены условия

$$\sum_{(\alpha,\beta)\le(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{(\overline{\alpha}\overline{\beta})}(x)\equiv 1 \quad \text{для} \quad x\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\le(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\{K_s(\alpha,\beta)\setminus\Omega_s\}, \tag{4.22}$$

$$0\le\sum_{(\alpha,\beta)\le(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)\le 1 \quad \text{для} \quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{4.23}$$

Для $x\in\bigcup_{(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\{K_s(\alpha,\beta)\setminus\Omega_s\}$ из (4.20), (4.21) получаем $\chi^{(s)}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(x)=0$, и для таких x тождество (4.22) следует из (4.20). Для $x\in K_s(\overline{\alpha},\overline{\beta})\setminus\Omega_s$ имеем

$$\sum_{(\alpha,\beta)\le(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)=\sum_{(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)+\varphi^{(s)}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(x)\left(1-\sum_{(\alpha,\beta)<(\overline{\alpha},\overline{\beta})}\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)\right)\equiv 1, \tag{4.24}$$

так как $\varphi^{(s)}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(x)\equiv 1$ на $K_s(\overline{\alpha},\overline{\beta})\setminus\Omega_s$.

Из (4.20) следует, что функция $\chi^{(s)}_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}(x)$ неотрицательна. Тем самым обеспечено выполнение первого неравенства в (4.23). Второе неравенство в (4.23) получается из (4.24) и оценки $\varphi^{(s)}_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}(x)\le 1$. Этим заканчивается построение последовательности функций $\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющих тождеству (4.19).

Замечание 4.1. Из леммы 4.3 и (4.21) следует, что для каждой точки $x_0\in\mathbf{R}^n$ множество

$$\{\chi^{(s)}_{\alpha\beta}(x):\alpha\in I_s,\ \beta\in I_s(\alpha)\}$$

содержит не более 2^n ненулевых чисел.

Определим функции $\psi^{(s)}_{\alpha\beta}(x)$ равенством

$$\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)=\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)\left(1-\sum_{\gamma\in I_s}\overline{\varphi}_{\gamma}^{(s)}(x)\right),\quad \alpha\in I_s,\quad \beta\in I_s(\alpha), \tag{4.25}$$

и покажем, что при достаточно больших s справедливо тождество

$$\sum_{\alpha\in I_s}\overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x)+\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)\equiv 1\quad \text{для}\quad x\in\bigcup_{\alpha\in I_s}\{K_s(\alpha)\setminus\Omega_s\}. \tag{4.26}$$

Для $x\in\bigcup_{\alpha\in I_s}\{(K_s(\alpha)\setminus K_s'(\alpha))\setminus\Omega_s\}$ тождество (4.26) непосредственно следует из (4.19), (4.25). Для $x\in K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s$ имеем

$$\overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x)\equiv 1,\ \overline{\varphi}_{\gamma}^{(s)}(x)\equiv 0\quad \text{для}\ s\ge s_1,\quad \gamma\ne\alpha, \tag{4.27}$$

и, следовательно, из (4.25) получаем

$$\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)\equiv 0\quad \text{для}\quad x\in\bigcup_{\alpha\in I_s}\{K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s\},\ s\ge s_1, \tag{4.28}$$

что доказывает тождество (4.26).

Замечание 4.2. Обозначим через $D_{\alpha\beta}^{(s)}$ носитель функции $\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$. Тогда из (4.7), леммы 4.3 и замечания 4.1 следует равенство

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}\operatorname{mes} D_{\alpha\beta}^{(s)}=0.$$

Сейчас мы имеем возможность ввести асимптотическое разложение, играющее основную роль в изучении характера сходимости последовательности $u_s(x)$ и построения усредненной задачи. Определим

$$u_s(x)=u_0^{(s)}(x)+\sum_{j=1}^{5}r_s^{(j)}(x)+w_s(x), \tag{4.29}$$

где

$$\begin{aligned}
r_s^{(1)}(x)\ &=\sum_{\alpha\in I_s}((f(x)-f_{\alpha}^{(s)})-(u_0^{(s)}(x)-u_{\alpha}^{(s)}))\overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x),\\
r_s^{(2)}(x)\ &=\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}((f(x)-f_{\alpha\beta}^{(s)})-(u_0^{(s)}(x)-u_{\alpha\beta}^{(s)}))\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x),\\
r_s^{(3)}(x)\ &=\sum_{\alpha\in I_s}v_{\alpha}^{(s)}(x,f_{\alpha}^{(s)}-u_{\alpha}^{(s)})\varphi_{\alpha}^{(s)}(x),\\
r_s^{(4)}(x)\ &=\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}\overline{v}_{\alpha\beta}^{(s)}(x,f_{\alpha\beta}^{(s)}-u_{\alpha\beta}^{(s)})\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x),\\
r_s^{(5)}(x)\ &=\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}((f_{\alpha}^{(s)}-u_{\alpha}^{(s)})\overline{\varphi}_{\alpha}^{(s)}(x)-v_{\alpha}^{(s)}(x,f_{\alpha}^{(s)}-u_{\alpha}^{(s)})\varphi_{\alpha}^{(s)}(x))\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x).
\end{aligned}$$

Здесь $f_{\alpha\beta}^{(s)},u_{\alpha\beta}^{(s)}$ – средние значения функций $f(x),u_0^{(s)}(x)$ относительно куба $K(x_{\alpha\beta}^{(s)},2\rho_s)$.

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* A_1), A_2), B) *и* $g(x)$ *– произвольная функция класса* $C_0^{\infty}(\Omega)$. *Тогда существует зависящее от* $g(x)$ *число* s_3, *такое, что* $g(x)w_s(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_s)$ *при* $s\ge s_3$, *где* $w_s(x)$ *– остаточный член разложения* (4.29).

Доказательство основано на проверке тождества

$$w_s(x)\equiv 0 \quad \text{для} \quad x\in\bigcup_{\alpha\in I_s}\{K_s(\alpha)\setminus\Omega_s\}, \tag{4.30}$$

которое следует из построения разложения (4.29) и свойств входящих в это разложение срезающих функций.

Лемма 4.5. *При выполнении условий* $A_1), A_2), B)$ *последовательности* $r_s^{(1)}(x)$, $r_s^{(2)}(x)$, $r_s^{(4)}(x)$, $r_s^{(5)}(x)$ *сильно сходятся к нулю в пространстве* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s\to\infty$.

Доказательство. Все указанные последовательности равномерно ограничены. Поэтому их сходимость к нулю в $L_m(\Omega)$ следует из леммы 4.2 и замечания 4.2. Оценим норму градиента $r_s^{(1)}(x)$:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}r_s^{(1)}(x)\right\|_{\mathrm{L_m}(\Omega)}^m \le C_{29}\sum_{\alpha\in I_s}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|^m+\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m\right)(\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x))^m\,dx$$

$$+C_{29}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_0^{(s)}(x)}{\partial x}-\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx$$

$$+C_{29}\sum_{\alpha\in I_s}\int_\Omega(|\,f(x)-f_\alpha^{(s)}\,|^m+|\,u_0^{(s)}(x)-u_\alpha^{(s)}\,|^m)\left|\frac{\partial}{\partial x}\,\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)\right|^m dx. \tag{4.31}$$

Первое слагаемое правой части (4.31) стремится к нулю в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла и леммы 4.2. Второе слагаемое стремится к нулю в силу свойства усредненных функций. Для оценки последнего слагаемого правой части (4.31) используем неравенство

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx\le C_{30}\,(\lambda_s\rho_s)^n\cdot\mu_s^{1-m}, \tag{4.32}$$

которая следует из леммы 2.1 и условия $B)$. Используя (4.32), принадлежность функции $f(x)$ пространству $C^{0,\delta}(\overline{\Omega})$ с некоторым $\delta>0$ и лемму 3.3, получаем

$$\sum_{\alpha\in I_s}\int_\Omega(|\,f(x)-f_\alpha^{(s)}\,|^m+|\,u_0^{(s)}(x)-u_\alpha^{(s)}\,|^m)\left|\frac{\partial\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx$$

$$\le C_{31}\sum_{\alpha\in I_s}(\lambda_s\rho_s)^{n+m\delta}\cdot\mu_s^{1-m}+C_{31}\,\mu_s^{1-m}(\lambda_s\rho_s)^m\int_\Omega\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{4.33}$$

Оба слагаемые правой части (4.33) стремятся к нулю при $s\to\infty$ в силу (4.7) и выбора последовательностей ρ_s,μ_s,λ_s. Тем самым доказано утверждение леммы для $r_s^{(1)}(x)$. Для $r_s^{(2)}(x)$ доказательство аналогично с использованием замечания 4.2.

Используя неравенства (2.4), (4.7) и условие $B)$, имеем

$$\left\|\frac{\partial r_s^{(4)}(x)}{\partial x}\right\|_{L_m(\Omega)}^m\le C_{32}\sum_{\alpha\in I_s}\ \sum_{\beta\in I_s(\alpha)}(\rho_s^n+\mu_s^{1-m}\rho_s^n)\le C_{33}\,\mu_s^{1-m}\,\lambda_s^{-1}, \tag{4.34}$$

и правая часть (4.34) стремится к нулю в силу (4.1). Это доказывает утверждение леммы для

$r_s^{(4)}(x)$.

Наконец, для $r_s^{(5)}(x)$ имеем

$$\left\|\frac{\partial r_s^{(5)}(x)}{\partial x}\right\|_{L_m(\Omega)}^m \le C_{34}\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}\int_\Omega\left|\frac{\partial\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx$$

$$+C_{34}\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m+\mu_s^{-m}\left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m\right)(\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m\,dx. \tag{4.35}$$

Первый член правой части (4.35) оценивается так же, как и при получении неравенства (4.34), и стремится к нулю при $s\to\infty$. Для оценки второго слагаемого правой части (4.35) потребуется неравенство

$$\int_{D_s(\alpha)}\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}(x,q)}{\partial x}\right|^m(\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m\,dx\le C_{35}\,\mu_s^{1-m}(\rho_s)^n, \tag{4.36}$$

справедливое при $|q|\le M$. Для доказательства (4.36) нужно подставить в соответствующее задаче (4.4), (4.5) интегральное тождество пробную функцию $(v_\alpha^{(s)}(x,q)-q)(\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m$. После стандартных оценок получаем

$$\int_{D_s(\alpha)}\left(\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}(x,q)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}(x,q)}{\partial x}\right|^m\right)(\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m\,dx$$

$$\le C_{36}\int_{D_s(\alpha)}\left(|q|^2\left|\frac{\partial}{\partial x}\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)\right|^2+|q|^m\left|\frac{\partial}{\partial x}\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)\right|^m\right)dx.$$

Отсюда оценка (4.36) следует в силу неравенства (2.4) для функции $v_{\alpha\beta}^{(s)}(x,1)$ и условия $B)$.

Из (4.7), (4.36) для второго слагаемого правой части (4.35) следует оценка

$$\sum_{\alpha\in I_s}\sum_{\beta\in I_s(\alpha)}\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m+\mu_s^{-m}\left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m\right)(\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m\,dx\le C_{37}\,\mu_s^{1-2m}\cdot\lambda_s^{-1}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s\to\infty$, и этим заканчивается доказательство леммы 4.5.

Лемма 4.6. *Пусть выполнены условия* $A_1), A_2), B)$. *Тогда последовательность* $r_s^{(3)}(x)$ *слабо сходится к нулю в* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s\to\infty$ *и сильно сходится в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p<m$.

Доказательство. Сходимость $r_s^{(3)}(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$ непосредственно следует из равномерной ограниченности этой последовательности и леммы 4.2. Применяя неравенства (2.4), (4.7) и условие $B)$, имеем оценку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}r_s^{(3)}(x)\right\|_{L_m(\Omega)}^m\le C_{38}\,\mu_s^{-m}\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}(\mu_s)}|v_\alpha^{(s)}(x,f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)})|^m\left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx$$

$$+C_{38}\sum_{\alpha\in I_s}\int_{D_s(\alpha)}\left|\frac{\partial}{\partial x}v_\alpha^{(s)}(x,f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)})\right|^m dx\le C_{39}\sum_{\alpha\in I_s}(\lambda_s\rho_s)^n\le C_{40}. \tag{4.37}$$

Множество $E_\alpha^{(s)}(\mu_s)$ понимается так же, как в (4.16), и поэтому в первом интеграле правой части (4.37) $|v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})|$ оценили сверху числом μ_s.

Так как функция $r_s^{(3)}(x)$ обращается в нуль вне множества $\bigcup_{\alpha\in I_s} G_\alpha^{(s)}$, то, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s^{(3)}(x) \right\|_{L_p(\Omega)} \le \left\| \frac{\partial}{\partial x} r_s^{(3)}(x) \right\|_{L_m(\Omega)} \left(\sum_{\alpha\in I_s} \operatorname{mes} G_\alpha^{(s)} \right)^{1/p-1/m},$$

и правая часть этого неравенства стремится к нулю в силу (4.37), (4.15). Это заканчивает доказательство леммы 4.6.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* $A_1), A_2), B)$ *и* $g(x)-$ *произвольная функция класса* $C_0^\infty(\Omega)$. *Тогда последовательность* $g(x)w_s(x)$ *сильно сходится к нулю в* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s\to\infty$.

Доказательство. Пусть $g(x)\in C_0^\infty(\Omega)$. Без ограничения общности можем предполагать, что $|g(x)|\le 1$ для $x\in\Omega$. Будем считать, что $s\ge s_i$, $i=1,2,3$, где числа s_1, s_2, s_3 определены в леммах 4.1, 4.3, 4.4. Используя лемму 4.4, подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (0.1), (0.2) пробную функцию $|g(x)|^m\, w_s(x)$. Получаем

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}(|g|^m\, w_s)\, dx + \int_\Omega a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) |g|^m\, w_s dx = 0. \tag{4.38}$$

Изучим поведение интегралов в левой части (4.38) при $s\to\infty$. Из леммы 4.5, 4.6 и разложения (4.29) следует сильная сходимость $w_s(x)$ к нулю в $L_m(\Omega)$. Это сходимость также в $L_r(\Omega)$ при любом $r<\infty$, так как последовательность $w_s(x)$ равномерно ограничена. Поэтому из (4.38) следует

$$\lim_{s\to\infty} \int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx = 0. \tag{4.39}$$

Перепишем последний интеграл в форме

$$\int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx = I_1^{(s)} + I_2^{(s)} + I_3^{(s)} + I_4^{(s)}, \tag{4.40}$$

где

$$I_1^{(s)} = \int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx,$$

$$I_2^{(s)} = \int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j\left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x}(u_s - w_s)\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x}(u_0 + r_s^{(3)})\right)\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx,$$

$$I_3^{(s)} = \int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j\left(x, u_s, \frac{\partial}{\partial x}(u_0 - r_s^{(3)})\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx,$$

$$I_4^{(s)} = \int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_j}\, dx.$$

Используя (1.1), получаем оценку

$$I_1^{(s)} \geq \nu_1 \int_\Omega |g(x)|^m \left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{4.41}$$

Проверим, что

$$\lim_{s\to\infty} I_2^{(s)} = 0, \quad \lim_{s\to\infty} I_3^{(s)} = 0. \tag{4.42}$$

Первое равенство непосредственно следует после применения неравенств (1.1) и Гёльдера в силу леммы 4.5 и сильной сходимости усредненных функций. Для проверки второго равенства в (4.42) обозначим через $\chi_s(x)$ характеристическую функцию множества $\bigcup_{\alpha\in I_s} G_\alpha^{(s)}$ и представим

$$I_3^{(s)}(x) = \int_\Omega \sum_{j=1}^n h_{s,j}(x)\,\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,dx$$

$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\alpha\in I_s} \int_{G_\alpha^{(s)}} |g(x)|^m \left(a_j\left(x,u_s,\frac{\partial}{\partial x}\,(u_0+r_s^{(3)})\right) - a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial w_s}{\partial x_j}\,dx, \tag{4.43}$$

где $h_{s,j}(x) = (1-\chi_s(x))\,|g(x)|^m\, a_j\left(x,u_s,\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right)$. Используя (4.15), получаем сильную сходимость последовательности $h_{s,j}(x)$ в $L_{m/(m-1)}(\Omega)$ при $s\to\infty$. Это обеспечивает сходимость к нулю первого интеграла в (4.43). Сходимость к нулю второго слагаемого в (4.43) доказывается применением неравенств (1.1), Гёльдера и леммы 4.2.

Для изучения поведения $I_4^{(s)}$ при $s\to\infty$ перепишем этот интеграл в виде

$$I_4^{(s)} = \int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s^{(3)}(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,dx$$

$$+\sum_{\alpha\in I_s} \int_{G_\alpha^{(s)}} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n \left(a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right) - a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,dx. \tag{4.44}$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $s\to\infty$ в силу (1.1), (4.15).

Для преобразования первого слагаемого в (4.44) определим функцию $\zeta_\alpha^{(s)}(x)$ равенством

$$\zeta_\alpha^{(s)}(x) = \frac{1}{\mu_s}\min\{[|w_\alpha^{(s)}(x)|-\mu_s]_+,\mu_s\},$$

где сохранены те же обозначения, что и в (4.11). Отметим, что справедливо тождество

$$\zeta_\alpha^{(s)}(x)\,\varphi_\alpha^{(s)}(x) \equiv \zeta_\alpha^{(s)}(x) \quad \text{для} \quad \alpha\in I_s,\quad s=1,2,\ldots,\quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{4.45}$$

Используя (4.45) и лемму 4.1, представляем первый интеграл из (4.44) в виде

$$\int_\Omega |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\frac{\partial w_s(x)}{\partial x_j}\,dx = I_5^{(s)} + I_6^{(s)} + I_7^{(s)}, \tag{4.46}$$

где

$$I_5^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s} \int_{G_\alpha^{(s)}} \sum_{j=1}^n a_j\left(x,0,\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|^m\, \zeta_\alpha^{(s)}(x)w_s(x))dx,$$

$$I_6^{(s)} = -\sum_{\alpha\in I_s} \int_{G_\alpha^{(s)}} \zeta_\alpha^{(s)}(x)\, w_s(x) \sum_{j=1}^n a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}|g(x)|^m\, dx,$$

$$I_7^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s} \int_{G_\alpha^{(s)}} |g(x)|^m \sum_{j=1}^n a_j\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_\alpha^{(s)} v_\alpha^{(s)})\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(w_s(x)(1-\zeta_\alpha^{(s)}(x)))dx.$$

Здесь $v_\alpha^{(s)} = v_\alpha^{(s)}(x,\, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})$. Из определения функции $v_\alpha^{(s)}(x,\, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})$ следует $I_5^{(s)} = 0$. В силу леммы 4.6 получаем, что $I_6^{(s)}$ стремится к нулю при $s\to\infty$. Обозначим

$$E_\alpha^{(s)} = \{x\in D_s(\alpha) : |w_\alpha^{(s)}(x)| \le 2\mu_s\} \cap G_\alpha^{(s)}$$

и оценим $I_7^{(s)}$, используя (1.1):

$$|I_7^{(s)}| \le C_{40}\left(\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}}\left(1+\left|\frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right|\right)^m dx\right)^{(m-2)/m}$$

$$\times\left(\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(w_s(1-\zeta_\alpha^{(s)}))\right|^m dx\right)^{1/m}\cdot\left(\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right|^m dx\right)^{1/m}. \qquad (4.47)$$

Покажем дальше, каким образом оценивается каждый из множителей правой части (4.47). По определению $E_\alpha^{(s)}, \varphi_\alpha^{(s)}$ и из неравенства (2.4) и условия $B)$ имеем

$$\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right|^m dx \le C_{41}\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}}\left(\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m + \frac{1}{\mu_s^m}|v_\alpha^{(s)}|^m\left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m\right)dx$$

$$\le C_{42}\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}}\left(\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m + \left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m\right)dx \le C_{43}\sum_{\alpha\in I_s}\mu_s(\lambda_s\rho_s)^m \le C_{44}\cdot\mu_s. \qquad (4.48)$$

Для второго интеграла правой части (4.47) имеем оценку

$$\sum_{\alpha\in I_s}\int_{E_\alpha^{(s)}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(w_s(1-\zeta_\alpha^{(s)}))\right|^m dx \le C_{45}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx + \sum_{\alpha\in I_s}\mu_s^{-m}\int_{E_\alpha^{(s)}}|w_s|^m\left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m dx\right). \qquad (4.49)$$

Дальше оцениваем второе слагаемое в правой части (4.49), используя равенство

$$w_s(x) = u_s(x) - u_0^{(s)}(x) - r_s^{(1)}(x) - r_s^{(3)}(x) - r_s^{(5)}(x) \quad \text{для} \quad x\in E_\alpha^{(s)},$$

следующее из (4.29), так как для рассматриваемых x $\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)\equiv 1$ и, следовательно, $\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)\equiv 0$. Получаем

$$\sum_{\alpha\in I_s}\mu_s^{-m}\int_{E_\alpha^{(s)}}|w_s(x)|^m\left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{46}(I_8^{(s)} + I_9^{(s)} + I_{10}^{(s)} + I_{11}^{(s)}), \qquad (4.50)$$

где

$$I_8^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx,$$

$$I_9^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} (|f(x) - f_\alpha^{(s)}|^m + |u_0^{(s)}(x) - u_\alpha^{(s)}|^m) \left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx,$$

$$I_{10}^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} |v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})|^m \left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx,$$

$$I_{11}^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s} \sum_{\beta\in I_s(\alpha)} \mu_s^{-m} \int_{E_\alpha^{(s)}} (\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x))^m \left|\frac{\partial w_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx.$$

Для оценки $I_8^{(s)}$ подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (4.4), (4.5), пробную функцию

$$|u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \min\{|v_\alpha^{(s)}(x,q)| - 2\mu_s, 0\} (h_\alpha^{(s)}(x))^m,$$

если $2\mu_s < |q| < M$. Здесь $h_\alpha^{(s)}(x)$ – функция класса $C_0^\infty(K(x_\alpha^{(s)},1))$, равная единице в $K_s(\alpha)$, нулю вне $K(x_\alpha^{(s)}, 2\lambda_s\rho_s)$ и такая, что $|\frac{\partial}{\partial x} h_\alpha^{(s)}(x)| \le 2/(\lambda_s\rho_s)$. Получаем

$$\int_{E_\alpha^{(s)}} |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \left|\frac{\partial}{\partial x} v_\alpha^{(s)}(x,q)\right|^m dx$$

$$\le C_{47} \int_{K(x_\alpha^{(s)}, 2\lambda_s\rho_s)} \left(\mu_s^2 \left|\frac{\partial(u_s(x) - u_0^{(s)}(x))}{\partial x}\right|^2 + \mu_s^m \left|\frac{\partial(u_s(x) - u_0^{(s)}(x))}{\partial x}\right|^m \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu_s}{\lambda_s\rho_s}\right)^2 |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^2 + \left(\frac{\mu_s}{\lambda_s\rho_s}\right)^m |u_s(x) - u_0^{(s)}(x)|^m \right) dx. \tag{4.51}$$

Используя лемму 3.2 и выбор ρ_s, имеем из (4.51)

$$I_8^{(s)} \le C_{48}\, \mu_s^{2-m} (1 + R_1^m), \tag{4.52}$$

где R_1 – постоянная из неравенства (1.4).

Аналогично с (4.33), получим оценку для $I_9^{(s)}$:

$$I_9^{(s)} \le C_{49}\, \mu_s^{1-m} ((\lambda_s\rho_s)^m R_1^m + (\lambda_s\rho_s)^{\delta m}). \tag{4.53}$$

Оценка

$$I_{10}^{(s)} \le C_{50}\, \mu_s \tag{4.54}$$

доказывается аналогично неравенству (4.48). Из (4.36) следует неравенство

$$I_{11}^{(s)} \le C_{51}\, \mu_s^{1-2m} \cdot \lambda_s^{-1}. \tag{4.55}$$

Замечая, что $\operatorname{mes} E_\alpha^{(s)}$ возможно оценить по неравенству (4.17), получаем из (4.47)–(4.55)

$$|I_7^{(s)}| \le C_{52}\, \mu_s^{(m-1)/m} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|^m dx + \mu_s^{2-m}(1 + R_1^m) + \mu_s^{1-m}((\lambda_s\rho_s)^m R_1^m + (\lambda_s\rho_s)^{\delta m}) + \mu_s^{1-2m} \cdot \lambda_s^{-1} \right)^{1/m}, \tag{4.56}$$

и правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $s \to \infty$ в силу выбора λ_s, μ_s. Тем самым из (4.44), (4.46), (4.56) получаем

$$\lim_{s\to\infty} I_4^{(s)} = 0. \tag{4.57}$$

Сильная сходимость $g(x)w_s(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ следует из (4.39)–(4.42), (4.57), что и заканчивает доказательство теоремы 4.1.

Доказательство теоремы 1.3. Сильная сходимость последовательности $u_s(x)$ является простым следствием асимптотического разложения (4.29), лемм 4.5, 4.6 и теоремы 4.1. Достаточно заметить, что последовательность $w_s(x)$ сильно стремится к нулю в $W_p^1(\Omega)$ при любом $p<m$. Последнее утверждение следует из оценки

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p dx \le \int_{\Omega'}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^p dx + (\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega'))^{1-p/m}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial w_s(x)}{\partial x}\right|^m dx\right)^{p/m}$$

для произвольной подобласти Ω' области Ω. И правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем выборе Ω' и достаточно большом s.

Замечание 4.3. Из асимптотического разложения (4.29), леммы 4.5 и теоремы 4.1 следует, что для произвольной строго внутренней подобласти Ω' области Ω последовательность $u_s(x)-r_s^{(3)}(x)$ сильно сходится в $W_m^1(\Omega')$ к $u_0(x)$. В этом смысле говорим о $r_s^{(3)}(x)$, как о корректоре в пространстве W_m^1.

Замечание 4.4. Анализируя доказательства, приведенные в данном параграфе, легко видеть, что все рассуждения сохраняются без изменения, если заменить последовательность ρ_s последовательностью $\overline{\rho}_s$ такой, что $\rho_s \le \overline{\rho}_s$, $\overline{\rho}_s \to 0$ при $s\to\infty$. В этом случае, соответственно, и μ_s, λ_s нужно заменить на

$$\overline{\mu}_s = \left(\ln\frac{1}{\overline{\rho}_s}\right)^{-1},\ \overline{\lambda}_s = \left(E\left(\ln\frac{1}{\overline{\rho}_s}\right)\right)^{2m}.$$

§ 5. Вывод предельного уравнения

Начнем с уточнения интегральной оценки для решения модельной задачи (4.4), (4.5).

Лемма 5.1. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2), B)$. *Тогда существует постоянная* K_4, *зависящая лишь от* ν_1,ν_2,n,m,A *и* M, *такая, что при* $s=1,2,\ldots$, $q\in\mathbf{R}^1$, $0<\mu\le|q|$ *справедлива оценка*

$$\int_{E_{\mu,s}(\alpha)}\left(1+\left|\frac{\partial}{\partial x}v_\alpha^{(s)}(x,q)\right|\right)^{m-2}\cdot\left|\frac{\partial}{\partial x}v_\alpha^{(s)}(x,q)\right|^2 dx$$
$$\le K_4\,\mu\,|q|\,(C_m(K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s))^{2/m}(|q|^m\, C_m(K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s)+(\lambda_s\rho_s)^{n+m})^{(m-2)/m}, \tag{5.1}$$

где

$$E_{\mu,s}(\alpha)=\{x\in D_s(\alpha):|v_\alpha^{(s)}(x,q)|\le\mu\}.$$

Доказательство. Для доказательства оценки (5.1) при $\mu=|q|$ подставляем в интегральное тождество, соответствующее задаче (4.4), (4.5), пробную функцию

$$v_\alpha^{(s)}(x,q)-q\widetilde{\varphi}_\alpha^{(s)}(x),\ \widetilde{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)=4\min\left\{\left[|w_\alpha^{(s)}(x)|-\frac{1}{4}\right]_+,\frac{1}{4}\right\},$$

где $w_\alpha^{(s)}(x)$ определена равенством (4.10). Далее проводятся такие же рассуждения, как и при доказательстве леммы 2.1, только с использованием оценки $\operatorname{mes}\{\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}_\alpha^{(s)}\}\le C(\lambda_s\rho_s)^{n+m}$, получаемой аналогично неравенству (4.17). Неравенство (5.1) при $|q|>\mu$ получается далее аналогично доказательству неравенства (2.4) при $|q|>\mu$.

Будем доказывать теорему 1.2 при выполнении условий $A_1),A_2),B),C)$.

Замечание 5.1. Используя условие $C)$, можно получить, что для произвольного положительного числа ε существуют положительные числа $r(\varepsilon)$ и $s(\varepsilon)$ и последовательность $r_s(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю при $s\to\infty$, такие, что

$$\left|\frac{1}{\operatorname{mes}K(x_0,r)}C_A(K(x_0,r)\setminus\Omega_s,q)-c(x_0,q)\right|<\varepsilon \tag{5.2}$$

при $s\ge s(\varepsilon),\ r_s(\varepsilon)\le r\le r(\varepsilon),\ |q|\le M$.

Зафиксируем далее $\varepsilon>0$ и изменим, по сравнению с (4.1), выбор последовательностей ρ_s,μ_s,λ_s. А именно, определим

$$\begin{gathered}\rho_s(\varepsilon)=r_s+\left(\int_\Omega|u_s(x)-u_0(x)|^m\,dx\right)^{1/m}+r_s(\varepsilon),\\ \mu_s(\varepsilon)=\left(\ln\frac{1}{\rho_s(\varepsilon)}\right)^{-1},\ \lambda_s(\varepsilon)=\left(E\left(\ln\frac{1}{\rho_s(\varepsilon)}\right)\right)^{2m}.\end{gathered}\tag{5.3}$$

С учетом этой замены сохраняем все построения предыдущего параграфа. Новые значения множеств $I_s,I_s',I_s'',I_s(\alpha)$ будем обозначать через $I_s(\varepsilon),I_s'(\varepsilon),I_s''(\varepsilon),I_s(\alpha,\varepsilon)$. В силу замечания 4.4 сохраняются все утверждения предыдущего параграфа. Для краткости не будем вводить индекс ε в обозначении кубов разбиения, решений модельных задач и членов асимптотического разложения, сохраняя эти обозначения такими же, как в § 4.

Определим функции

$$\begin{aligned}&\xi_\alpha^{(s)}(x)=v_\alpha^{(s)}(x,f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)})\ \text{ для }\ \alpha\in I_s'(\varepsilon),\\ &\xi_\alpha^{(s)}(x)=v_\alpha^{(s)}(x,2\mu_s(\varepsilon))\qquad \text{ для }\ \alpha\in I_s''(\varepsilon),\end{aligned}\tag{5.4}$$

$$\eta_\alpha^{(s)}(x)=\frac{2}{\mu_s(\varepsilon)}\min\left\{\left[|\xi_\alpha^{(s)}(x)|-\frac{\mu_s(\varepsilon)}{2}\right]_+,\frac{\mu_s(\varepsilon)}{2}\right\}\ \text{ для }\ \alpha\in I_s(\varepsilon),\tag{5.5}$$

где $v_\alpha^{(s)}(x,q)$ имеет такой же смысл, как в § 4, с учетом замены последовательности ρ_s.

Пусть $g(x)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ и определим последовательность

$$g_s(x)=g(x)+\sum_{j=1}^{5}\rho_s^{(j)}(x), \tag{5.6}$$

где

$$\rho_s^{(1)}(x)=\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}(g_\alpha^{(s)}-g(x))\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(2)}(x)=\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}\sum_{\beta\in I_s(\alpha,\varepsilon)}(g_{\alpha\beta}^{(s)}-g(x))\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3)}(x)=-\sum_{\alpha\in I_s'(\varepsilon)}\frac{1}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}}v_\alpha^{(s)}(x,f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)})\eta_\alpha^{(s)}(x)g_\alpha^{(s)}$$

$$-\sum_{\alpha\in I_s''(\varepsilon)}\frac{1}{2\mu_s(\varepsilon)}v_\alpha^{(s)}(x,2\mu_s(\varepsilon))\eta_\alpha^{(s)}(x)g_\alpha^{(s)},$$

$$\rho_s^{(4)}(x)=-\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}\sum_{\beta\in I_s(\alpha,\varepsilon)}\overline{v}_{\alpha\beta}^{(s)}(x,1)\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)g_{\alpha\beta}^{(s)},$$

$$\rho_s^{(5)}(x)=-\left(\sum_{\alpha\in I_s'(\varepsilon)}\left(\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)-\frac{1}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}}v_\alpha^{(s)}(x,f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)})\eta_\alpha^{(s)}(x)\right)g_\alpha^{(s)}\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha\in I_s''(\varepsilon)}\left(\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)-\frac{1}{2\mu_s(\varepsilon)}v_\alpha^{(s)}(x,2\mu_s(\varepsilon))\eta_\alpha^{(s)}(x)\right)g_\alpha^{(s)}\right)\sum_{\gamma\in I_s(\varepsilon)}\sum_{\beta\in I_s(\gamma,\varepsilon)}\chi_{\gamma\beta}^{(s)}(x).$$

Здесь функции $\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x),\psi_{\alpha\beta}^{(s)}(x),\chi_{\alpha\beta}^{(s)}(x)$, числа $f_\alpha^{(s)},u_\alpha^{(s)}$ имеют такой же смысл, как в § 4. Через $g_\alpha^{(s)},g_{\alpha\beta}^{(s)}$ обозначены средние значения функции $g(x)$ относительно кубов $K_s(\alpha)$ и $K_s(\alpha,\beta)$.

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия* $A_1), A_2), B), C)$. *Тогда существует число* s_4, *зависящее от* $g(x)$, *такое, что* $|g(x)|\cdot g_s(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_s)$ *при* $s\geq s_4$.

Доказательство следует из проверки тождества

$$g_s(x)\equiv 0 \text{ для } x\in\bigcup_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}\{K_s(\alpha)\setminus\Omega_s\},$$

следующего из (5.6), свойств решений модельных задач и срезающих функций.

Будем предполагать далее, что

$$\|g(x)\|_{C^1(\overline{\Omega})}\leq 1. \tag{5.7}$$

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия* $A_1), A_2), B), C)$. *Тогда последовательности* $\rho_s^{(1)}(x),\rho_s^{(2)}(x),\rho_s^{(4)}(x),\rho_s^{(5)}(x)$ *сильно сходятся к нулю в* $W_m^1(\Omega)$ *при* $s\to\infty$.

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 4.5.

Лемма 5.4. *Предположим, что выполнены условия* $A_1), A_2), B), C)$. *Тогда последовательность* $\rho_s^{(3)}(x)$ *ограничена в* $W_m^1(\Omega)$ *и сильно сходится к нулю в* $W_p^1(\Omega)$ *при* $p<m$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.6. Нужно только заметить, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{|f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}|^m}\int_{D_s(\alpha)}\left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}(x)\eta_\alpha^{(s)}(x))\right|^m dx\leq C_{53}(\lambda_s\rho_s)^n,$$

следующее из леммы 5.1 и условия $B)$.

В соответствии с леммой 5.2 подставим пробную функцию $|g(x)|\cdot g_s(x)$ в интегральное тождество, соответствующее задаче (0.1), (0.2). Получаем

$$J_1^{(s)}+J_2^{(s)}+J_3^{(s)}=0, \tag{5.8}$$

где

$$J_1^{(s)}=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|g(x))+a_0\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)|g(x)|g(x)\right)dx,$$

$$J_2^{(s)}=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|(\rho_s^{(1)}(x)+\rho_s^{(2)}(x)+\rho_s^{(4)}(x)+\rho_s^{(5)}(x)))\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^5 a_0\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)|g(x)|\rho_s^{(k)}(x)\right)dx,$$

$$J_3^{(s)}=\int_\Omega\sum_{j=1}^n a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|\rho_s^{(3)}(x))dx.$$

Из теоремы 1.3 следует возможность предельного перехода в $J_1^{(s)}$. Имеем

$$J_1^{(s)}=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n a_j\left(x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|g(x))+a_0\left(x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)|g(x)|g(x)\right)dx+\gamma_s^{(1)}. \tag{5.9}$$

Здесь и дальше через $\gamma_s^{(i)}$ обозначаем последовательности, стремящиеся к нулю при $s\to\infty$. Из лемм 5.3, 5.4 и оценки (1.4) следует, что $J_2^{(s)}$ стремится к нулю при $s\to\infty$.

Осталось изучить поведение $J_3^{(s)}$. Используя разложение (4.29) (с соответствующим изменением, связанным с переходом к $\rho_s(\varepsilon)$), получаем

$$J_3^{(s)}=J_4^{(s)}+J_5^{(s)}+J_6^{(s)}+J_7^{(s)}, \tag{5.10}$$

где

$$J_4^{(s)}=\int_\Omega\sum_{j=1}^n\left(a_j\left(x,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)-a_j\left(x,u_s,\frac{\partial}{\partial x}(u_0+r_s^{(3)})\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|\rho_s^{(3)}(x))dx,$$

$$J_5^{(s)}=\int_\Omega\sum_{j=1}^n\left(a_j\left(x,u_s,\frac{\partial}{\partial x}(u_0+r_s^{(3)})\right)-a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|\rho_s^{(3)}(x))dx,$$

$$J_6^{(s)}=\int_\Omega\sum_{j=1}^n\left(a_j\left(x,u_s,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)-a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|\rho_s^{(3)}(x))dx,$$

$$J_7^{(s)}=\int_\Omega\sum_{j=1}^n a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|g(x)|\rho_s^{(3)}(x))dx.$$

Легко доказать, что справедливо неравенство

$$|J_4^{(s)}|+|J_5^{(s)}|+|J_6^{(s)}|\le\gamma_s^{(2)}. \tag{5.11}$$

Оценки для $J_4^{(s)},J_5^{(s)}$ доказываются аналогично доказательству равенств (4.42). Оценка $J_6^{(s)}$ аналогична оценке второго слагаемого в (4.44).

Представим $J_7^{(s)}$ в виде

$$J_7^{(s)} = -\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \frac{|g_\alpha^{(s)}|\, g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j\left(x,0,\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x_j}\,dx + \sum_{i=1}^{6} R_i^{(s)}, \qquad (5.12)$$

где

$$R_1^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s''(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \frac{|g_\alpha^{(s)}|\, g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j\left(x,0,\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x_j}\,dx,$$

$$R_2^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s'(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \frac{g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}} \int_{F_s(\alpha)} |g(x)| \left(a_j\left(x,0,\frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x_j} - a_j\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)})\right)dx,$$

$$R_3^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s'(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \frac{g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}} \int_{F_s(\alpha)} (|g_\alpha^{(s)}| - |g(x)|)\, a_j\left(x,0,\frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x_j}\,dx,$$

$$R_4^{(s)} = \sum_{\alpha\in I_s'(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \frac{|g_\alpha^{(s)}|\, g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)\setminus F_s(\alpha)} a_j\left(x,0,\frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_\alpha^{(s)}}{\partial x_j}\,dx,$$

$$R_5^{(s)} = -\sum_{\alpha\in I_s''(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} g_\alpha^{(s)} \int_{\Omega} |g(x)|\, a_j\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)})\,dx,$$

$$R_6^{(s)} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \rho_s^{(3)}(x)\, a_j\left(x,0,\frac{\partial r_s^{(3)}}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}|g(x)|\,dx.$$

Здесь $v_\alpha^{(s)} = v_\alpha^{(s)}(x, f_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)})$, $F_s(\alpha)$ – носитель функции $\eta_\alpha^{(s)}(x)$.

Лемма 5.5. *При выполнении условий* $A_1), A_2), B), C)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{6} |R_i^{(s)}| = 0. \qquad (5.13)$$

Доказательство. Отметим вначале, что при $\alpha\in I_s''$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\int_{D_s(\alpha)} \left(1+\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^2 dx \le C_{54}\,|f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}|^2\,(\lambda_s(\varepsilon)\rho_s(\varepsilon))^n(\mu_s(\varepsilon))^{m-2},\\ \int_{D_s(\alpha)} \left(1+\left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)})\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)})\right|^2 dx \le C_{54}(\lambda_s(\varepsilon)\,\rho_s(\varepsilon))^n(\mu_s(\varepsilon))^{m},\\ \int_{D_s(\alpha)} \left(1+\left|\frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right|^2 dx \le C_{54}(\lambda_s(\varepsilon)\,\rho_s(\varepsilon))^n\mu_s(\varepsilon)),\end{gathered} \qquad (5.14)$$

следующие из леммы 5.1.

Используя неравенства (1.1), (4.7), (5.14) и выбор $\rho_s(\varepsilon), \mu_s(\varepsilon), \lambda_s(\varepsilon)$ получаем, что $R_1^{(s)}$ и $R_5^{(s)}$ стремятся к нулю при $s\to\infty$. Из (5.1), (5.7) следует, что $R_3^{(s)}$ стремится к нулю. Так как

$$D_s(\alpha)\setminus F_s(\alpha) = \left\{x\in D_s(\alpha) : |\xi_\alpha^{(s)}(x)| \le \frac{\mu_s(\varepsilon)}{2}\right\},$$

то стремление к нулю $R_4^{(s)}$ следует из (5.1).

При оценке $R_2^{(s)}$ будем использовать неравенства

$$\begin{gathered}\int_{F_s(\alpha)} \left(\left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)}) - \frac{\partial}{\partial x}\xi_\alpha^{(s)}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)}) - \frac{\partial}{\partial x}\xi_\alpha^{(s)}\right|^m\right) dx \le C_{55}\,\mu_s(\varepsilon)\,|f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}|\,(\lambda_s(\varepsilon)\rho_s(\varepsilon))^n,\\ \int_{F_s(\alpha)} \left(\left|\frac{\partial}{\partial x}\xi_\alpha^{(s)}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x}\xi_\alpha^{(s)}\right|^m + \left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)})\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi_\alpha^{(s)}\eta_\alpha^{(s)})\right|^m\right) dx \le C_{55}(\lambda_s(\varepsilon)\rho_s(\varepsilon))^n,\end{gathered} \qquad (5.15)$$

следующие из определения функций $\xi_\alpha^{(s)}(x), \eta_\alpha^{(s)}(x)$ и неравенства (5.1). Используя (1.1), (4.7), (5.15), получаем, что $R_2^{(s)}$ стремится к нулю. Наконец, сходимость к нулю последовательности $R_6^{(s)}$ следует из лемм 4.6, 5.4. Тем самым закончено доказательство леммы 5.5.

Осталось рассмотреть поведение первого слагаемого в равенстве (5.12).

Лемма 5.6. *При выполнении условий* $A_1), A_2), B), C)$ *справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \frac{|g_\alpha^{(s)}|\, g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j\left(x,0,\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x_j}\,dx \right.$$

$$\left. -\int_\Omega c(x,f(x)-u_0(x))\,|g(x)|\,g(x)\,dx \right| \le \varepsilon \operatorname{mes}\Omega+\gamma_s^{(3)}, \tag{5.16}$$

где ε *– положительное число, фиксированное при определении последовательностей* $\rho_s(\varepsilon), \mu_s(\varepsilon), \lambda_s(\varepsilon)$.

Используя обозначение (1.8) и неравенство (5.2) имеем оценку

$$\left| \sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{n} \frac{|g_\alpha^{(s)}|\, g_\alpha^{(s)}}{f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}} \int_{D_s(\alpha)} a_j\left(x,0,\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x_j}\,dx \right.$$

$$\left. -\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} |g_\alpha^{(s)}|\, g_\alpha^{(s)} c(x_\alpha^{(s)}, f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}) \operatorname{mes} K_s'(\alpha) \right| \le \varepsilon \operatorname{mes}\Omega, \tag{5.17}$$

если s столь большое, что $\lambda_s(\varepsilon)\,\rho_s(\varepsilon) < r(\varepsilon),\ s \ge s(\varepsilon)$.

Из (5.7) и непрерывности функции $c(x,q)$ получаем

$$\left| \sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} |g_\alpha^{(s)}|\, g_\alpha^{(s)}\, c(x_\alpha^{(s)},\, f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}) \operatorname{mes} K_s'(\alpha) \right.$$

$$\left. -\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} \int_{K_s'(\alpha)} c(x,\, f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)})\,|g(x)|\,g(x)\,dx \right| \le \gamma_s^{(4)}. \tag{5.18}$$

Для дальнейшей оценки заметим, что при $|q'|,|q''| \le M$ справедливо неравенство

$$|c(x,q')-c(x,q'')| \le C_0\,|q'-q''|, \tag{5.19}$$

следующее из леммы 2.2 и условия $B)$.

Используя гёльдеровость функции $f(x)$, (5.19) и лемму 3.3, получаем

$$\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} \int_{K_s'(\alpha)} |c(x,\, f_\alpha^{(s)}-u_\alpha^{(s)}) - c(x, f(x)-u_0^{(s)}(x))|\,|g(x)|^2\,dx$$

$$\le \gamma_s^{(5)} + C_{56}\left(\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)} \int_{K_s'(\alpha)} |u_\alpha^{(s)}-u_0^{(s)}(x)|^m |g(x)|^m\,dx\right)^{1/m}$$

$$\le \gamma_s^{(5)} + C_{57}\,\lambda_s(\varepsilon)\rho_s(\varepsilon)\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x}u_0(x)\right|^m dx\right)^{1/m} \le \gamma_s^{(6)}. \tag{5.20}$$

Наконец, из ограниченности функции $c(x,f(x)-u_0(x))$, леммы 3.2 и неравенств (5.19), (4.7) имеем

$$\left|\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}\int_{K'_s(\alpha)} c(x,\, f(x)-u_0^{(s)}(x))\,|\,g(x)\,|\,g(x)\,dx-\int_\Omega c(x,\, f(x)-u_0(x))\,|\,g(x)\,|\,g(x)\,dx\right|$$

$$\le C_{58}\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}\operatorname{mes}(K_s(\alpha)\setminus K'_s(\alpha))+C_{58}\left(\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}\int_{K'_s(\alpha)}|\,u_0^{(s)}(x)-u_0(x)\,|^m|\,g(x)\,|^m\,dx\right)^{1/m}$$

$$\le C_{59}\sum_{\alpha\in I_s(\varepsilon)}\Big((\lambda_s(\varepsilon)\ \rho_s(\varepsilon))^n-((\lambda_s(\varepsilon)-2)\,\rho_s(\varepsilon))^n\Big)+C_{59}\,\lambda_s(\varepsilon)\rho_s(\varepsilon)\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right|^m dx\right)^{1/m}\le\gamma_s^{(7)}. \qquad (5.21)$$

Теперь неравенство (5.16) следует из оценок (5.17)–(5.21). Из (5.8)–(5.13), (5.16) получаем

$$\left|\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n a_j\left(x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(|\,g(x)\,|\,g(x))\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(a_0\left(x,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)-c(x,\, f(x)-u_0(x))\right)|\,g(x)\,|\,g(x)\right)dx\ \right|\le\varepsilon\operatorname{mes}\Omega+\gamma_s^{(8)}. \qquad (5.22)$$

Пользуясь произвольным выбором ε и стремлением $\gamma_s^{(8)}$ к нулю, получаем равенство нулю левой части (5.22). Отсюда следует, что $u_0(x)$ – решение задачи (1.10), (1.11). Это завершает доказательство теоремы 1.4.

1. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Граничные задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. *Скрыпник И.В.* Квазилинейная задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 2. С. 21–25.
3. *Скрыпник И.В.* Поточечная оценка некоторых емкостных потенциалов // Общая теория граничных задач. Киев: Наукова думка, 1983. С. 198–296.
4. *Skrypnik I.V.* Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Leipzig: Teubner-Verlag, 1986.
5. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
6. *Скрыпник И.В.* Усреднение нелинейных задач Дирихле в областях с каналами // ДАН. 1990. Т. 315. № 4. С. 793–797.
7. *Скрыпник И.В.* Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 10. С. 67–90.
8. *Dal Maso G., Murat F.* Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators on H_0^1 // Calculus of Variations Homogenization and Continuum Mechanics. Singapore: World Scientific, 1994. P. 177–202.

9. *Dal Maso G., Murat F.* Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators. Trieste: Preprint SISSA, 1994.
10. *Ковалевский А.А.* О G-сходимости операторов Дирихле в переменных областях // Докл. АН Украины. Сер. А. 1993. № 5. С. 13-17.
11. *Панкратов Л.С.* О сходимости решений вариационных задач с слабо связанными областями. Харьков: Препринт ФТИНТ, 1988.
12. *Dal Maso G., Garroni A.* New results on the asymptotic behaviour of Dirichlet problems in perforated domains // Math. Models Methods Appl. Sci. 1994. V. 3. P.373–407.
13. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
14. *Скрыпник И.В., Наумова М.А.* Поточечные оценки решений квазилинейных эллиптических задач в областях с тонкой полостью // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. № 10. С. 1417–1432.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

*(Доклады Академии наук. – 1997. – **352**, № 4)*

В работе построена усредненная граничная задача для последовательности квазилинейных параболических задач с граничным условием Дирихле в областях с мелкозернистой границей. Усреднение основано на асимптотическом разложении решений задач в перфорированных областях и поточечных оценках решений модельных нелинейных параболических уравнений.

Пусть Ω – ограниченная область в $R^n, n \geq 3$; предположим, что при каждом натуральном числе s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)},\ i = 1, \ldots, I(s)$, содержащихся в Ω. В цилиндрической области $Q_T^{(s)} = \Omega^{(s)} \times (0,T)$, $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$ рассматривается квазилинейная параболическая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x,t) \in Q_T^{(s)}, \tag{1}$$

$$u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega^{(s)} \times (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \quad x \in \Omega^{(s)}, \tag{3}$$

с известными функциями $f(x,t)$ и $f_0(x)$, определенными соответственно в $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$ и $\overline{\Omega}$.

При формулируемых далее условиях просто доказывается существование решения $u_s(x,t)$ задачи (1)–(3) и слабая сходимость последовательности $u_s(x,t)$ к некоторой предельной функции $u_0(x,t)$. В работе строится новая (усредненная) граничная задача для функции $u_0(x,t)$ в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Построение усредненной задачи основывается на предложенном в [1] асимптотическом разложении, связанном с локализацией как по пространственным, так и по временной координате. Анализ асимптотического поведения и вывод усредненной задачи базируются на поточечной оценке решений модельной нелинейной параболической задачи, доказанной в [2].

Усреднение эллиптических задач в областях с мелкозернистой границей изучалось для линейных уравнений в работах В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова (см. [3]) и для нелинейных уравнений в работах автора [4]–[6].

1. Будем предполагать, что функции $a_j(x,t,u,p),\ j = 0,1,\ldots,n$, определены при $(x,t) \in R^n \times R^1$, $(u,p) \in R^1 \times R^n$ и удовлетворяют условиям:

(A₁) функции $a_j(x,t,u,p)$ непрерывны по u,p при почти всех $(x,t)\in R^n\times R^1$, измеримы по x,t при всех $(u,p)\in R^1\times R^n$, $a_j(x,t,u,0)=0$ при $(x,t)\in R^n\times R^1$, $u\in R^1$, $j=1,...,n$, $a_0(x,t,0,0)=0$;

(A₂) существуют положительные постоянные ν_1,ν_2 такие, что при $(x,t)\in R^n\times R^1$, $u\in R^1$, $p,q\in R^n$ выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}[a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,u,q)](p_j-q_j)\geq\nu_1|p-q|^2,\\ |a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,u,q)|\leq\nu_2|p-q|,\quad j=1,...,n,\\ |a_0(x,t,u,p)|\leq\nu_2(|u|+|p|)+\varphi(x,t),\end{gathered}\tag{4}$$

где $\varphi(x,t)\in L_r(Q_T)$, $r>\dfrac{n+2}{2}$.

Замечание. В неравенствах (4) мы ограничились наиболее простыми условиями роста коэффициентов $a_j(x,t,u,p)$ по u,p. Эти условия могут быть ослаблены с учетом соответствующих теорем вложения (см. [7]).

Так же как в работе [1], задачу можно свести к рассмотрению случая $f_0(x)\equiv 0$ и в дальнейшем начальное условие (3) заменим условием

$$u(x,0)=0,\ x\in\Omega^{(s)}.\tag{5}$$

Будем предполагать следующее условие относительно функции $f(x,t)$:

(F) функция $f(x,t)$ определена при $(x,t)\in\overline{\Omega}\times R^1$, ограничена, равна нулю при $t<0$ и принадлежит в цилиндре $Q=\Omega\times R^1$ пространству $W_2^{1,1/2}(Q)$.

Используемые здесь и далее обозначения функциональных пространств понимаются согласно [7].

Просто проверяется, что условия A₁, A₂, F обеспечивают разрешимость задачи (1), (2), (5) в пространстве $V_2(Q_T^{(s)})$ при любом $T<+\infty$. Более того, решения $u_s(x,t)$ этой задачи принадлежат пространству $W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{(s)})$, и существует не зависящая от s постоянная M такая, что при всех s справедливы оценки

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u_s(x,t)|:(x,t)\in Q_T^{(s)}\}\leq M,\ \ \|u_s(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})}\leq M.\tag{6}$$

Доопределим функции $u_s(x,t)$ на Q_T, полагая их равными $f(x,t)$ вне $Q_T^{(s)}$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что $u_s(x,t)$ при $s\to\infty$ слабо сходится к $u_0(x,t)$ в $W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$.

Из [1] следует, что для произвольной функции $\psi(x,t)\in \overset{0}{W}{}_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{(s)})\cap W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q^{(s)})$ и произвольной функции $\eta(t)\in C^1(R^1)$ с носителем в интервале $(-T,T)$ справедливо интегральное тождество

$$\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(u_s\eta)](x,\alpha)\overline{[F\psi](x,\alpha)}dxd\alpha+$$

$$+\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\left\{u_s(x,t)\psi(x,t)\frac{d\eta(t)}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+a_0\left(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\psi(x,t)\right\}dx\,dt=0. \qquad (7)$$

Здесь $F(u_s\eta), F\psi$ – преобразования Фурье функций $u_s\eta,\psi$ переменной t, черта над $[F\psi](x,\alpha)$ обозначает комплексное сопряжение, и при этом полагаем $u_s(x,t)\equiv 0$ при $t<0$. Кроме того, можно показать, что $u_s(x,t)\eta(t)\in W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q^{(s)}),\ Q^{(s)}=\Omega^{(s)}\times R^1$.

Сформулируем предположения относительно множеств $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и определим точку $x_i^{(s)}$ условием $F_i^{(s)}\subset\overline{B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})}$. Здесь и далее $B(x_0,\rho)$ – шар радиуса ρ с центром в x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup\limits_{j\neq i}B(x_j^{(s)},d_j^{(s)})\cup\partial\Omega$. Предположим выполнение условий:

(B_1) справедливо равенство

$$\lim_{s\to\infty}r^{(s)}=0,\quad r^{(s)}=\max\{r_i^{(s)}:i=1,\dots,I(s)\}; \qquad (8)$$

(B_2) существует положительная постоянная C_0 такая, что при $i=1,\dots,I(s),\ s=1,2,\dots,$ выполнены оценки

$$d_i^{(s)}\le C_0r_i^{(s)},\quad \sum_{i=1}^{I(s)}[d_i^{(s)}]^{2(n-2)}[r_i^{(s)}]^{-n}\le C_0. \qquad (9)$$

В дальнейшем $T>\frac{1}{2}, T'=T-\frac{1}{2}$. Построение усредненной задачи осуществляется в цилиндре $Q_{T'}$, что не ограничивает общности в силу произвольности T.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, F, B_1,B_2, $u_s(x,t)$ *– решение задачи* (1), (2), (5), *и пусть последовательность* $u_s(x,t)$ *слабо сходится в* $W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T)$ *к* $u_0(x,t)$. *Тогда при произвольном* $p\in(1,2),\ h_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\int\limits_{\Omega}|u_s(x,t)-u_0(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_{T'}}\left|\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\operatorname*{ess\,sup}_{0<h<h_0}\left[h^{-p/2}\iint\limits_{Q_{T'}}|u_s(x,t+h)-u_0(x,t+h)-u_s(x,t)+u_0(x,t)|^p\,dxdt\right]\right\}=0. \qquad (10)$$

Утверждение теоремы следует из установленного в [1] поведения членов асимптотического разложения последовательности $u_s(x,t)$. Отметим, что поведение остаточного члена разложения основывается на интегральном тождестве для решения задачи (1), (2), (5) в форме (7).

2. Для построения усредненной задачи понадобится еще дополнительное условие. Для его формулировки проведем вспомогательные построения. Обозначим $\lambda_s = \left[\ln \frac{1}{r^{(s)}}\right]^{-1}$, $s = 1,2,\ldots$, и определим $\rho_i^{(s)}$ при $i = 1,\ldots,I(s)$ равенствами

$$\rho_i^{(s)} = \begin{cases} 2d_i^{(s)}, \text{ если } i \in I'(s) = \left\{ i = 1,\ldots,I(s) : d_i^{(s)} \ge [r_i^{(s)}]^{\frac{n}{n-2}} \lambda_s^{-1} \right\}, \\ [r_i^{(s)}]^{\frac{n}{n-2}} \lambda_s^{-2}, \text{ если } i \in I''(s) = \left\{ i = 1,\ldots,I(s) : d_i^{(s)} < [r_i^{(s)}]^{\frac{n}{n-2}} \lambda_s^{-1} \right\}. \end{cases}$$

Можно считать в дальнейшем s настолько большим, чтобы $\rho_i^{(s)} \le \frac{1}{4} r_i^{(s)}$ при $i \in I''(s)$, $d_i^{(s)} \le \frac{1}{2}$, $\lambda_s < \frac{1}{16}$.

Для заданной пары значений (i,s) таких, что $i \in I''(s)$, $s = 1,2,\ldots$, разделим отрезок $[0,T']$ на $K(i,s)$ отрезков равной длины точками $t_{i,k}^{(s)}$, $k = 0, 1,\ldots,K(i,s)$, так, чтобы $t_{i,0}^{(s)} = 0$, $t_{i,K(i,s)}^{(s)} = T'$ и выполнялось неравенство $\frac{1}{2}[\rho_i^{(s)}]^2 \le t_{i,k}^{(s)} - t_{i,k-1}^{(s)} \le [\rho_i^{(s)}]^2$. Определим для $i = 1,\ldots,I(s)$, $s = 1,2,\ldots$, $q \in R^1$ функцию $v_i^{(s)}(x,t,q)$ как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x,t,u_s(x,t),\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \quad (x,t) \in G_i^{(s)} \times (-T,T), \tag{11}$$

$$v(x,t) = q\omega(|x - x_i^{(s)}|)\omega\left(-\frac{t}{T}\right), \quad (x,t) \in \partial G_i^{(s)} \times (-T,T), \tag{12}$$

$$v(x,-T) = 0, \quad x \in G_i^{(s)}, \tag{13}$$

где $G_i^{(s)} = B(x_i^{(s)},1) \setminus F_i^{(s)}$, $\omega(r)$ – фиксированная функция класса $C^\infty(R^1)$, равная единице при $r \le \frac{1}{2}$, нулю при $r \ge 1$ и такая, что $0 \le \omega(r) \le 1$. Продолжим функцию $v_i^{(s)}(x,t,q)$ на $R^n \times R^1$, полагая ее равной нулю вне $B(x_i^{(s)},1) \times (-T,T)$ и $q\omega\left(-\frac{t}{T}\right)$ при $(x,t) \in F_i^{(s)} \times (-T,T)$.

При построении усредненной задачи ключевую роль играют поточечные оценки функции $v_i^{(s)}(x,t,q)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2. *Тогда существует постоянная* K, *зависящая только от* ν_1,ν_2,n,T, *такая, что при* $(x,t) \in G_i^{(s)} \times (-T,T)$, $q_1,q_2 \in R^1$ *справедлива оценка*

$$|v_i^{(s)}(x,t,q_1) - v_i^{(s)}(x,t,q_2)| \le |q_1 - q_2| \min\left\{ K\left(\frac{d_i^{(s)}}{|x - x_i^{(s)}|}\right)^{n-2}, 1 \right\}. \tag{14}$$

Доказательство (14) основывается на поточечной оценке, доказанной в [2].

Будем предполагать выполнение условия

(C) существует непрерывная функция $c(x,t,q)$ такая, что для произвольного шара $B \subset Q_T$ имеет место равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{(i,k)\in I_s(B)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q} \iint\limits_{Q_{ik}^{(s)}} a_j\left(x,t,u_s(x,t),\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x}\right)\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q)}{\partial x_j}dx\,dt = \iint\limits_B c(x,t,q)dx\,dt, \tag{15}$$

$$Q_{ik}^{(s)} = B(x_i^{(s)},2\rho_i^{(s)})\times(t_{i,k-1}^{(s)},t_{i,k}^{(s)}).$$

В (15) $I_s(B)$ – множество пар (i,k), для которых $i \in I''(s),\ k=1,...,K(i,s),\ (x_i^{(s)},t_{i,k}^{(s)}) \in B$.

Основным результатом работы является

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 *и условие* C. *Тогда функция* $u_0(x,t)$ *является решением задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c(x,t,f(x,t)-u),\quad (x,t)\in Q_{T'}, \tag{16}$$

$$u(x,t) = f(x,t),\quad (x,t)\in \partial\Omega\times(0,T'), \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0,\quad x\in\Omega, \tag{18}$$

где $c(x,t,q)$ *– функция, определенная в условии* C.

3. Доказательство теоремы 3 основано на подстановке в тождество (7) пробной функции

$$h_{s,m}(x,t) = h(x,t) - \sum_{(i,k)\in J'_{sm}} v_i^{(s)}(x,t,f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}) \times \frac{h_{ik}^{(s)} g_{ik}^{(s)}(t)}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}} \varphi_i^{(s)}(x) -$$

$$- \sum_{(i,k)\in J''_{sm}} v_i^{(s)}(x,t,1)\times h_{ik}^{(s)} g_{ik}^{(s)}(t)\varphi_i^{(s)}(x) + R_s(x,t), \tag{19}$$

где $h(x,t)$ – произвольная функция класса $C_0^\infty(Q)$, $R_s(x,t)$ – зависящий от $h(x,t)$ остаточный член, который можно выбрать таким образом, чтобы

$$h_{s,m}(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,\frac{1}{2}}(Q_T^{(s)}),$$

$$\|R_s(x,t)\|_{W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)} \to 0 \text{ при } s\to\infty.$$

При построении пробной функции $h_{s,m}(x,t)$ выбирается последовательность функций $u_m^{(0)}(x,t) \in C^\infty(\overline{Q}),\ m=1,2,...$, сходящихся к $u_0(x,t)$ в $W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$. В (19) $f_{ik}^{(s)}, h_{ik}^{(s)}, u_{ikm}^{(s)}$ – соответственно средние значения функций $f(x,t), h(x,t), u_m^{(0)}(x,t)$ относительно цилиндра $B(x_i^{(s)},2\rho_i^{(s)})\times(t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k}^{(s)})$, где $t_{i,k}^{(s)}$ – выбранные раньше точки разбиения отрезка $[0,T']$. Пара индексов $(i,k),\ i\in I''(s),\ k=1,...,K(i,s)$ принадлежит J'_{sm}, если $|f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}| \ge d_i^{(s)}$, и принадлежит J''_{sm} в противоположном случае. В (19) $g_{ik}^{(s)}(t), \varphi_i^{(s)}(x)$ – срезывающие функции, носители которых содержатся соответственно в интервале $(t_{i,k-1}^{(s)} + \lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{i,k}^{(s)} - \lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2)$ и шаре $B(x_i^{(s)},2\rho_i^{(s)})$.

Теорема 3 доказывается путем подстановки в (7) функции $h_{s,m}(x,t)$, использования аналога асимптотического разложения из [1] для $u_s(x,t)$ и поточечных и интегральных оценок функций $v_i^{(s)}(x,t,q)$.

1. *Скрыпник И.В.* // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45. № 11. С. 1542–1566.
2. *Скрыпник И.В.* В сб.: Нелинейные граничные задачи. 1991. В. 3. С. 72–86.
3. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974. 278 с.
4. *Скрыпник И.В.* // Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. № 2. С. 21–26.
5. *Skrypnik I.V.* Non-linear Elliptic Boundary Value Problems. Leipzig: Teubner Verlagsgesellshaft, 1986. 232 p.
6. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990. 442 с.
7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 726 с.

ON COMPENSATED COMPACTNESS FOR NONLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS IN PERFORATED DOMAINS

(Украинский математический журнал. – 2000. – ***52****, № 11)*

1. Introduction. Let Ω be a bounded open set in the n-dimensional Euclidean space R^n and let $\Omega_s \subset \Omega,\ s = 1,2,\dots$, be a sequence of subdomains. In Ω_s we consider a nonlinear elliptic boundary-value problem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(x), \quad x \in \Omega_s, \tag{1.1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega_s. \tag{1.2}$$

The asymptotic behaviour of solutions of such type problem for $s \to \infty$ was studied in papers [1–3], monographs [4–5] and in papers of another authors (see [6–9] and references in [1]) for nonlinear equations satisfying strong monotonicity assumptions.

A new monotonicity approach for the study of the asymptotic behaviour of solutions of the problem (1.1), (1.2) for the equations (1.1) satisfying weak monotonicity condition was developed in the paper [10]. In this paper we assumed that C_m – capacity of the part of the holes $\Omega \setminus \Omega_s,\ s = 1,2,\dots,$ in small cubes is estimated by Lebesgue measure of the cubes. This approach was based on new Convergence Theorem that is analogous to well known compensated compactness principle [11], [12] for linear equations with periodic coefficients.

The aim of this paper is to establish analogous Convergence Theorem under very weak assumptions on the sets Ω_s that are coincided with corresponding conditions in [1]. Our main hypothesis is the following condition B_1 where $K(x,r)$ denotes the closed cube at center x and side $2r$, and $C_m(F)$ is the m – capacity of a closed set $F \subset \Omega$ with respect to a fixed bounded open set Ω_0 such that $\Omega \subset \Omega_0$, $\rho(\partial\Omega_0, \Omega) \geq 1$, where $\rho(\partial\Omega_0, \Omega)$ is the distance from $\partial\Omega_0$ to Ω.

Condition B₁. There exist a non-negative bounded measure $\nu(B)$, defined for every Borel set $B \subset \Omega$, and a sequence $\rho_s > 0$, tending to zero as $s \to \infty$ such that the inequality

$$C_m(K(x,r) \setminus \Omega_s) \leq \nu(K(x, r + \rho_s))$$

holds for every $x \in \Omega$ and for every $r \geq \rho_s$ with $K(x, r + \rho_s) \subset \Omega$.

We take the attention of the reader that the Convergence Theorem of this paper gives us a possibility to make principal modification in the construction of the corrector in the paper [1]. In the paper [1] the definition of the subdivision of the domain and consequently the construction of the asymptotic expansion was connected with the sequence of solutions $u_s(x)$ of the problem (1.1), (1.2). Using the Convergence Theorem of this paper we can construct corresponding subdivision and the asymptotic expansion without the connection with $u_s(x)$.

Using the Convergence Theorem of this paper we are able to analyse the asymptotic behaviour of solutions of the problem (1.1), (1.2) with weak monotonicity assumption for $a_j(x,p),\ j=1,\dots,n$, in the sequence of domains Ω_s satisfying the condition B_1. This result will be published in forthcoming paper of the author.

2. Statement of the main result. We assume that the functions $a_j(x,p),\ j=1,\dots,n$, are defined for $x\in R^n$, $p\in R^n$, and satisfy the following conditions:

Condition A_1. The functions $a_j(x,p)$ are continuous in p for almost all $x\in R^n$ and measurable in x for all $p\in R^n$.

Condition A_2. There exists positive constants ν_1,ν_2 and $m\in[2,n)$ such that for $x\in R^n$, $p,q\in R^n$ the inequalities

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,p)p_j \geq \nu_1 |p|^m, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j(x,p)-a_j(x,q)](p_j-q_j)\geq 0, \tag{2.2}$$

$$|a_j(x,p)|\leq \nu_2 |p|^{m-1},\ j=1,\dots,n, \tag{2.3}$$

hold.

Remark 2.1. The inequality (2.2) means the weak monotonicity assumption for the equation (1.1). The strong monotonicity condition from [1–10] is the following inequality

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j(x,p)-a_j(x,q)](p_j-q_j)\geq \nu_1 |p-q|^m .$$

Remark 2.2. We can replace in right-hand sides of inequalities (2.1), (2.3) $|p|^m, |p|^{m-1}$ by $(1+|p|)^{m-2}|p|^2, (1+|p|)^{m-1}|p|$ respectively.

Our main assumption on the sequence Ω_s is condition B_1 which was formulated in the introduction in terms of the m-capacity $C_m(F)$. For every compact set F contained in Ω_0 the m-capacity $C_m(F)$ of F with respect Ω_0 is defined by equality

$$C_m(F)=\inf \int_{\Omega_0} \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|^m dx, \tag{2.4}$$

where the infimum is taken over all functions $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega_0)$ which satisfy the equality $\varphi(x)=1$ for $x\in F$.

For the proof of the Convergence Theorem we need also the following additional assumption on the measure ν.

Condition B_2. There exists an increasing continuous function $\omega(\rho)$, such that

$$\nu(K(x,\rho)\cap\Omega)\leq \omega(\rho) \tag{2.5}$$

for arbitrary $x \in \Omega, \rho > 0$ and

$$\int_0^1 \frac{\omega(\rho)}{\rho^{n-m+1}} d\rho < +\infty. \tag{2.6}$$

Remark 2.3. It is simple to check (see [1]) that the condition (2.6) implies

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\omega(\rho)}{\rho^{n-m}} = 0.$$

Remark 2.4. We can assume that for an arbitrary Borel set $B \subset \Omega$ an inequality $\nu(B) \geq \mathrm{meas} B$ holds where $\mathrm{meas} B$ is the Lebesgue measure of B For this it is sufficient to change the measure ν on the measure $\tilde{\nu}$ such that $\tilde{\nu}(B) = \nu(B) + \mathrm{meas} B$.

Let us fix a function $\psi(x)$ of class $C_0^\infty(\Omega_0)$ equal to 1 on $\overline{\Omega}$. A crucial role in this paper belong to special auxiliary function $v(x,F,q)$ that is defined as a maximal solution of a boundary-value problem

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_j\left(x, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in \Omega_0 \setminus F, \tag{2.7}$$

$$v(x) = q\psi(x), \quad x \in \partial(\Omega_0 \setminus F). \tag{2.8}$$

Here F is an arbitrary closed subset of Ω, q is an arbitrary real number. The solvability of the problem (2.7), (2.8) in $W_m^1(\Omega_0 \setminus F)$ is followed easy from the theory of monotone operators. In the paper [13] it is proved the existence of such solution $\bar{v}(x)$ of the problem (2.7), (2.8) that $v(x) \leq \bar{v}(x)$ for an arbitrary solution $v(x)$ of this problem. The function $\bar{v}(x)$ is called the maximal solution of the problem (2.7), (2.8). We extend $v(x,F,q)$ to R^n by setting $v(x,F,q) = q$ in F and $v(x,F,q) = 0$ outside Ω_0.

Let us introduce a special decomposition of the domain Ω depending on a sequence λ_s. Let t_s be a solution of the equation

$$t_s^{n+1} \left(\frac{\omega(t_s)}{t_s^{n-m}} \right)^{\frac{1}{m-1}} = \rho_s^{n+1}, \tag{2.9}$$

where ρ_s is the sequence from the condition B_1.

We define λ_s to be the odd integer number which satisfies an inequality

$$\lambda_s \leq \frac{t_s}{\rho_s} < \lambda_s + 2. \tag{2.10}$$

It is easy to check following properties of λ_s:

$$\lim_{s \to \infty} \lambda_s = +\infty, \quad \lim_{s \to \infty} \lambda_s \rho_s = 0 \tag{2.11}$$

(see Lemma 4.1 [1]).

For a given point $x_0^{(s)} \in K(0,\lambda_s\rho_s)$ we consider the cubic lattice composed of the point $x_\alpha^{(s)} = x_0^{(s)} + 2\lambda_s\rho_s\alpha$, where $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ is a multi-index with integer coordinates and we denote

$$F_s = \bigcup_\alpha \left\{K\left(x_\alpha^{(s)},\lambda_s\rho_s\right)\setminus K\left(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-6)\rho_s\right)\right\}, \tag{2.12}$$

where the union is taken over all possible multi-indices α with integer coordinates.

From Lemma 4.2 in [1] it is followed that there exists a point $x_0^{(s)} \in K(0,\lambda_s\rho_s)$ such that

$$\nu(F_s \cap \Omega) \le \frac{7n}{\lambda_s}\nu(\Omega). \tag{2.13}$$

The domain Ω will be decomposed

$$\Omega = \left\{\bigcup_{\alpha\in I_s} K(x_\alpha^{(s)},\lambda_s\rho_s)\right\}\bigcup U_s, \tag{2.14}$$

where I_s is the set of all multi-indices α such that $K(x_\alpha^{(s)},2\lambda_s\rho_s)\subset\Omega$ and U_s is the complement in Ω of the set $\bigcup\limits_{\alpha\in I_s} K(x_\alpha^{(s)},\lambda_s\rho_s)$.

Moreover we introduce the notations

$$K_s(\alpha) = K(x_\alpha^{(s)},\lambda_s\rho_s),\quad K_s'(\alpha) = K(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-2)\rho_s). \tag{2.15}$$

Let us define the function

$$v_\alpha^{(s)}(x,q) = v(x,K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s,q), \tag{2.16}$$

where $v(x,F,q)$ is the solution of the problem (2.7), (2.8) which was introduced above.

We define new sequence μ_s by the equality

$$\mu_s = \max\left\{\lambda_s^n\left[\frac{\omega(\lambda_s\rho_s)}{(\lambda_s\rho_s)^{n-m}}\right]^{\frac{1}{m-1}},\lambda_s\rho_s\right\}. \tag{2.17}$$

We have from the Lemma 4.1 [1]

$$\lim_{s\to\infty}\mu_s = 0. \tag{2.18}$$

Denote by $L_p(\Omega,\nu)$ the space of functions $v(x)$ defined on Ω measurable with respect measure ν and such that

$$\| v\|_{L_p(\Omega,\nu)}^p = \int_\Omega |v(x)|^p\, d\nu < \infty.$$

Let $q_s(x)$ be an arbitrary sequence in $L_m(\Omega,\nu)$ that converges strongly in $L_m(\Omega,\nu)$ to some function $q_0(x)$ and we denote

$$q_\varepsilon^{(s)} = \frac{1}{\nu(K_s(\alpha))}\int_{K_s(\alpha)} q_s(x)d\nu. \tag{2.19}$$

We introduce subsets I_s', I_s'' of multi-indices α:

$$I_s' = \{\alpha\in I_s \mid |q_\alpha^{(s)}| > 2\mu_s\},\quad I_s'' = \{\alpha\in I_s \mid |q_\alpha^{(s)}| \le 2\mu_s\}. \tag{2.20}$$

Define the functions

$$\overline{v}_\alpha^{(s)}(x) = v_\alpha^{(s)}(x, \overline{q}_\alpha^{(s)}), \tag{2.21}$$

where

$$\overline{q}_\alpha^{(s)} = q_\alpha^{(s)}, \text{ for } \alpha \in I_s', \ \overline{q}_\alpha^{(s)} = 2\mu_s \text{ for } \alpha \in I_s''. \tag{2.22}$$

For an arbitrary function $g(x)$ we denote its positive part by $[g(x)]_+ = \max\{g(x), 0\}$. We define the cut-off functions $\varphi_\alpha^{(s)}(x)$ by the equality

$$\varphi_\alpha^{(s)}(x) = \frac{2}{\mu_\alpha^{(s)}} \min\left\{\left[|\overline{v}_\alpha^{(s)}(x)| - \frac{\mu_\alpha^{(s)}}{2}\right]_+, \frac{\mu_\alpha^{(s)}}{2}\right\}, \tag{2.23}$$

where

$$\mu_\alpha^{(s)} = \mu_s \max\{1, |q_\alpha^{(s)}|\}. \tag{2.24}$$

Let us construct the following sequence which is fundamental in the analysis of asymptotic behavior of solutions of the problem (1.1), (1.2)

$$r_s(x) = \sum_{\alpha \in I_s} v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)}) \varphi_\alpha^{(s)}(x). \tag{2.25}$$

Remark that $r_s(x)$ is analogous to the corrector which was constructed in [1–5]. In particular $r_s(x)$ is analogous to principal term $r_s^{(3)}(x)$ of asymptotic expansion of the sequence of solutions in [1].

Our main result is the following theorem.

Theorem 2.1 (Convergence Theorem). *Assume that conditions* A_1, A_2, B_1, B_2 *are satisfied and let* $q_s(x)$ *be some sequence converging strongly in* $L_m(\Omega, \nu)$. *Let* $z_s(x)$ *be an arbitrary sequence of functions such that* $z_s(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega_s)$ *and* $z_s(x)$ *converges weakly to zero in* $W_m^1(\Omega)$, $z_s(x) = 0$ *on* $\Omega \setminus \Omega_s$. *Then the following equality*

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega a_j\left(x, \frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right) \frac{\partial z_s(x)}{\partial x_j} dx = 0 \tag{2.26}$$

holds.

Remark 2.5. We take the attention of the reader that in conditions of the Theorem 2.1 the sequence $r_s(x)$ converges in $W_m^1(\Omega)$ only weakly (see Lemma 4.3 below) and this convergence is not strong.

3. Estimates for potentials. In this section we formulate some integral and pointwise estimates for the potential function $v(x, F, q)$ introduced in Section 2 as solution of the problem (2.7), (2.8).

Let us fix a compact set F contained in Ω and let $v(x, q) = v(x, F, q)$. For $0 < \mu \le |q|$ we define the set

$$E(\mu) = \{x \in \Omega_0 : |v(x, q)| \le \mu\}. \tag{3.1}$$

We shall assume that conditions A_1, A_2 are satisfied. We shall use integral and pointwise estimates for $v(x,q)$ that are proved in [1] (lemmas 2.1 and 2.5 respectively).

There exists a constant K_1 depending only on ν_1, ν_2, n, m such that the estimate

$$\int_{E(\mu)} \left|\frac{\partial v(x,q)}{\partial x}\right|^m dx \le K_1 \mu \, |\, q \,|^{m-1} \tag{3.2}$$

holds for every $q \in R^1$ and for every μ with $0 < \mu \le |\, q \,|$.

It is easy to see that the inequality $0 \le \frac{1}{q} v(x,q) \le 1$ holds for every $q \ne 0$. So we obtain an estimate of the norm of the function $v(x,q)$ in $W_m^1(\Omega_s)$ if we put $\mu = |\, q \,|$ in (3.2).

Assume that $K(x_0, 2r) \subset \Omega_0$ and set F is contained in a cube $K(x_0, r)$. Then there exists a constant K_2 depending only on ν_1, ν_2, n, m such that the following estimate

$$|\, v(x,q) \,| \le K_2 \,|\, q \,| \left[\frac{r}{\rho(x, K(x_0, r))}\right]^{n-1} \left\{\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \tag{3.3}$$

holds for $x \in K(x_0, 2r) \setminus K(x_0, r)$, where $\rho(x, K(x_0, r))$ is the distance from the point x to the cube $K(x_0, r)$.

Let us introduce auxiliary function $w(x,q,F)$ as a solution of following boundary-value problem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^{m-2} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\} = 0, \quad x \in K(x_0, 2r) \setminus F, \tag{3.4}$$

$$w(x) = q\varphi(x), \quad x \in \partial[K(x_0, 2r) \setminus F], \tag{3.5}$$

where $q \in R^1, F$ is a closed subset of $K(x_0, r)$ and $\varphi(x)$ is a function of class $C_0^{\infty}(K(x_0, 2r))$ equal to one in $K(x_0, r)$. Extend $w(x,q,F)$ on F by the equality $w(x,q,F) = q$ for $x \in F$.

This function $w(x,q,F)$ satisfies estimates analogous to estimates (3.2), (3.3).

Theorem 3.1. *Let* λ *be some number from the interval* (3/2, 2). *Then there exists a constant* K_3 *depending only on* m, n, λ *such that the estimate*

$$\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right| \le \frac{K_3 \,|\, q \,|}{r} \left\{\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \quad \textit{for } x \in K(x_0, \lambda r) \setminus K\left(x_0, \frac{3}{2} r\right) \tag{3.6}$$

holds, where $w(x)$ *is the solution of the problem* (3.4), (3,5).

Proof is analogous to the proof the Theorem 5 in [13].

Theorem 3.2. *Let* $w(x)$ *be the solution of the problem* (3.4), (3,5). *Then there exist positive constants* α, K_4 *depending only on* n, m *such that the estimate*

$$|\, w(x) \,| \le K_4 \,|\, q \,| \left[\frac{\rho(x, \partial K(x_0, 2r))}{r}\right]^{\alpha} \left\{\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \tag{3.7}$$

holds for $x \in K(x_0, 2r) \setminus K\left(x_0, \frac{3}{2}r\right)$.

Proof. Let x' be an arbitrary point on the boundary of $K(x_0, 2r)$ and denote $M' = \max\left\{|w(x)| : x \in B\left(x', \frac{r}{2}\right)\right\}$, where $B(x_0, \rho)$ is a ball at center x_0 and radius ρ. Using Moser method for the proof of Holder continuity of $w(x, q, F)$ (see for example [14], Chapter IX, § 5) we obtain the estimate

$$|w(x) - w(x')| \le C_1 \left(\frac{|x - x'|}{r}\right)^{\alpha} M' \text{ for } x \in \left(x', \frac{r}{2}\right) \tag{3.8}$$

with constants α, C_1 depending only on n, m.

Now the inequality (3.7) is followed from (3.8) and the analog of the estimate (3.3) for $w(x)$.

Theorem 3.3. *Let* $w(x)$ *be the solution of the problem* (3.4), (3,5) *and let* γ *be some number from the interval* (1, 2). *Then there exist a constant* K_5 *depending only on* n, m, γ *such that the inequality*

$$\min\{|w(x)| : x \in \partial K(x_0, \gamma r)\} \ge K_5 |q| \left\{\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \tag{3.9}$$

holds.

Proof. It suffices to consider the case $q > 0$. Define $r_j = \gamma r + j(2 - \gamma) r / 5,\ j = 1,2,3,4$, and functions $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C_0^{\infty}(K(x_0, 2r))$ such that $\psi_1(x) = 1$ for $x \in K(x_0, r_3)$, $\psi_1(x) = 0$ for $x \notin K(x_0, r_3)$, $\psi_2(x) = 1$ for $x \in K(x_0, r_3) \setminus K(x_0, r_2)$ and $\psi_2(x) = 0$ for $x \in K(x_0, r_1)$ or $x \notin K(x_0, r_4)$. We can assume that

$$\left|\frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x}\right| \le C_2 \frac{1}{r},\ k = 1,2.$$

Constants C_j in the proof of the proof of Theorem 3.3 depend only on n, m, γ.

We substitute in the integral identity

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{K(x_0, 2r)} \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^{m-2} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = 0,\ \varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{m}(K(x_0, 2r) \setminus F) \tag{3.10}$$

a test function $\varphi(x) = [q - w(x)]\psi_1^m(x)$. Using Holder inequality we obtain

$$\int_{K(x_0, 2r)} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right|^{m} \psi_1^m(x) dx \le C_3 \frac{q}{r} \int_D \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^{m-1} dx \le$$

$$\le C_3 \frac{q}{r} \left\{\int_D w^{\sigma m}(x) dx\right\}^{\frac{1}{m}} \left\{\int_D \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right|^{m} [w(x)]^{-\sigma m/(m-1)} dx\right\}^{\frac{m-1}{m}} \le$$

$$\le C_4 q [M(r_2)]^{\sigma} r^{(n-m)/m} \left\{\int_{K(x_0, 2r)} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right|^{m} [w(x)]^{-\sigma m/(m-1)} \psi_2^m(x) dx\right\}^{\frac{m-1}{m}}, \tag{3.11}$$

where $D = K(x_0,r_3) \setminus K(x_0,r_2)$, $\sigma = \dfrac{m-1}{2m}$,

$$M(\rho) = \max\{w(x) : x \in \partial K(x_0,\rho)\}. \tag{3.12}$$

Using the Harnack inequality for the equation (3.4) (see [15]) we have $\min\{w(x) : x \in K(x_0,r_4) \setminus K(x_0,r_1)\} > 0$. Substitute in the identity (3.10) new test function $\varphi(x) = w^{1-\sigma m/(m-1)}(x)\psi_2^m(x)$ and we obtain

$$\int\limits_{K(x_0,2r)} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right|^m [w(x)]^{-\sigma m/(m-1)} \psi_2^m(x)dx \le$$

$$\le C_5 \frac{1}{r} \int\limits_{K(x_0,2r)} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right|^{m-1} [w(x)]^{1-\sigma m/(m-1)} \psi_2^{m-1}(x)dx.$$

Estimating the last integral by Young inequality we have

$$\int\limits_{K(x_0,2r)} \left|\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right|^m [w(x)]^{-\sigma m/(m-1)} \psi_2^m(x)dx \le$$

$$\le C_6 \frac{1}{r^m} \int\limits_{K(x_0,r_4)\setminus K(x_0,r_1)} [w(x)]^{m-\sigma m/(m-1)}dx \le C_7[M(r_1)]^{m-\sigma m/(m-1)} r^{n-m}. \tag{3.13}$$

From inequalities (3.11), (3.13) we obtain the estimate

$$\int\limits_{K(x_0,2r)} \left|\frac{\partial (w\psi_1)}{\partial x}\right|^m dx \le C_8[M(r_1)]^m r^{n-m} +$$

$$+ C_8 q[M(r_1)]^{m-1} r^{n-m} \le C_9 q[M(r_1)]^{m-1} r^{n-m}. \tag{3.14}$$

By the definition of the capacity we have the following estimate for the integral on the left-hand side of (3.14)

$$\int\limits_{K(x_0,2r)} \left|\frac{\partial (w\psi_1)}{\partial x}\right|^m dx \ge q^m C_m(F). \tag{3.15}$$

The inequalities (3.14), (3.15) imply the estimate

$$M(r_1) \ge C_{10} q \left\{\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}}. \tag{3.16}$$

From the Harnack inequality [15] and (3.16) we have the estimate

$$\min\{w(x) : x \in \partial K(x_0,r_1)\} \ge C_{11} M(r_1) \ge C_{12} q \left\{\frac{C_m(F)}{r^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}}$$

and the proof of the Theorem 3.2 is completed.

Denote

$$\tau(r) = \int_0^r \frac{\omega(\rho)}{\rho^{n-m+1}} d\rho + \frac{\omega(r)}{r^{n-m}}, \tag{3.17}$$

where $\omega(\rho)$ is the function introduced in the condition B_2.

Lemma 3.1. *Assume that conditions* B_1, B_2 *are satisfied. Then there exists a constant* K_6 *depending only on* n,m *such that the inequality*

$$\int_{K(x_0,r)} \frac{d\nu_y}{|x-y|^{n-m}} \le K_6 \tau(r) \tag{3.18}$$

holds for $x \in K(x_0,2r)$, *where* $K(x_0,2r)$ *is an arbitrary cub satisfying an inclusion* $K(x_0,2r) \subset \Omega$.

Proof. Denote $\omega(r,\rho) = \omega(\min(r,\rho))$. From the properties of the function ω we have

$$\sup_{x \in R^n} \nu(K(x_0,r) \cap \Omega \cap B(x,\rho)) \le \omega(r,\rho).$$

Using the Theorem 6.1 of [16] we obtain the inequality

$$\int_{K(x_0,r)} \frac{d\nu_y}{|x-y|^{n-m}} \le C_{13} \int_0^\infty \frac{\omega(r,\rho)}{\rho^{n-m+1}} d\rho =$$

$$= C_{13} \left\{ \int_0^\infty \frac{\omega(\rho)}{\rho^{n-m+1}} d\rho + \frac{\omega(r)}{n-m} \frac{1}{r^{n-m}} \right\} \le C_{13} \left(1 + \frac{1}{n-m} \right) \tau(r)$$

that gives us the estimate (3.18).

Lemma 3.2. *Let* ν *be the measure introduced in the condition* B_1 *and assume that condition* B_2 *is satisfied. Then for any function* $u(x) \in W_m^1(K(x_0,2r))$ *and any cub* $K(x_0,2r) \subset \Omega$ *the inequality*

$$\int_{K(x_0,2r)\setminus K(x_0,r)} |u(x) - u_{\nu,r}|^m \, dx \le K_7 \tau(r) \frac{r^n}{\nu(K(x_0,r))} \int_{K(x_0,r)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m dx \tag{3.19}$$

holds with a constant K_7 *depending only on* n,m. *Here*

$$u_{\nu,r} = \frac{1}{\nu(K(x_0,r))} \int_{K(x_0,r)} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|^m u(x) d\nu. \tag{3.20}$$

Proof. Remark that from the conditions B_1, B_2 and from the Theorem of § 8.6, 8.8 in [17] it is followed the compact embedding

$$W_m^1(K(x_0,2r)) \subset L_m(K(x_0,2r),\nu) \text{ for } K(x_0,2r) \subset \Omega. \tag{3.21}$$

Consequently the integral in (3.20) is well defined and it suffices to prove the estimate (3.19) for $u(x) \in C^1(K(x_0,2r))$.

Let $x \in K(x_0,2r) \setminus K(x_0,r),\ y \in K(x_0,r)$ be such points that

$$\frac{x-x_0}{|x-x_0|} = \frac{y-y_0}{|y-y_0|} = \omega.$$

Using an quality

$$u(x) - u(y) = \int_{|y-y_0|}^{|x-x_0|} \frac{\partial u}{\partial t}(x_0 + \omega t) dt$$

and a straight-forward computation we obtain

$$|u(x) - u_{\nu,r}| \le \frac{1}{\nu(K(x_0,r))} \int_{K(x_0,r)} |y-x_0|^{1-n/m} \, d\nu_y \left\{ \int_0^{|x-x_0|} \left| \frac{\partial u(x_0+\omega t)}{\partial t} \right|^m t^{n-1} dt \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{3.22}$$

Evaluate the first integral on the right-hand side of (3.22) by using Holder inequality and the estimate (3.18) and we obtain

$$\int_{K(x_0,r)} |y-x_0|^{1-n/m}\, d\nu_y \le C_{14}[\nu(K(x_0,r))]^{(m-1)/m}\tau^{1/m}(r). \tag{3.23}$$

Representing the integral on the left-hand side of (3.19) in spherical coordinates centered at x_0 with respect to variables

$$\omega = \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \in S(0,1),\ \rho = |x-x_0| \in [\rho_1(\omega),\rho_2(\omega)]$$

we have from (3.22), (3.23)

$$\int_{K(x_0,2r)\setminus K(x_0,r)} |u(x)-u_{\nu,r}|^m\, dx = \int_{S(0,1)}\int_{\rho_1(\omega)}^{\rho_2(\omega)} |u(x_0+\rho\omega)-u_{\nu,r}|^m\, \rho^{n-1} d\rho\, d\omega \le$$

$$\le C_{15}[\nu(K(x_0,r))]^{-1}\tau(r)r^n \int_{S(0,1)}\int_{\rho_1(\omega)}^{\rho_2(\omega)} \left|\frac{\partial u(x_0+t\omega)}{\partial t}\right|^m t^{n-1} dt\, d\omega =$$

$$= C_{15}\frac{r^n}{\nu(K(x_0,r))}\tau(r)\int_{K(x_0,r)} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^m dx. \tag{3.24}$$

The proof of the Lemma 3.2 is completed.

4. Proof of the Convergence Theorem. Denote by $G_\alpha^{(s)}$ the support of the function $\varphi_\alpha^{(s)}(x)$. In this section we shall use the notation C_j, $j=17,18,\ldots$, for constants which depend only on n,m,ν_1,ν_2, $\nu(\Omega)$.

Lemma 4.1. *Assume that conditions* A_1, A_2, B_1, B_2 *are satisfied. Then there exists an integer* s_1 *such that the inclusion*

$$G_\alpha^{(s)} \subset K(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-1)\rho_s) \ \text{ for } \ \alpha\in I_s \tag{4.1}$$

holds for $s \ge s_1$.

Proof. Using the pointwise estimate (3.8) and the condition B_1, B_2 we obtain the inequality

$$|\bar v_\alpha^{(s)}(x)| \le C_{16}\max\{|q_\alpha^{(s)}|,2\mu_s\}\lambda_s^{n-1}\left\{\frac{C_m(K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s)}{(\lambda_s\rho_s)^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \le$$

$$\le C_{17}\max\{|q_\alpha^{(s)}|,2\mu_s\}\lambda_s^{n-1}\left\{\frac{\omega(\lambda_s\rho_s))}{(\lambda_s\rho_s)^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \tag{4.2}$$

for $x\in\partial K(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-1)\rho_s)$. By the maximum principle the same inequality holds for every $x\notin K(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-1)\rho_s)$. From (2.11), (2.18), (2.17) we have the inequality

$$C_{17}\lambda_s^{n-1}\left\{\frac{\omega(\lambda_s\rho_s))}{(\lambda_s\rho_s)^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}} \le \frac{C_{17}}{\lambda_s}\mu_s \le \frac{\mu_s}{2}$$

for sufficiently large s. Consequently from (4.2), (2.24) we have

$$\left[|\overline{v}_\alpha^{(s)}(x)|-\frac{\mu_\alpha^{(s)}}{2}\right]_+=0 \text{ for } x\in K(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-1)\rho_s) \tag{4.3}$$

which implies (4.1).

Lemma 4.2. *Assume that conditions* A_1, A_2, B_1, B_2 *are satisfied. Then the inequality*

$$\operatorname{meas} G_\alpha^{(s)} \le C_{18}(\lambda_s\rho_s)^m \mu_s^{1-m}\nu\left(K(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-1)\rho_s)\right) \tag{4.4}$$

holds.

Proof. We introduce an auxiliary function

$$\overline{\varphi}_\varepsilon^{(s)}(x)=\frac{4}{\mu_\alpha^{(s)}}\min\left\{\left[\overline{v}_\varepsilon^{(s)}(x)-\frac{\mu_\alpha^{(s)}}{4}\right]_+,\frac{\mu_\alpha^{(s)}}{4}\right\}.$$

As in the proof of the Lemma 4.1 we can prove that $\overline{\varphi}_\varepsilon^{(s)}(x)=0$ for $x\notin K_s(\alpha)$ and s large enough. Using Poincare's inequality, the estimate (3.2) and the condition B_1 we obtain

$$\int\limits_{K_s(\alpha)}|\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)|^m \le C_{19}(\lambda_s\rho_s)^m\int\limits_{K_s(\alpha)}\left|\frac{\partial\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|^m dx \le$$
$$\le C_{20}\mu_s^{1-m}(\lambda_s\rho_s)^m\nu\left(K(x_\alpha^{(s)},(\lambda_s-1)\rho_s)\right).$$

Observing that $\overline{\varphi}_\alpha^{(s)}(x)=1$ for $x\in G_\alpha^{(s)}$ we obtain the estimate (4.4) from the last inequality.

Lemma 4.3. *Assume that conditions* A_1, A_2, B_1, B_2 *are satisfied and let* $q_s(x)$ *be an arbitrary sequence that converges strongly in* $L_m(\Omega,\nu)$. *Then the sequence* $r_s(x)$ *defined by the equality* (2.25) *converges strongly to zero in* $W_p^1(\Omega)$ *for any* $p<m$ *and converges weakly in* $W_p^1(\Omega)$ *as* $s\to\infty$.

Proof. We can assume that $s\ge s_1$, where s_1 is defined in Lemma 4.1. Then from the inclusion (4.1) we have

$$G_\alpha^{(s)}\cap G_\beta^{(s)}=\varnothing \text{ for } \alpha\ne\beta,\ \alpha,\beta\in I_s. \tag{4.5}$$

Let us estimate the norm of the gradient of $r_s(x)$ in $L_m(\Omega)$ for s large enough such that $\mu_s\le 1$. We have

$$\left\|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right\|_{L_m(\Omega)}^m \le C_{21}\sum_{\alpha\in I_s}\int\limits_{G_\alpha^{(s)}}\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}(x,q_\alpha^{(s)})}{\partial x}\right|^m dx+$$

$$+C_{21}\sum_{\alpha\in I_s}[\mu_\alpha^{(s)}]^{-m}\int\limits_{\widetilde{E}_\alpha^{(s)}}|v_\alpha^{(s)}(x,q_\alpha^{(s)})|^m\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}(x,\overline{q}_\alpha^{(s)})}{\partial x}\right|^m dx, \tag{4.6}$$

where $\widetilde{E}_\alpha^{(s)}=\left\{x\in\Omega_0:\frac{\mu_\alpha^{(s)}}{2}<|v_\alpha^{(s)}(x)|<\mu_\alpha^{(s)}\right\}$.

We evaluate the first summand on the right-hand side of (4.6) by using the inequality (3.2) and the condition B_1:

$$\sum_{\alpha\in I_s}\int\limits_{G_\alpha^{(s)}}\left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}(x,q_\alpha^{(s)})}{\partial x}\right|^m dx\le C_{22}\sum_{\alpha\in I_s}|q_\alpha^{(s)}|^m\,\nu(K_s(\alpha)). \tag{4.7}$$

From the Holder inequality we have

$$|q_\alpha^{(s)}| = \frac{1}{v(K_s(\alpha))}\left|\int_{K_s(\alpha)} q_s(x)dv\right| \le \left\{\frac{1}{v(K_s(\alpha))}\int_{K_s(\alpha)} |q_s(x)|^m\, dv\right\}^{\frac{1}{m}} \tag{4.8}$$

and we estimate the sum on the right-hand side of the inequality (4.7)

$$\sum_{\alpha\in I_s} |q_\alpha^{(s)}|^m\ \nu(K_s(\alpha)) \le \int_\Omega |q_s(x)|^m\, d\nu. \tag{4.9}$$

Remarking that the inequality

$$|v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)})| \le 2\mu_s \quad \text{for} \quad \alpha \in I_s'' \tag{4.10}$$

holds we can evaluate the second summand on the right-hand side of (4.6) analogously to (4.7), (4.9) and we obtain the estimate

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{23} \int_\Omega |q_s(x)|^m\, d\nu. \tag{4.11}$$

Remarking that the function $r_s(x)$ vanishes outside $\bigcup_{\alpha\in I_s} G_\alpha^{(s)}$ and using the Holder inequality we get

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x} r_s(x)\right\|_{L_p(\Omega)} \le \left\|\frac{\partial}{\partial x} r_s(x)\right\|_{L_m(\Omega)} \left\{\sum_{\alpha\in I_s} \operatorname{meas} G_\alpha^{(s)}\right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{m}} \quad \text{for} \quad 1 < p < m. \tag{4.12}$$

The second factor on the right-hand side of last inequality tends to zero by (4.4), (2.17), (2.18). This completes the proof of the Lemma.

Lemma 4.4. *Assume that conditions of the Lemma* 4.3 *are satisfied. Then the sequence*

$$r_s''(x) = \sum_{\alpha\in I_s''} v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)})\varphi_\alpha^{(s)}(x) \tag{4.13}$$

converges strongly to zero in $W_m^1(\Omega)$.

Proof. Analogously to the proof of the Lemma 4.3 we have the estimate

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial r_s''(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{24} \sum_{\alpha\in I_s''} |q_\alpha^{(s)}|^m\ \nu(K_s(\alpha))$$

and the right-hand side of the last inequality tends to zero by the definition of I_s'' and (2.18). The proof of the Lemma is completed.

Let ζ_s be an arbitrary sequence of real numbers satisfying an equality

$$\lim_{s\to\infty} \zeta_s = 0. \tag{4.14}$$

Let us define the subsets $I_{1,s}'$, $I_{2,s}'$ of multi-indices α by the equalities

$$I_{1,s}' = \left\{\alpha \in I_s' : \zeta_s\, |q_\alpha^{(s)}|^{m-1} \le 1\right\},\ \ I_{2,s}' = \left\{\alpha \in I_s' : \zeta_s\, |q_\alpha^{(s)}|^{m-1} > 1\right\}$$

and denote

$$r_{i,s}'(x) = \sum_{\alpha\in I_{i,s}''} v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)})\varphi_\alpha^{(s)}(x),\ \ i = 1,2. \tag{4.15}$$

Lemma 4.5. *Assume that conditions of the Lemma* 4.3 *are satisfied and let* ζ_s *be an arbitrary sequence satisfying the condition* (4.14). *Then the sequence* $r'_{2,s}(x)$ *defined by* (4.15) *converges strongly to zero in* $W^1_m(\Omega)$.

Proof. Denote $Q_s = \bigcup_{\alpha\in I'_{2,s}} K_s(\alpha)$. From the inequality

$$\zeta_s^{-m/m-1}\nu(Q_s) \le \sum_{\alpha\in I'_{2,s}} |\, q_\alpha^{(s)}\,|^m\ \nu(K_s(\alpha))$$

and (4.8) we have

$$\nu(Q_s) \le \zeta_s^{m/m-1}\int_\Omega \ |\, q_s(x)\,|^m\ d\nu. \tag{4.16}$$

Analogously to the proof of the inequality (4.11) we obtain

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial r'_{2,s}(x)}{\partial x}\right|^m dx \le C_{25}\int_{Q_s} \ |\, q_s(x)\,|^m\ d\nu$$

and the convergence of the right-hand side of last inequality to zero is followed from (4.14), (4.16) and the assumption on the sequence $q_s(x)$. The proof of the Lemma is completed.

Proof of the Theorem 2.1. Define the sequence ζ_s by the equality

$$\zeta_s = \max\left\{\|\, z_s(x)\,\|^{1/2}_{L_m(\Omega,\nu)}, \lambda_s\rho_s, [\tau(\lambda_s\rho_s)]^{1/2m}\right\}, \tag{4.17}$$

where $z_s(x)$ is the sequence introduced in the Theorem 1.1. This sequence ζ_s satisfies the condition (4.14) and let $r'_{1,s}(x), r'_{2,s}(x)$ be sequences defined by the equality (4.15) for considered choice of ζ_s.

Using the condition A$_2$, Lemmas 4.1, 4.3, 4.5 and assumptions on $z_s(x)$ we obtain

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{j=1}^n \int_\Omega \left\{a_j\left(x,\frac{\partial r_s(x)}{\partial x}\right) - a_j\left(x,\frac{\partial r'_{1,s}(x)}{\partial x}\right)\right\}\frac{\partial z_s(x)}{\partial x_j}dx = 0 \tag{4.18}$$

and it is sufficient to study the behaviour of the term

$$J_s = \sum_{j=1}^n \int_\Omega a_j\left(x,\frac{\partial r'_{1,s}(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial z_s(x)}{\partial x_j}dx. \tag{4.19}$$

Denote

$$\delta_\alpha^{(s)} = K_5\left(\frac{3}{2}\right)\left\{\frac{C_m(K'_s(\alpha)\setminus\Omega_s)}{[\lambda_s\rho_s]^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}}, \tag{4.20}$$

where the constant $K_5\left(\frac{3}{2}\right)$ is defined in the Lemma 3.2.

Define a function

$$\zeta_\alpha^{(s)}(x) = \frac{2}{\delta_\alpha^{(s)}}\min\left\{\left[w_\alpha^{(s)}(x,K'_s(\alpha)\setminus\Omega_s,1) - \frac{\delta_\alpha^{(s)}}{2}\right]_+, \frac{\delta_\alpha^{(s)}}{2}\right\}, \tag{4.21}$$

where $w_\alpha^{(s)}(x,F,q)$ is the solution of the problem (3.4), (3.5) with $x_0 = x_\alpha^{(s)}$, $r = \lambda_s\rho_s$. The cub $K'_s(\alpha)$ in (4.20) is defined by (2.15).

Using the estimate (3.7), (3.9) and the choice of $\delta_\alpha^{(s)}$ we have

$$\zeta_\alpha^{(s)}(x) \equiv 1 \ \text{ for } \ x \in K\left(x_\alpha^{(s)}, \frac{3}{2}\lambda_s\rho_s\right), \tag{4.22}$$

$$\zeta_\alpha^{(s)}(x) \equiv 0 \ \text{ for } \ x \in K(x_\alpha^{(s)}, 2\lambda_s\rho_s) \setminus K(x_\alpha^{(s)}, \gamma\lambda_s\rho_s),, \tag{4.23}$$

with some number γ depending only on n,m.

We rewrite J_s in the from

$$J_s = \sum_{i=1}^{5} J_s^{(i)}, \tag{4.24}$$

where

$$\begin{aligned}
J_s^{(1)} &= \sum_{\alpha\in I'_{1,s}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\widetilde{K}_s(\alpha)} \left[a_j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)})\right) - a_j\left(x, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial z_s(x)}{\partial x_j} dx, \\
J_s^{(2)} &= \sum_{\alpha\in I'_{1,s}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\widetilde{K}_s(\alpha)} a_j\left(x, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}[\zeta_\alpha^{(s)} z_s(x)]dx, \\
J_s^{(3)} &= \sum_{\alpha\in I'_{1,s}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\widetilde{K}_s(\alpha)} a_j\left(x, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right)(1-\zeta_\alpha^{(s)}(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} z_s(x)dx, \\
J_s^{(4)} &= -\sum_{\alpha\in I'_{1,s}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\widetilde{K}_s(\alpha)} a_j\left(x, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial \zeta_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x_j} \cdot [z_s(x) - z_s(\alpha)]dx, \\
J_s^{(5)} &= -\sum_{\alpha\in I'_{1,s}} \sum_{j=1}^{n} z_s(\alpha) \int_{\widetilde{K}_s(\alpha)} a_j\left(x, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial \zeta_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x_j} dx,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

where

$$z_s(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{meas}(K_s(\alpha))} \int_{K_s(\alpha)} z_s(x)dx,$$

$$v_\alpha^{(s)} = v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)}), \quad \widetilde{K}_s(\alpha) = K(x_\alpha^{(s)}, 2\lambda_s\rho_s).$$

Define a set

$$E_\alpha^{(s)}(\mu) = \{x \in \widetilde{K}_s(\alpha) : | v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)}) | \le \mu\}.$$

The function $\varphi_\alpha^{(s)}(x)$ is equal to one if $| v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)}) | \ge \mu_\alpha^{(s)}$, $\alpha \in I'_s$. Using (2.3) and Holder inequality we obtain the estimate

$$| J_s^{(1)} | \le C_{26} \left\{ \sum_{\alpha\in I'_{1,s}} \int_{E_\alpha^{(s)}(\mu_\alpha^{(s)})} \left[\left| \frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)}) \right| + \left| \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right| \right]^m dx \right\}^{\frac{m-1}{m}} \times \left\{ \int_\Omega \left| \frac{\partial z_s(x)}{\partial x} \right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{4.26}$$

We estimate the second factor on the right-hand side of (4.26) by using inequalities (3.2), (4.8). We obtain

$$\sum_{\alpha\in I'_{1,s}} \int_{E_\alpha^{(s)}(\mu_\alpha^{(s)})} \left[\left| \frac{\partial}{\partial x}(v_\alpha^{(s)}\varphi_\alpha^{(s)}) \right| + \left| \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right| \right]^m dx \le$$

$$\le C_{27}\mu_s \sum_{\alpha\in I'_{1,s}} | q_\alpha^{(s)} |^m \ \nu(K_s(\alpha)) \le C_{27}\mu_s \int_\Omega \ | q_s(x) |^m \ d\nu$$

and the right-hand side of the last inequality tends to zero as $s \to \infty$. Taking into account the assumption on $z_s(x)$ we obtain

$$\lim_{s\to\infty} J_s^{(1)} = 0. \tag{4.27}$$

In the same way as for $J_s^{(1)}$ we obtain the equality

$$\lim_{s\to\infty} J_s^{(3)} = 0. \tag{4.28}$$

The equality

$$J_s^{(2)} = 0 \tag{4.29}$$

is followed from the definition of the functions $v_\alpha^{(s)}(x, q_\alpha^{(s)})$ and from the properties of $\zeta_\alpha^{(s)}(x), z_s(x)$.

In order to estimate $J_s^{(4)}$ we remark that from the Theorem 3.1 the inequality

$$\left|\frac{\partial \zeta_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right| \le \frac{C_{28}}{\lambda_s \rho_s} \tag{4.30}$$

holds for $\alpha \in I'_{1,s}$. Using the condition A2 and Holder inequality we obtain the estimate

$$|J_s^{(4)}| \le C_{29} \frac{1}{\lambda_s \rho_s} \sum_{\alpha \in I'_{1,s}} \left\{ \int_{D_s(\alpha)} \left|\frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left\{ \int_{D_s(\alpha)} | z_s(x) - z_s(\alpha) |^m \, dx \right\}^{\frac{1}{m}}, \tag{4.31}$$

where $D_s(\alpha)$ is the support of the function $\left|\frac{\partial \zeta_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|$.

We estimate integrals with $v_\alpha^{(s)}$ in (4.31) by using the estimate (3.2) and integral with $z_s(x)$ by using the Lemma 3.2. We obtain

$$|J_s^{(4)}| \le C_{30} [\tau(\lambda_s \rho_s)]^{1/m} \sum_{\alpha \in I'_{1,s}} | q_\alpha^{(s)} |^{m-1} [\nu(K_s(\alpha))]^{(m-1)/m} \left\{ \int_{\tilde{K}_s(\alpha)} \left|\frac{\partial z_s}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{4.32}$$

Estimating the right-hand side of (4.32) by Holder inequality we get

$$|J_s^{(4)}| \le C_{31} [\tau(\lambda_s \rho_s)]^{1/m} \left\{ \int_\Omega | q_s(x) |^m \, d\nu \right\}^{\frac{m-1}{m}} \left\{ \int_\Omega \left|\frac{\partial z_s}{\partial x}\right|^m dx \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{4.33}$$

Taking into account $\tau(r)$ tends to zero as $r \to 0$ we get from (4.33)

$$\lim_{s\to\infty} J_s^{(4)} = 0. \tag{4.34}$$

Let us consider the behaviour of $J_s^{(5)}$ as $s \to \infty$. Remarking that the support of $\left|\frac{\partial \zeta_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x}\right|$ is contained in $K(x_\alpha^{(s)}, \gamma\lambda_s\rho_s) \setminus K\left(x_\alpha^{(s)}, \frac{3}{2}\lambda_s\rho_s\right)$ and using the inequality (3.2) we have the estimate

$$\left| \sum_{j=1}^n \int_{\tilde{K}_s(\alpha)} a_j \left(x, \frac{\partial v_\alpha^{(s)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta_\alpha^{(s)}(x)}{\partial x_j} dx \right| \le$$

$$\le C_{32}\frac{|q_\alpha^{(s)}|^{m-1}}{\delta_\alpha^{(s)}}\left\{\frac{C_m(K_s'(\alpha)\setminus\Omega_s)}{[\lambda_s\rho_s]^{n-m}}\right\}^{\frac{1}{m-1}}\nu(K_s(\alpha)). \qquad (4.35)$$

From the Holder inequality and the Lemma 3.2 we have the estimate

$$\left|z_s(\alpha)-\frac{1}{\nu(K_s(\alpha))}\int\limits_{K_s(\alpha)} z_s(x)d\nu\right|\le C_{33}\left\{\tau(\lambda_s\rho_s)\frac{1}{\nu(K_s(\alpha))}\int\limits_{K_s(\alpha)}\left|\frac{\partial z_s(x)}{\partial x}\right|^m dx\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Using Remark 2.4 and the inequality $|q_\alpha^{(s)}|^{m-1}\le\frac{1}{\zeta_s}$ for $\alpha\in I'_{1,s}$ we obtain from (4.35), (4.17) and the last inequality

$$|J_s^{(5)}|\le C_{34}\|z_s\|^{1/2}_{L_m(\Omega,\nu)}+C_{34}\tau(\lambda_s\rho_s)\left\|\frac{\partial z_s(x)}{\partial x}\right\|_{L_m(\Omega)}. \qquad (4.36)$$

From compactness of embedding $W_m^1(\Omega)\subset L_m(\Omega,\nu)$ and (4.36) following equality

$$\lim_{s\to\infty}J_s^{(5)}=0 \qquad (4.37)$$

holds. Now the equality (1.26) is followed from (4.18), (4.19), (4.24), (4.27)–(4.29), (4.34), (4.37) and the proof of the Theorem 1.1 is completed.

1. *Dal Maso G., Skrypnik I.V.* Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1965. – 65 p. – (Preprint / SISSA; 162/95/M).
2. *Skrypnik I.V.* New conditions for the homogenization of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains // Ukr. Math. Zh. – 1996. – **48**, № 5. – P. 675–694.
3. *Skrypnik I.V.* Homogenization of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains of general structure // Math. Sbornik (N. S.). – 1996. – **187**, № 8. – P. 125–157.
4. *Skrypnik I.V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: Teuber-Verlag, 1986. – 232 p.
5. *Skrypnik I.V.* Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems // Providence: Transl. Math. Monographs. – 1998. – **139**. – 348 p.
6. *Casado Dias J., Garroni A.* Asymptotical behaviour of nonlinear elliptic systems on varying domains // SIAM J. Math. Anal. – 2000. – **31**, № 3. – P. 581–624.
7. *Dal Maso G., Defranceschi A.* Limits of nonlinear Dirichlet problems on varying domains // Manuscr. Math. – 1988. – **61**. – P. 251–278.
8. *Dal Maso G., Murat F.* Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operator // Ann. Scuola norm. super. Pisa, Cl. Sci. – 1997. – **24**. – P. 239–290.

9. *Dal Maso G., Murat F.* Dirichlet problems in perforated domains for homogeneous monotone operators in H_0^1 // Calculus of Variations, Homogenization and Continuum Mechanics. – Singapore, 1994. – P. 177–202.
10. *Tartar L.* Homogénèsation: Cours Peccot on Collège de France. – Paris, 1977.
11. *Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A.* Homogenization of differential operators. – M.: Fis.-Math. Publ., 1993. – 464 p.
12. *Skrypnik I.V.* Asymptotic of solutions of nonlinear elliptic problems in perforated domains // Math. Sbornik (N. S.). – 1993. – **184**, № 10. – P. 67–90.
13. *Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.* Linear and quasilinear elliptic equations. – M.: Nauka, 1973. – 576 p.
14. *Serrin J.* Local behaviour of solutions of quasi-linear elliptic equations // Acta Math. – 1964. – **111**. – P. 247–302.
15. *Mazja V.G., Khavin V.P.* Nonlinear potential theory // Russ. Math. Surveys. – 1972. – **27**, № 1. – P.67–138.
16. *Mazja V.G.* Sobolev spaces. – Leningrad: Leningr. Univ. Publ., 1985. – 415 p.

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ
И. В. СКРЫПНИКА

1963

1. До питання про узагальнення поняття аналітичної функції // Теоретична і прикл. мат. – Львів, 1963. – Вип. 2. – С. 36–47.

1965

2. Узагальнена теорема де Рама // Доп. АН УРСР. – 1965. – № 1. – С. 18–19.
3. A-гармонические формы на компактном римановом пространстве // Первая респ. матем. конф. молодых исследователей. – Киев, 1965. – Вып. 2. – С. 602–607.
4. A-гармонічні форми на компактному рімановому просторі // Доп. АН УРСР. – 1965. – № 2. – С. 174–176.
5. A-гармонические поля с особенностями // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 130–133.
6. Периоды A-замкнутых форм // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, № 4. – С. 772–773.
7. A-гармонические формы на римановом пространстве // Автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. – Киев: Ин-т матем. АН УССР. – 1965. – 10 с.

1966

8. A-задача Неймана // Доп. АН УРСР. – 1966. – № 3. – С. 295–299.
9. A-замкнені форми на некомпактному рімановому просторі // Друга наукова конференція молодих математиків України. – Київ: Наук. думка, 1966. – С. 565–568.

1968

10. До питання про A-замкнені форми на некомпактному просторі // Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. фіз., хім. і мех.-мат. – Львів, 1968. – С. 193–195.

1970

11. Про розв'язність нелінійних рівнянь з монотонними операторами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 1. – С. 32–35.
12. Загальні еліптичні задачі в плоских областях зі щілинами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 4. – С. 320–322. (Соавт. М.Д. Мартиненко, В.П. Щербина.)
13. Еліптичні задачі в багатовимірних областях зі щілинами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 5. – С. 423–425.

14. Про спектр одного класу нелінійних операторів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 11. – С. 998–1000.
15. К вопросу о применении приближенных методов в вариационных задачах // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1970. – Вып. 7. – С. 156–163.

1971

16. До задачі про точки біфуркації // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 2. – С. 126–128.
17. Про розв'язність нелінійної задачі Неймана // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 11. – С. 989–992.
18. Квазилинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Донецк: Изд-во Донецкого гос. ун-та, 1971. – 121 с.
19. Точки бифуркации вариационных задач // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1971. – Вып. 9. – С. 117–123.
20. О точках бифуркации вариационных эллиптических задач // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1971. – Вып. 10. – С. 156–160.

1972

21. Застосування топологічних методів до рівнянь з монотонними операторами // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 1. – С. 69–78.
22. О регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка // Докл. АН СССР. – 1972. – **203**, № 1. – С. 36–38.
23. О применении методов Морса к нелинейным эллиптическим уравнениям // Докл. АН СССР. – 1972. – **202**, № 4. – С. 769–771.
24. Обчислення індексу критичної точки // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 6. – С. 527–529.
25. Про диференційовність інтегральних функціоналів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 12. – С. 1086–1089.
26. О регулярности решений квазилинейных эллиптических уравнений на плоскости // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1972. – Вып. 11. – С. 137–145.
27. Поведение вблизи границы решений квазилинейных эллиптических уравнений на плоскости // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1972. – Вып. 11. – С. 146–148.
28. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка : Автореф. дисс. на соискание учен. степени доктора физ.-мат. наук. – Киев: Ин-т матем. АН УССР. – 1972. – 30 с.

29. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка : Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Донецк: ИПММ АН УССР, 1972.

1973

30. Про неперервність узагальнених розв'язків еліптичних рівнянь вищого порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1973. – № 1. – С. 43–45.
31. Про регулярність узагальнених розв'язків квазілінійних еліптичних рівнянь на площині // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1973. – № 3. – С. 217–219.
32. Условие регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 6. – С. 1376–1427.
33. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка // Семинар Ин-та прикл. мат. Тбилис. ун-та. Аннотации докл. – Тбилиси, 1973. – № 7. – С. 51–52.
34. О бифуркации равновесия гибких пластин // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1973. – Вып. 13. – С. 159–161.
35. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев: Наук. думка, 1973. – 220 с.

1974

36. О разрешимости и обосновании метода Галеркина в ряде нелинейных задач механики // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1974. – Вып. 15. – С. 152–159.

1976

37. Про регулярність узагальнених розв'язків квазілінійних еліптичних систем довільного порядку // Математический сборник. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 34–37. (Соавт. Б.П. Петрівський.)
38. Про квазілінійні еліптичні рівняння вищого порядку з неперервними узагальненими розв`язками // Математический сборник. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 90–93.
39. Об умовах на коефіцієнти квазілінійних еліптичних рівнянь вищого порядку // Математический сборник. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 93–94.
40. О бифуркации решений граничных задач для недивергентных уравнений // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1976. – Вып. 20. – С. 99–103. (Соавт. В.П. Щербина.)
41. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. – **9**. – М.: ВИНИТИ, 1976. – С. 131–254.

_1977_

42. Ярослав Борисович Лопатинский (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, вып. 1. – С. 213–216. (Соавт. А.И. Вольперт, И.И. Данилюк, А.И. Марковский.)
43. Частичная регулярность обобщенных решений квазилинейных параболических систем высшего порядка. – Донецкий гос. ун-т, 1977. – 12 с. – (Рукопись деп. в ВИНИТИ 20 мая 1977 г., № 1981-77 Деп.). (Соавт. Г.И. Данилюк.)
44. О коэрцитивности билинейной формы, порожденной парой эллиптических операторов. – Донецкий гос. ун-т, 1977. – 17 с. – (Рукопись деп. в ВИНИТИ 23 июня 1977 г., № 2500-77 Деп.). (Соавт. А.Е. Шишков.)
45. О регулярности решений нелинейных параболических систем // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1977. – Вып. 22. – С. 87–91. (Соавт. Г.И. Данилюк.)

_1978_

46. О неравенстве коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов // Докл. АН СССР. – 1978. – **239**, № 2. – С. 275–278.
47. Про індекс критичних точок недивергентних еліптичних операторів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 2. – С. 115–118.
48. О топологической характеристике общих нелинейных эллиптических операторов // Докл. АН СССР. – 1978. – **239**, № 3. – С. 538–541.
49. Про розв'язність задачі Діріхле для рівнянь Монжа-Ампера // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 3. – С. 215–218. (Соавт. А.Є. Шишков.)
50. Про належність розв'язків варіаційних задач просторам Моррі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 5. – С. 404–407.
51. О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104–1118.
52. О регулярных в замкнутой области решениях задачи Дирихле для уравнений Монжа-Ампера // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1978. – Вып. 23. – С. 87–90. (Соавт. А.Е. Шишков.)
53. О неравенствах коэрцитивности для пар линейных эллиптических операторов // Краевые задачи для уравнений в частных производных. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 107–118.
54. О топологических характеристиках нелинейных эллиптических задач // Краевые задачи для уравнений в частных производных. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 118–125.

55. О коэрцитивности билинейной формы, порождаемой парой эллиптических операторов в пространстве $W_2^k(\Omega)$ // Мат. физика. – Киев: Наук. думка, 1978. – Вып. 24. – С. 111–115. (Соавт. А.Е. Шишков.)

1979

56. Разрешимость граничных задач для недивергентных нелинейных эллиптических уравнений // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 11. Записки научн. семинаров ЛОМИ. – Ленинград: Наука, 1979. – **84**. – С. 243–251.

1980

57. Донецкая конференция по дифференциальным уравнениям в частных производных. – Успехи мат. наук. – 1980. – **35,** вып. 1. – С. 235–240. (Соавт. Я.Б. Лопатинский, И.И. Данилюк.)
58. Разрешимость нелинейной задачи Дирихле в узкой полосе // Докл. АН СССР. – 1980. – **250**, № 3. – С. 569–573.
59. О частичной регулярности обобщенных решений квазилинейных параболических систем // Докл. АН СССР. – 1980. – **250**, № 4. – С. 790–793. (Соавт. Г.И. Данилюк.)
60. Об остром угле между парами линейных параболических операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 10. – С. 27–30. (Соавт. А.Е. Шишков.)
61. Об априорных оценках решений задачи Дирихле, равномерных относительно семейства областей // Граничные задачи для дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 175–182.
62. Об интерполяционных неравенствах, равномерных относительно семейства областей // Граничные задачи для дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 166–175.
63. О разрешимости общих нелинейных эллиптических задач // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. конф. по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике (Новосибирск, 1978). – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 97–99.

1981

64. Я.Б. Лопатинский. Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных: Рецензия на книгу. – Укр. мат. журн. – 1981. – **33,** № 3. – С. 430. (Соавт. И.И. Данилюк.)
65. Ярослав Борисович Лопатинский: Некролог // Укр. мат. журн. – 1981. – **33,** № 3. – С. 431–432. (Соавт. И.И. Данилюк, А.И. Марковский, Ю.А. Митропольский.)

66. О регулярности почти всюду обобщенных решений нелинейной параболической системы // Граничные задачи мат. физики. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 29–30. (Соавт. Г.И. Данилюк.)
67. Априорные оценки и разрешимость нелинейной задачи Дирихле в узкой области // Граничные задачи мат. физики. – Киев, Наук. думка, 1981. – С. 121–126.

1982

68. Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–25.
69. О сходимости решений нелинейной задачи Дирихле при измельчении границы области // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.14. Записки научных семинаров ЛОМИ. – Ленинград: Наука, 1982. – **115**. – С. 236–250.
70. Иван Ильич Данилюк (к 50-летию со дня рождения) // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 2. – С. 196–197. Соавт. (Б.В. Базалий, И.И. Гихман.)
71. Конференция по дифференциальным уравнениям в частных производных // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, вып. 2. – С. 263–268. (Соавт. И.И. Данилюк, А.И. Марковский, З.О. Мельник.)
72. О сходимости решений нелинейной задачи Дирихле при измельчении границы области // Успехи матем. наук. – 1982. – **37**, вып. 4. – С. 134.
73. Нелинейные эллиптические граничные задачи в областях с мелкозернистой границей // Equadiff 5. Proc. 5 Czech. Conf. Differ. Equations and Appl., Bratislava, Aug. 24–28, 1981. – Leipzig, 1982. – P. 301–309.
74. Topological methods of investigation of operator equations and nonlinear boundary value problems // Nonlinear analysis, function spaces and applications. – 1982. – **2**, Teubner-Texte Math. 49. – P. 191–233.
75. Топологические методы в теории нелинейных эллиптических и параболических граничных задач // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики: Сб. докладов 7-го Сов. – Чехосл. семинара. – Ереван, 1982. – С. 314–319.

1983

76. О работах Я.Б. Лопатинского по общей теории эллиптических граничных задач // Общая теория граничных задач. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 3–13. (Соавт. А.И. Вольперт, И.И. Данилюк, А.И. Марковский.)

77. О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов // Общая теория граничных задач. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 198–206.

1984

78. Конференция по нелинейным задачам математической физики // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, вып. 2. – С. 223–227. (Соавт. Б.В. Базалий, И.И. Данилюк.)
79. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 4. – С. 25–28. (Соавт. С.А. Ламонов.)
80. Критерий регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1984. – **274**, № 5. – С. 1040–1044.
81. Асимптотические точки бифуркации вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 8. – С. 24–27. (Соавт. Ф. Баушке.)
82. *A*-гармонические формы на римановом пространстве: Тез. Докл. Всесоюз. школы молодых ученых // Комплексные методы в мат. физике. – Донецк, 1984. – С. 96–102.
83. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений в областях с мелкозернистой границей // Осреднение нелинейных граничных задач: Препринт № 84.40. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 23–44. (Соавт. С.А. Ламонов.)
84. Топологические методы исследования общих нелинейных эллиптических граничных задач // Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984. – С. 68–91.
85. Qualitative properties of solutions of nonlinear elliptic equations // Conference in Compl. Analysis. Hale (S.), 1984.

1985

86. Сходимость галеркинских приближений для общих нелинейных эллиптических граничных задач // Численные методы и приложения. Труды международной конференции по численным методам и приложениям. София, 27 авг. – 2 сент., 1984 г. – София: Изд-во Болгарской Академии Наук, 1985. – С. 540–551.
87. Усреднение квазилинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 4. – С. 197–198.
88. О задачах усреднения для квазилинейных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 5. – С. 220–221. (Соавт. А.А. Ковалевский.)

1986

89. Поведение в неограниченной области решений квазилинейного эллиптического уравнения // Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики: Тез. докл. IX Советско-Чехословацкого совещания. – Донецк, 1986. – С. 3–4. (Соавт. Э.М. Азимов.)
90. Регулярность решения квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка в областях с угловыми точками // Применение функциональных методов и методов теории функций к задачам математической физики: Тез. докл. IX Советско-Чехословацкого совещания. – Донецк, 1986. – С. 94–95. (Соавт. Т.С. Гаджиев.)
91. Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: BSB Teubner. – 1986. – 232 p.

1987

92. IX Советско-Чехословацкое совещание по применению функционалных методов и методов теории функций к задачам математической физики // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, № 2. – С. 229–231. (Соавт. В.С. Владимиров, А. Куфнер, Б.В. Базалий.)
93. Конференция по нелинейным задачам математической физики // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**. – вып. 2. – С. 262–265. (Соавт. Г.И. Данилюк, И.И. Данилюк, С.П. Лавренюк.)
94. Разрешимость граничной задачи фильтрации двухкомпонентной среды // Исследование математических моделей задач фильтрации жидкости и газа в пористых средах: Препринт № 87.7. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 30–50. (Соавт. В.Н. Тышлек.)
95. Априорные оценки обобщенных решений нелинейных параболических систем высшего порядка // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 283–288. (Соавт. Г.И. Данилюк.)
96. Регулярные точки обобщенных решений нелинейных параболических систем высшего порядка // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 429–436. (Соавт. Г.И. Данилюк.)
97. Ограниченность решений эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями // Нелинейные задачи математической физики: Тез. докл. VI Респ. конф. – Донецк, 1987. – С. 4–5. (Соавт. Э.М. Азимов.)

98. Александр Иванович Кошелев (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**. – вып. 5. – С. 225–226. (Соавт. М.И. Вишик, Е.М. Ландис, С.Г. Михлин, О.А. Олейник.)

1988

99. Точные теоремы вложения для одного класса весовых пространств С.Л. Соболева // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 1. – С. 22–26. (Соавт. А. Куфнер, Б. Опиц, В.П. Стецюк.)
100. Поведение решений квазилинейных эллиптических уравнений вблизи негладкой границы // Функциональные и численные методы мат. физики. – Киев: Наукова думка, 1988. – С. 211–216. (Соавт. И.И. Скрыпник.)

1989

101. Регулярность граничной точки для квазилинейного эллиптического уравнения // Нелинейные граничные задачи.– Киев: Наук. думка, 1989. – Вып. 1. – С. 90–96.
102. Конференция по нелинейным задачам математической физики // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, вып. 3. – С. 195–196. (Соавт. Б.В. Базалий, И.И. Данилюк.)
103. Иван Ильич Данилюк // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, вып. 5. – С. 141–147. (Соавт. Б.В. Базалий, М.И. Вишик, В.С. Владимиров, О.А. Ладыженская, Ю.А. Митропольский, С.П. Новиков, О.А. Олейник.)
104. Усреднение задачи Дирихле для квазилинейных уравнений эллиптического типа высшего порядка в областях с каналами. – Донецк, 1989. – 28 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 89.13). (Соавт. А.И. Прокопенко.)

1990

105. Усреднение нелинейных задач Дирихле в областях с каналами // Докл. АН СССР. – 1990. – **315**, № 4. – С. 793–797.
106. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Новейшие достижения. – **37**. – М.: ВИНИТИ, 1990. – С. 3–87.
107. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.

1991

108. Регулярность граничной точки для квазилинейного параболического уравнения // Докл. АН СССР. – 1991. – **319**, № 1. – С. 68–71.

109. Условие регулярности граничной точки для квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка // Докл. АН СССР. – 1991. – **320**, № 4. – С. 821–824.

110. Регулярность граничной точки для квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка // Труды Мат. института им. Стеклова АН СССР. – 1991. – **200.** – С. 310–321.

111. Поточечная оценка решения модельной нелинейной параболической задачи // Нелинейные граничные задачи. – Киев: Наук. думка, 1991. – Вып. 3. – С. 72–86.

112. Регулярность граничной точки для квазилинейного параболического уравнения высшего порядка // Тез. докл. VIII республиканской конференции «Нелинейные задачи мат. физики и задачи со свободной границей». Донецк, 3–8 сентября 1991 г. – Донецк, 1991. – С. 106.

1992

113. Поточечные оценки решения линейной задачи Дирихле в области с цилиндрической полостью // Нелинейные граничные задачи. – Киев: Наук. думка, 1992. – Вып. 4. – С. 75–82. (Соавт. А.И. Прокопенко.)

114. Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения // Мат. сборник. – 1992. – **183**, № 7. – С. 3–22.

115. Поточечная оценка решения квазилинейной эллиптической задачи в области с тонкой полостью // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1417–1432. (Соавт. М.А. Наумова.)

1993

116. О квазилинейных параболических уравнениях высшего порядка с гёльдеровыми решениями // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 3. – С. 501–514.

117. Гельдеровость решений квазилинейных параболических уравнений высшего порядка // Докл. РАН. – 1993. – **329**, № 6. – С. 709–711.

118. Гельдеровость функций из класса $B_{q,s}$ // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1020–1028.

119. Асимптотика решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Мат. сборник. – 1993. – **184**, № 10. – С. 67–90.

120. Асимптотическое разложение решений квазилинейных параболических задач в перфорированных областях // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1542–1566.

1994

121. Равномерное приближение решений нелинейных эллиптических задач в областях с мелкозернистой границей // Докл. РАН. – 1994. – **339**, № 1. – С. 29–32.
122. Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems. – Ser. Transl. Math. Monographs, **139**. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1994. – 348 p.
123. On quasilinear parabolic higher order equations with Hölder continuous solutions // Book of Abstracts of the 2nd European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Pont-à-Mousson, June 13–17, 1994. – Pont- à -Mousson, France, 1994.
124. On a homogenezation of nonlinear parabolic boundary value problems in perforated domains // Collection of abstracts of ICM-94. – Zurich, 1994.

1995

125. Усреднение квазилинейных параболических задач в областях с мелкозернистой границей // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 2. – С. 350–363.
126. Homogenization of nonlinear parabolic boundary value problems in perforated domains // Нелинейные граничные задачи.– Донецк, 1995. – Вып. 6. – С. 111–118.
127. On quasilinear parabolic higher order equations with Hölder continuous solutions // Elliptic and parabolic problems. Proceedings of the 2nd European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Pont-à-Mousson, June 13–17, 1994. – Harlow: Longman Scientific & Technical. Pitman Res. Notes Math. Ser. 325, 1995. – P. 203–212.
128. Homogenization of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains of general structure. – Trieste, Italy, 1995. – (Preprint 196/94/M, SISSA).
129. Capacity theory for monotone operators. – Trieste, Italy, 1995. – (Preprint 6/95/M, SISSA). (Соавт. G. Dal Maso.)
130. Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, Italy, 1995. – (Preprint 162/95/M, SISSA). (Соавт. G. Dal Maso.)

1996

131. Новые условия усреднения нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 675–694.
132. Nirenberg-Gagliardo interpolation inequality and regularity of solutions of nonlinear higher order equations // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 1996 – **7**, № 2. – P. 327–347. (Соавт. F. Nicolosi.)

133. Усреднение нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях общей структуры // Мат. сборник. – 1996. – **187**, № 8. – С. 125–157.
134. Поточечные оценки потенциалов для емкости высокого порядка // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, вып. 5. – С. 205–206.
135. On the behaviour near the boundary of solutions of nonlinear degenerate parabolic higher order equations // Nonlinear Analysis, Theory Methods Appl. – 1996. – **26**, № 11. (Соавт. F. Nicolosi.)
136. Регулярность вблизи границы решений квазилинейных параболических уравнений высшего порядка // Доп. НАН України. – 1996. – № 12. – С. 10–14. (Соавт. Ф. Николози.)
137. Pointwise estimates for potential for higher order capacity. – Trieste, Italy, 1996. – (Preprint 155/96/M, SISSA).

1997

138. Ограниченные решения вырождающихся квазилинейных параболических уравнений высшего порядка // Доп. НАН України. – 1997. – № 1. – С. 17–21. (Соавт. Ф. Николози.)
139. Regularity of solutions of higher order nonlinear elliptic and parabolic equations // Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysis, Part 1 (Athens, 1996), Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 1997. – **30**, № 1. – P. 147–157.
140. Поточечные оценки потенциалов для емкости высшего порядка // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 149–163.
141. Усреднение нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях общей структуры // Докл. РАН. – 1997. – **353**, № 2. – С. 163–166.
142. Юрій Львович Далецький (до сімдесятиріччя від дня народження) // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 3. – С. 323–325. (Соавт. Ю.М. Березанський, В.С. Королюк, С. Г. Крейн, Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, А.В. Скороход.)
143. О регулярности решений вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений высшего порядка // Доп. НАН України. – 1997. – № 3. – С. 24–28. (Соавт. Ф. Николози.)
144. Асимптотическое поведение решений квазилинейных параболических задач в перфорированных областях // Докл. РАН. – 1997. – **352**, № 4. – С. 466–469.
145. Непрерывность по Гельдеру решений вырождающихся нелинейных параболических уравнений высшего порядка // Доп. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 29–33. (Соавт. Ф. Николози.)

146. A capacitary method for the asymptotic analysis of Dirichlet problems for monotone operators // J. Anal. Math. – 1997. – **71.** – P. 263–313. (Соавт. G. Dal Maso, A. Garonni.)
147. Capacity Theory for Monotone Operators // Potential Analysis. – 1997 – **7**, № 4. – P. 765–803. (Соавт. G. Dal Maso.)
148. Topological characteristics of fully nonlinear parabolic problems // Topological and variational methods for nonlinear boundary value problems. Proceedings of the 20th seminar in partial differential equations, Cholín, Czech Republic, June 5–9, 1995. – 1997. – Harlow: Longman. Pitman Res. Notes Math. Ser. **365** – P. 122–155.
149. On Harnack inequality for one class of nonlinear elliptic higher order equations // Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Partial Differential Equations». Kiev, August 26–30, 1997. – Donetsk, 1997. – P.157–158.
150. Поточечная оценка решения нелинейной параболической задачи в области с тонкой полостью // Вісник Донецьк. ун-ту. Сер. А. – Природничі науки. – 1997. – Вип. 1. – С. 34–48. (Соавт. М.А. Наумова.)

1998

151. Принцип аддитивности в усреднении вырождающихся нелинейных задач Дирихле // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 118–135. (Соавт. Д.В. Ларин.)
152. Нелинейные эллиптические задачи в областях с тонкими полостями // Доп. НАН України. – 1998. – № 3. – С. 46–51. (Соавт. М.А. Наумова.)
153. Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains // Ann. Mat. Pura Appl. – 1998. – **174.** – P. 13–72. (Соавт. G. Dal Maso.)
154. Hölder continuity of solutions for higher order degenerate nonlinear parabolic equations // Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. – 1998. – **175.** – P. 1–27. (Соавт. F. Nicolosi.)
155. Нелинейные параболические задачи в областях с тонкими полостями // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 59–63. (Соавт. М.А. Наумова.)
156. On Harnack inequality for nonlinear elliptic higher order equations // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1998. – № 8. – P. 209–219. (Соавт. F. Nicolosi.)
157. Topological degree theories for densely defined mappings involving operators of type (S_+). – Donetsk, 1998. – 43 p. – (Preprint / NAS of Ukraine. Inst. Appl. Math. Mech.; 98.06). (Соавт. A.G. Kartsatos.)
158. The index of a critical point for nonlinear elliptic operators with strong coeficient growth. – Donetsk, 1998. – 33 p. – (Preprint / NAS of Ukraine. Inst. Appl. Math. Mech.; 98.04). (Соавт. A.G. Kartsatos.)

159. The index of a critical point for densely defined operators of type (S_+) in Banach spaces. – Donetsk, 1998. – 36 p. – (Preprint / NAS of Ukraine. Inst. Appl. Math. Mech.; 98.05). (Соавт. A.G. Kartsatos.)

1999

160. Asymptotic behaviour of nonlinear elliptic higher order equations in perforated domains // J. Anal. Math. – 1999. – **79.** – P. 63–112. (Соавт. G. Dal Maso.)
161. On weighted estimates of solutions of nonlinear elliptic problems // Mathematica Bohemica. – 1999. – **124**, № 2–3. – C. 173–184. (Соавт. D.V. Larin.)
162. Topological degree theories for densely defined mappings involving operators of type (S_+) // Adv. Differ. Equ. – 1999. – **4**, № 3 – P. 413–456. (Соавт. A.G. Kartsatos.)
163. Normalized eigenvectors for nonlinear abstract and elliptic operators // J. Differential Equations. – 1999. – 155, № 2. – P. 443–475. (Соавт. A. Kartsatos.)
164. A global approach to fully nonlinear parabolic problems. – Donetsk, 1999. – 50 p. – (Preprint / NAS of Ukraine. Inst. Appl. Math. Mech.; 99.08). (Соавт. A.G. Kartsatos.)
165. On the development of Leray and Schauder topological methods for fully nonlinear bound. value pr. // Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Partial Differential Equations» dedicated to J.P. Schauder. Lviv, August 23–29, 1999. – Lviv, 1999. – P.191.
166. Алексей Васильевич Погорелов (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. – 1999. – **54**, вып. 4. – С. 188–190. (Соавт. А.Д. Александров, А.А. Борисенко, В.А. Залгаллер, В.А. Марченко, К.В. Маслов, А.Д. Милка, С.П. Новиков, Ю.Г. Решетняк, Е.Я. Хруслов.)
167. Апріорні оцінки розв’язків лінійних параболічних задач з коефіцієнтами з соболєвських просторів // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1534–1548. (Соавт. І.Б. Романенко.)

2000

168. The index of a critial point for nonlinear elliptic operators with strong coefficient growth // J. Math. Soc. Japan – 2000. – **52**, № 1. (Соавт. A. Kartsatos.)
169. Degree theory for densely defined operators and applications // Proceedings of the International Conference on Differential Equations Equadiff '99, Berlin, Germany, August 1–7, 1999. – Singapore: World Scientific, 2000. – **1.** – P. 523–525.
170. On compensated compactness for nonlinear elliptic problems in perforated domains // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1534–1549.

2001

171. Наум Ильич Ахиезер (к 100-летию со дня рождения) // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 291–293. (Соавт. В.А. Марченко, Ю.А. Митропольский, А.В. Погорелов, А.М. Самойленко, Е.Я. Хруслов.)
172. Про єдиність розв'язку нелінійної еліптичної задачі // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 28–32. (Соавт. Г. Гаєвський.)
173. To the uniqueness problem for nonlinear elliptic-parabolic systems // Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Partial Differential Equations». Kyiv, August 22–28, 2001. – Donetsk, 2001. – P.116.
174. A monotonicity approach to nonlinear Dirichlet problems in perforated domains // Adv. Math. Sci. Appl. – 2001. – **11**. – P. 721–751. (Соавт. G. Dal Maso.)

2002

175. On Harnack type theorems for nonlinear higher order elliptic equations // Nonlinear Analysis, Theory Methods Appl. – 2002. – **50**, № 1. – P. 129–147. (Соавт. F. Nicolosi.)
176. The index of a critical point for densely defined operators of type $(S_+)_L$ in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 2002. – **354,** № 4. – P. 1601–1630. (Соавт. A.G. Kartsatos.)
177. Сходимость собственных чисел и собственных функций нелинейных задач Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Труды ИПММ НАН Украины, 2002. – **7.** – С. 168–174. (Соавт. Ю.В. Намлеева.)
178. О единственности решений нелинейных эллиптических и параболических задач // Труды Мат. инст. им. Стеклова РАН. – 2002. – **236.** – С. 318–327. (Соавт. Г. Гаевский.)
179. On topological approach to fully nonlinear parabolic problems // Нелинейные граничные задачи.– Донецк, 2002. – Вып. 12. – С. 201–210. (Соавт. I.B. Romanenko.)
180. Микола Іванович Шкіль (до 70-річчя від дня народження) // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1589–1591. (Соавт. Ю.М. Березанський, В.С. Королюк, Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко.)

2003

181. To the uniqueness problem for nonlinear elliptic equations // Nonlinear Analysis, Theory Methods Appl. – 2003. – **52**, №1. – P. 291–304. (Соавт. H. Gajewski.)

182. Ranges of densely defined generalized pseudomonotone perturbations of maximal monotone operators // J. Differential Equations. – 2003. – **188,** №1. – P. 332–351. (Соавт. Z. Guan, A.G. Kartsatos.)

183. К проблеме единственности для нелинейной эллиптико-параболической системы // Доп. НАН України. – 2003. – № 2. – С. 32–36. (Соавт. Г. Гаевский.)

184. On the uniqueness of solutions for nonlinear elliptic-parabolic equations // J. Evol. Equ. – 2003. – **3**, № 2. – P. 247 – 281. (Соавт. H. Gajewski.)

185. Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities // Comm. Partial Differential Equations. – 2003. – **28**, № 3–4. – P. 677–696. (Соавт. F. Nicolosi, I.I. Skrypnik.)

186. Равномерная аппроксимация решений нелинейных параболических задач в перфорированных областях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2003. – Вып. 8. – С. 142–146. (Соавт. А.В. Журавская.)

187. Сходимость собственных чисел и собственных функций нелинейных задач Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 824–839. (Соавт. Ю.В. Намлеева.)

188. On nonexistence of positive supersolutions for quasilinear elliptic operators // Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Partial Differential Equations». Alushta, September 15–21, 2003. – Donetsk, 2003. – P.194.

189. The behavior of the eigenvalues and eigenfunctions of nonlinear Dirichlet problems in domains with a finely granulated boundary // Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Partial Differential Equations» Alushta, September 15–21, 2003. – Donetsk, 2003. – P.195. (Соавт. J. Namleeva.)

190. Равномерная аппроксимация решений параболических задач в перфорированных областях // Нелинейные граничные задачи. – 2003. – Вып. 13. – С. 149–164. (Соавт. А. В. Журавская.)

191. On unique solvability of nonlocal drift-diffusion-type problems. – Berlin: WIAS, 2003. – 26 p. – (Preprint № 810). (Соавт. H. Gajewski.)

2004

192. Локальное поведение решений нелинейных параболических уравнений в области с тонкой щелью // Укр. мат. вісник. – 2004. – **1**, № 1. – С. 99–127. (Соавт. М.А. Наумова.)

193. Міжнародна конференція «Нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними» (15–21 вересня 2003 р., Алушта, Крим, Україна) // Український

математичний вісник. – 2004. – **1**, № 1. – С. 143–144. (Соавт. О.А. Ковалевський.)

194. Розвиток досліджень з математики в Україні (1918-2003) // Вісник НАН України. – 2004. – № 1 . – С. 22–27.
195. To the uniqueness problem for nonlinear parabolic equations // Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2004. – **10,** № 1–2. – P. 315–336. (Соавт. H. Gajewski.)
196. Topological characteristic of fully nonlinear parabolic boundary value problems // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 2004. – **23,** № 1. – P. 1–31. (Соавт. I.B. Romanenko.)
197. Дмитро Якович Петрина (до сімдесятиріччя від дня народження) // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 3. – С. 291–292. (Соавт. М.Л. Горбачук, І.О. Луковський, В.О. Марченко, Ю.О. Митропольський, Л.А. Пастур, А.М. Самойленко, Є.Я. Хруслов.)
198. Positive supersolutions to general nonlinear elliptic equations in exterior domains // Manuscripta Math. – 2004. – **115**, № 4. – P. 521–538. (Соавт. V. Liskevich, I.I. Skrypnik.)
199. Removable singularities for solutions of quasilinear parabolic equations // Book of Abstracts. International Conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to I.G. Petrovskii. Moscow, May 16–22, 2004. – Moscow, 2004. – P. 213.
200. On unique solvability of nonlocal drift-diffusion-type problems // Nonlinear Analysis, Theory Methods Appl. – 2004. – **56**, № 6. – P. 803–830. (Соавт. H.Gajewski.)
201. Равномерная аппроксимация решений нелинейных параболических задач в перфорированных областях // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1244–1258. (Соавт. А.В. Журавская.)

2005

202. The index of an isolated critical point for a class of non-differentiable elliptic operators in reflexive Banach spaces // J. Differential Equations. – 2005. – **214**. – P. 189–231. (Соавт. A.G. Kartsatos, V.N. Shramenko.)
203. A new topological degree theory for densely defined quasibounded $(\widetilde{S}_+)$-perturbations of multivalued maximal monotone operators in reflexive Banach spaces // Abstr. Appl. Anal. – 2005. – № 2. – P. 121–158. (Соавт. A.G. Kartsatos.)
204. Existence and uniqueness results for reaction-diffusion processes of electrically charged species // Nonlinear elliptic and parabolic problems. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. – Basel, Birkhäuser, 2005. – **64**. – P. 151–188. (Соавт. H.Gajewski.)

205. Усреднение начально-краевой задачи для нелинейного волнового уравнения в перфорированной области // Нелінійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – С. 95–108. (Соавт. Н.Р. Сиденко.)

2006

206. On the eigenvalue problem for perturbed nonlinear maximal monotone operators in reflexive Banach spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. – 2006. – **358**. – № 9. – P. 3851–3881. (Соавт. A.G. Kartsatos.)

СОДЕРЖАНИЕ

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ІГОР ВОЛОДИМИРОВИЧ СКРИПНИК

ВИБРАНІ ПРАЦІ

Київ, видавництво “Наукова думка”